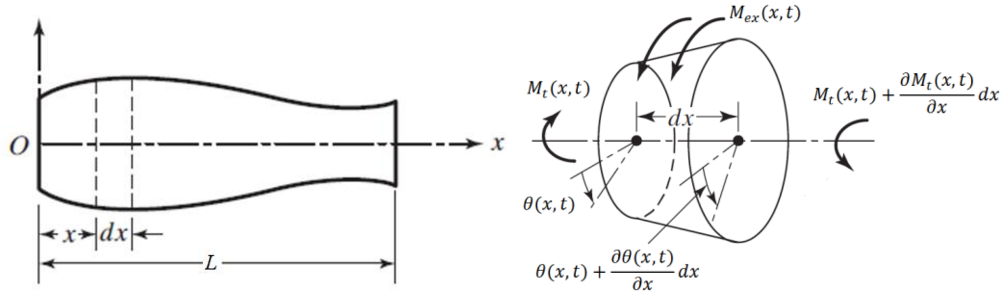
Chapitre 2 : Vibrations de torsion des arbres

1. Equation de mouvement

Considérons un arbre élastique de longueur L avec une section transversale variable *S(x)*.



Le mouvement est défini par :

θ : Angle de torsion

M_t : Moment de torsion

M_{ex} : Couple extérieur par unité de longueur

J : Moment d'inertie polaire de surface

$\bar{I}_m$: Moment d'inertie de masse par unité de longueur

G : Module de cisaillement

La somme des moments appliquées sur l'élément de l'arbre donne :

$$\bar{I}_m(x)dx\,\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = M_t + \frac{\partial M_t}{\partial x}dx - M_t + M_{ex}dx \tag{1}$$

Soit :

$$\bar{I}_m(x)\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = \frac{\partial M_t}{\partial x} + M_{ex} \tag{2}$$

Par ailleurs, le couple et l'angle de torsion sont reliés par :

$$M_t = GJ\frac{\partial\theta}{\partial x} \tag{3}$$

A partir de (2) et (3), l'équation aux dérivées partielles du mouvement s'écrit :

$$\bar{I}_m(x)\,\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(GJ\frac{\partial\theta}{\partial x}\right) + M_{ex} \tag{4}$$

Et dans le cas d'une section constante :

$$\bar{I}_m\,\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = GJ\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + M_{ex} \tag{5}$$

Pour un arbre ayant une section droite uniforme : $\bar{I}_m = \rho J$

2. Résolution de l'équation en mouvement libre

En l'absence de forces extérieures, et dans le cas d'une section constante, on a l'équation :

$$\rho J \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = GJ \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \tag{6}$$

Pour la résolution de l'équation (6), on utilise la méthode de séparation des variables.

On pose :

$$\theta(x,t) = \Theta(x).T(t) \tag{7}$$

Qui, reporté dans (6) donne :

$$\rho J\ \Theta(x) \frac{d^2 T(t)}{dt^2} = GJ\ T(t) \frac{d^2 \Theta(x)}{dx^2} \tag{8}$$

La division des deux membres de l'équation par : $\rho\ J\ \Theta(x)\ T(t)$ conduit à la séparation de la fonction de la variable d'espace et celle de la variable du temps :

$$\frac{G}{\rho} \frac{1}{\Theta(x)} \frac{d^2 \Theta(x)}{dx^2} = \frac{1}{T(t)} \frac{d^2 T(t)}{dt^2} = cste = -\omega^2 \tag{9}$$

Ce qui mène aux équations :

$$\frac{d^2 T(t)}{dt^2} + \omega^2 T(t) = 0 \tag{10}$$

$$\frac{d^2 \Theta(x)}{dx^2} + \omega^2 \frac{\rho}{G} \Theta(x) = 0 \tag{11}$$

Les solutions de (10) et (11) sont :

$$T(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t \tag{12}$$

$$\Theta(x) = C \sin \omega \sqrt{\frac{\rho}{G}} x + D \cos \omega \sqrt{\frac{\rho}{G}} x \tag{13}$$

D'où :

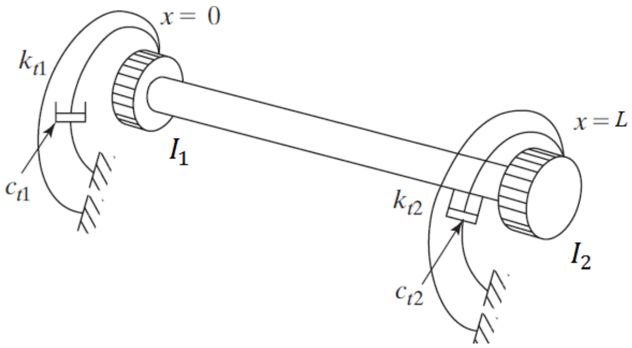
$$\theta(x,t) = (A \sin \omega t + B \cos \omega t)\left(C \sin \omega \sqrt{\frac{\rho}{G}} x + D \cos \omega \sqrt{\frac{\rho}{G}} x\right) \tag{14}$$

Les pulsations de résonance sont déterminées par l'application des conditions aux limites (C.L).

2. Conditions aux limites

Encastrée-Libre	$\theta(0,t) = 0$ $\frac{\partial \theta}{\partial x}(L,t) = 0$	$\omega_n = \frac{(2n-1)\pi}{2L}\sqrt{\frac{G}{\rho}}$	$\Theta_n(x) = \sin\frac{(2n-1)\pi x}{2L}$, avec $n = 1,2,\ldots$
Encastrée - Encastrée	$\theta(0,t) = 0$ $\theta(L,t) = 0$	$\omega_n = \frac{n\pi}{L}\sqrt{\frac{G}{\rho}}$	$\Theta_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{L}$, avec $n = 1,2,\ldots$
Libre - Libre	$\frac{\partial \theta}{\partial x}(0,t) = 0$ $\frac{\partial \theta}{\partial x}(L,t) = 0$	$\omega_n = \frac{n\pi}{L}\sqrt{\frac{G}{\rho}}$	$\Theta_n(x) = \cos\frac{n\pi x}{L}$, avec $n = 0,1,2,\ldots$

D'autres conditions aux limites sont résumées dans l'exemple ci-dessous :



A l'extrémité gauche de la barre :

$$M_t(0,t) = GJ\frac{\partial \theta}{\partial x}(0,t) = k_{t1}\theta(0,t) + c_{t1}\frac{\partial \theta}{\partial t}(0,t) + I_1\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}(0,t)$$

Et à son extrémité droite :

$$M_t(L,t) = GJ\frac{\partial \theta}{\partial x}(L,t) = -k_{t2}\theta(L,t) - c_{t2}\frac{\partial \theta}{\partial t}(L,t) - I_2\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}(L,t)$$