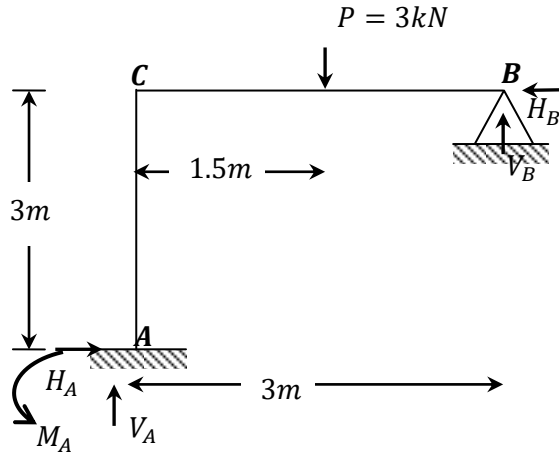


3.10. Exercices

3.10.1. Exercice N°3.1 :

Un portique ACB constitué de poutre et de poteau de rigidité EI en flexion. Tracer les diagrammes des moments fléchissants M_f , des efforts tranchants T et des efforts normaux N .



- On détermine le degré d'hyperstaticité d (le nombre d'inconnus)

$$d = 3c - a - 2s$$

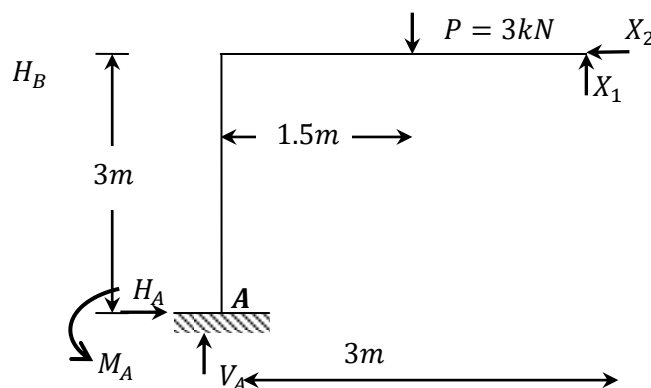
- c : le nombre de contours de la structure ($c = 1$)
 - a : le nombre d'appuis doubles ($a = 1$)
 - s : le nombre d'appuis simples ($s = 0$)
- $$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} d = 2$$

- On écrit le système d'équations canoniques :

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{10} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{20} = 0 \end{cases}$$

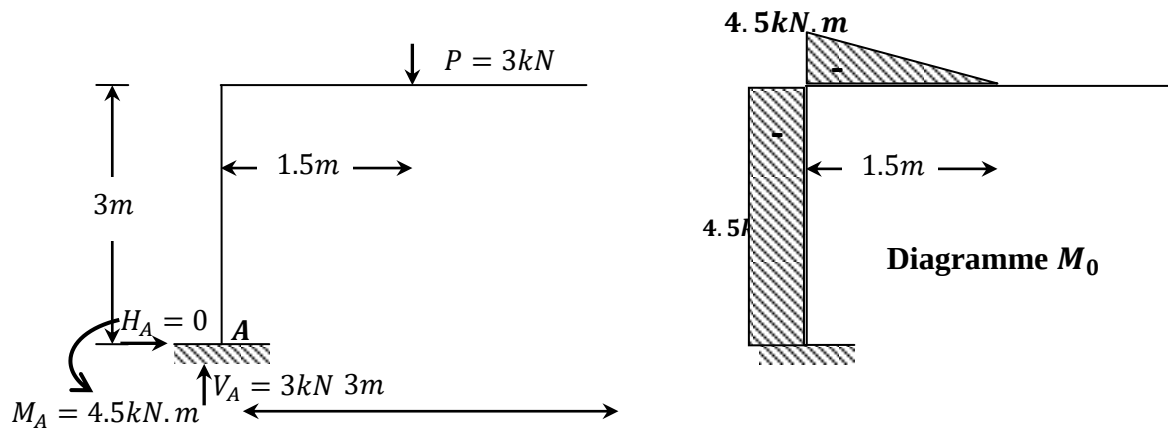
- Choix du système de base (fondamental)

La structure initiale (hyperstatique) est transformée en une structure isostatique soumise aux charges extérieures de départ ($P = 3kN$) et aux deux forces inconnues (X_1 et X_2) .

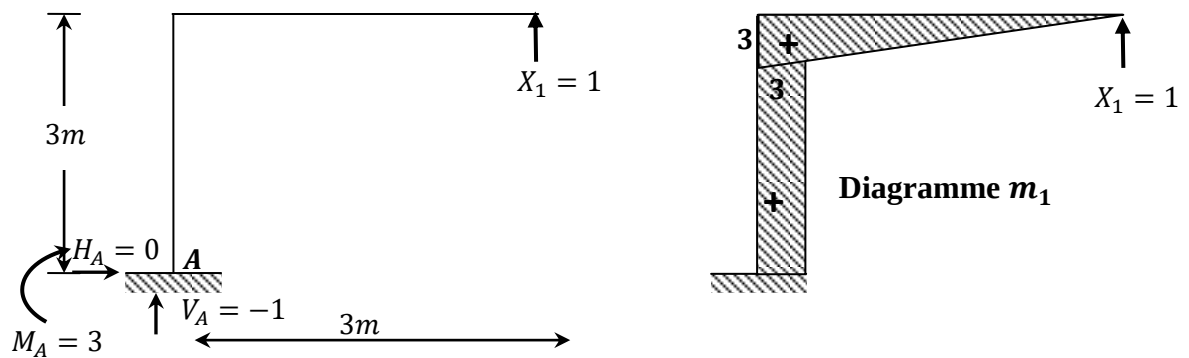


- On Trace les diagrammes unitaires (m_1 ; m_2) et celui des charges extérieures (M_0)

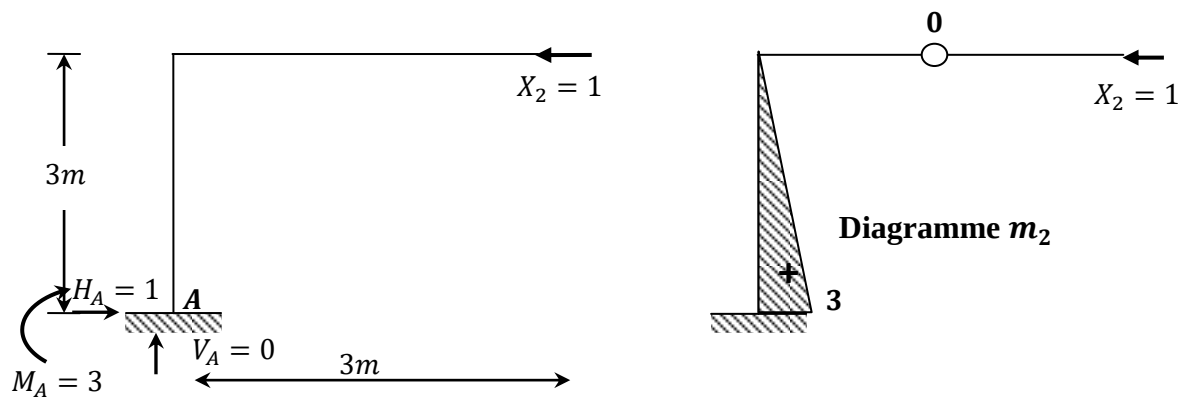
- **Etat 0 : Charges extérieures $\neq 0$ et $X_1 = X_2 = 0$**



- **Etat 1 : Charges extérieures = 0, $X_1 = 1$ et $X_2 = 0$**



- **Etat 2 : Charges extérieures = 0, $X_1 = 1$ et $X_2 = 0$**



- Calculer des déplacements δ_{ij} .

$$\delta_{ij} = \frac{1}{EI} \int_0^l m_i m_j dx \text{ (Méthode de VERETCHAGUINE)}$$

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{10} = 0$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{20} = 0$$

- Les coefficients δ_{11} et δ_{21} sont obtenus en appliquant au système de base la sollicitation unitaire $X_1 = 1$.
- Les coefficients δ_{12} et δ_{22} sont obtenus en appliquant au système de base la sollicitation unitaire $X_2 = 1$.
- Les coefficients δ_{10} et δ_{20} se calculent sous l'effet des charges extérieures (ici la force $P=3\text{kN}$) appliquées au système de isostatique de base.
- Les diagrammes (m_1 ; m_2 et M_0) serviront au calcul de ces coefficients.

On trouve,

$$\delta_{11} = \frac{36}{EI}, \quad \delta_{12} = \delta_{21} = \frac{13.5}{EI}, \quad \delta_{22} = \frac{9}{EI}$$

$$\delta_{10} = -\frac{48.94}{EI} \quad \text{et} \quad \delta_{20} = -\frac{20.25}{EI}$$

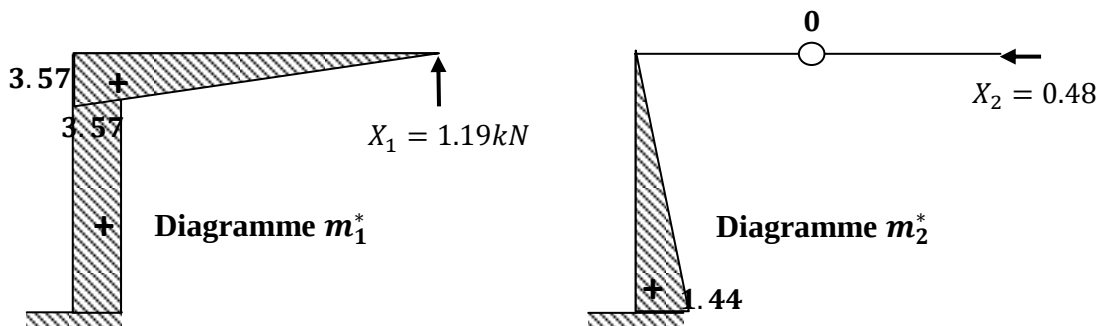
$$\begin{cases} \frac{36}{EI}X_1 + \frac{13.5}{EI}X_2 - \frac{48.94}{EI} = 0 \\ \frac{13.5}{EI}X_1 + \frac{9}{EI}X_2 - \frac{20.25}{EI} = 0 \end{cases}$$

A partir du système, on trouve :

$$\begin{cases} X_1 = 1.19\text{kN} \\ X_2 = 0.48\text{kN} \end{cases}$$

- Correction des épures unitaires

- Le diagramme corrigé $m_1^* = m_1X_1$
- Le diagramme corrigé $m_2^* = m_2X_2$



- Le diagramme final des moments fléchissants :

$$M_f = M_0 + m_1^* + m_2^*$$

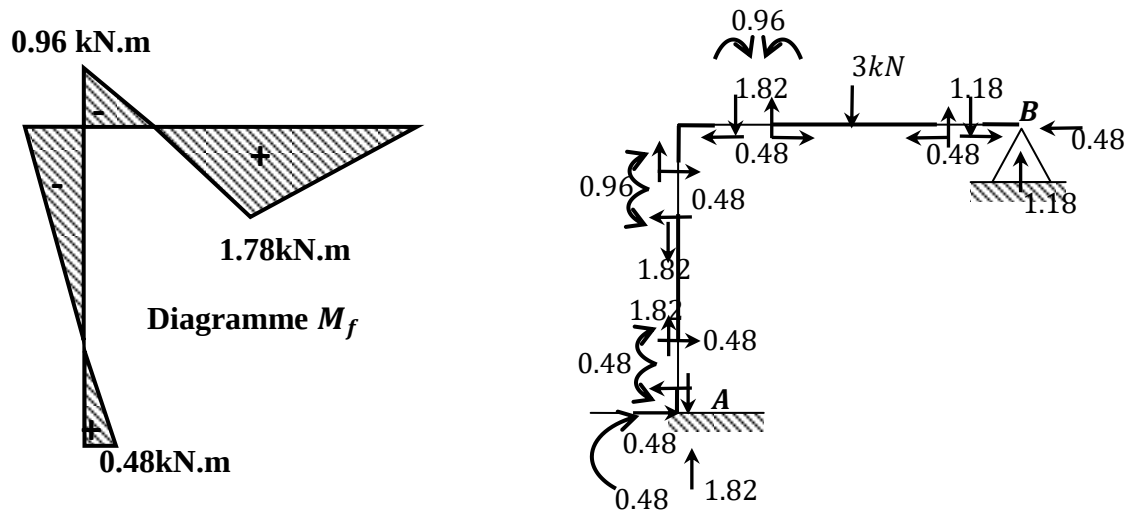


Diagramme de l'effort tranchant

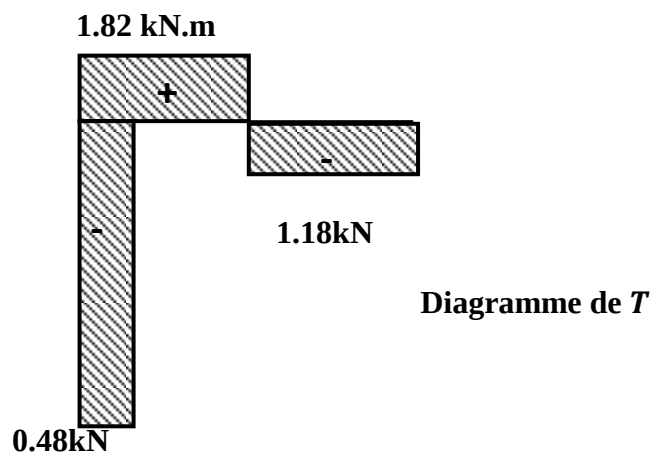
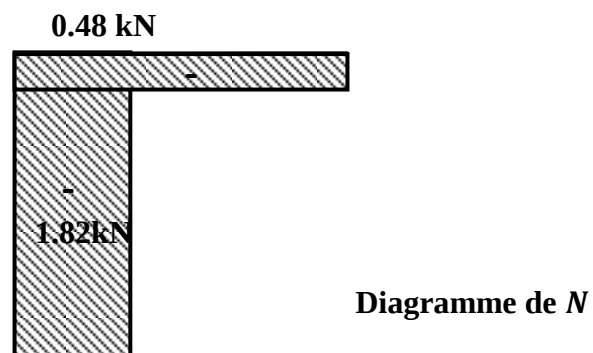


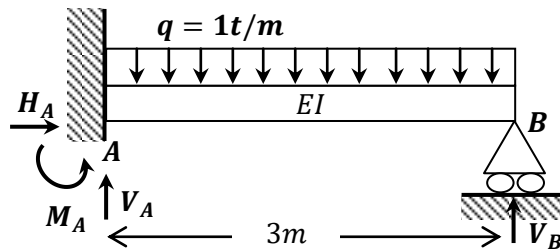
Diagramme de l'effort normal



3.10.2. Exercice N°3.2 :

On étudie la poutre représentée sur la figure suivante. Celle-ci est encastrée en A, repose sur un appui simple en B et soumise à une charge uniformément répartie sur toute la longueur de la poutre. La rigidité EI est constante.

On demande de tracer le diagramme des moments fléchissants.



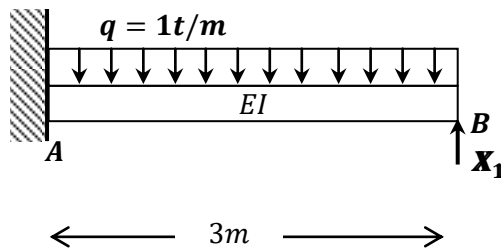
- On détermine le degré d'hyperstaticité d

$$d = 4(\text{liaisons}) - 3(\text{équations}) = 1$$

- On écrit le système d'équations canoniques :

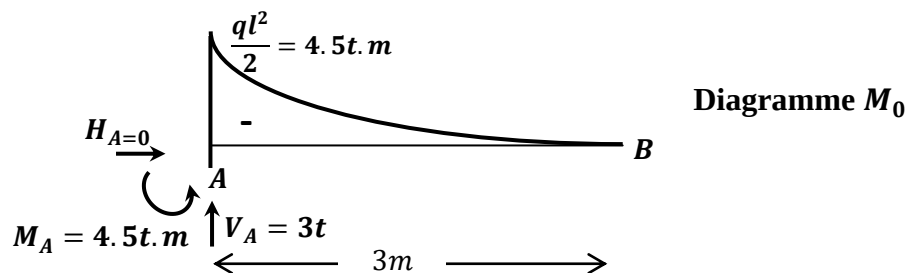
$$\delta_{11}X_1 + \delta_{10} = 0$$

- Choix du système de base (fondamental)

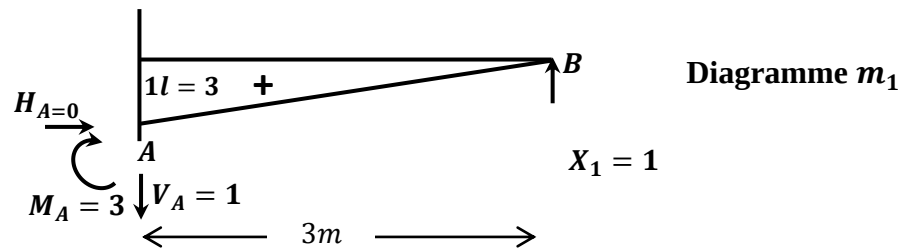


- On Trace l'épure unitaire (diagramme) (m_1) et celui des charges extérieures (M_0)

- Etat 0 : Charges extérieures $\neq 0$ et $X_1 = 0$



- Etat 1 : Charges extérieures = 0 et $X_1 = 1$



- Calculer les déplacements δ_{ij} .

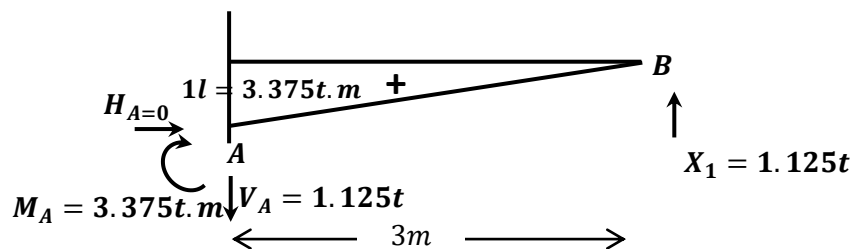
$$\delta_{11} = \frac{l^3}{3EI} = \frac{9}{EI}, \quad \delta_{10} = -\frac{ql^4}{8EI} = -\frac{10.125}{EI}$$

$$\frac{9}{EI}X_1 - \frac{10.125}{EI} = 0$$

A partir de cette équation, on tire : $X_1 = 1.125t$

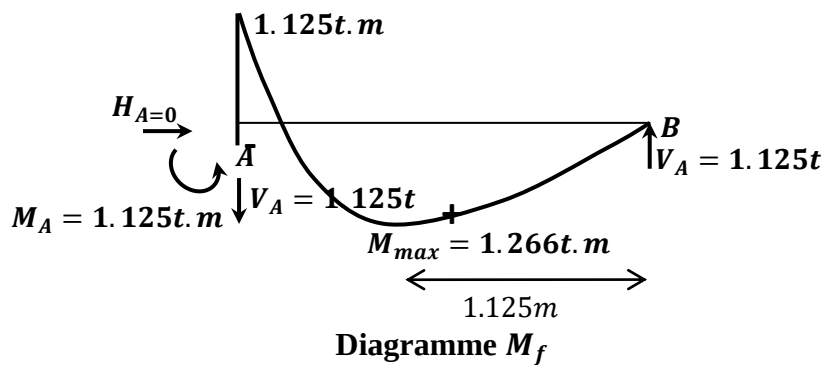
- Correction de l'épure unitaire :

Le diagramme corrigé $m_1^* = m_1 X_1$



- On Trace le diagramme final des moments fléchissants de l'état réel par superposition de l'épure unitaire m_1^* avec le diagramme M_0 .

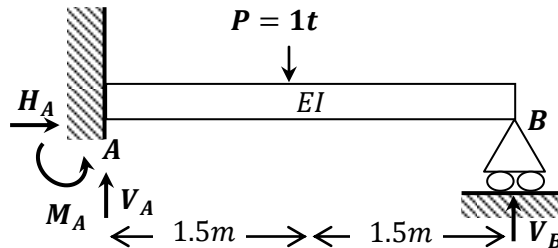
$$M_f = M_0 + m_1^*$$



3.10.3. Exercice N° 3.3 :

On étudie la poutre représentée sur la figure suivante. Celle-ci est encastrée en A, repose sur un appui simple en B, est soumise à une charge constante de 1t. EI est constante.

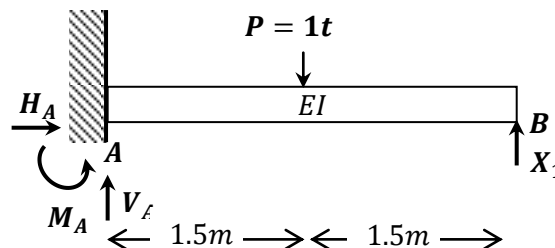
On demande de tracer le diagramme des moments fléchissants et de l'effort tranchant.



- On détermine le degré d'hyperstaticité d (le nombre d'inconnus)
 $d = 4(\text{liaisons}) - 3(\text{équations}) = 1$
- On écrit le système d'équations canoniques :

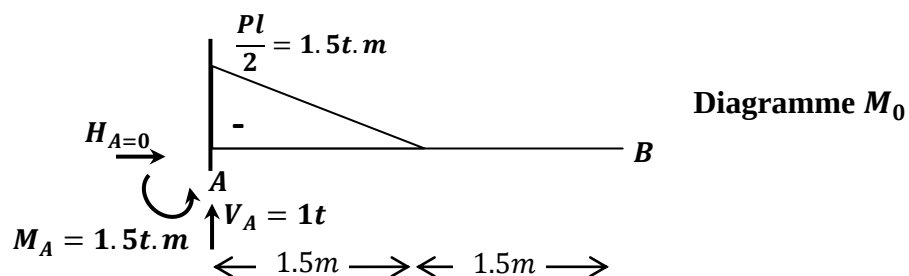
$$\delta_{11}^u X_1 + \delta_{10} = 0$$

- Choix du système de base (fondamental)

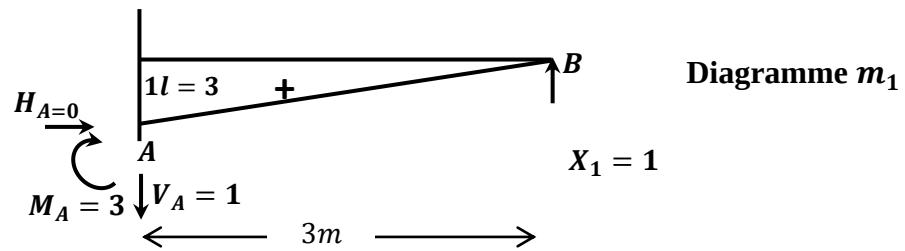


- On Trace le diagramme unitaire (m_1) et celui des charges extérieures (M_0)

- Etat 0 : Charges extérieures $\neq 0$ et $X_1 = 0$



- Etat 1 : Charges extérieures = 0 et $X_1 = 1$



- Calculer les déplacements δ_{ij} .

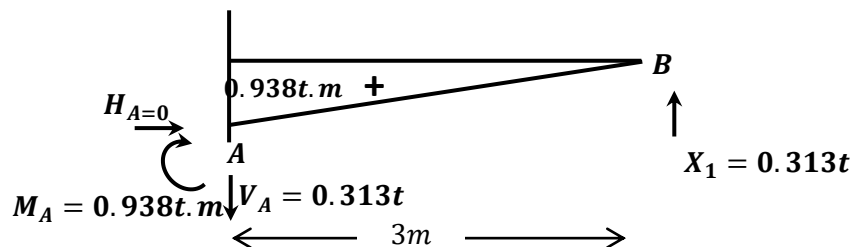
$$\delta_{11} = \frac{l^3}{3EI} = \frac{9}{EI}, \quad \delta_{10} = -\frac{5Pl^3}{48EI} = -\frac{2.813}{EI}$$

$$\frac{9}{EI} X_1 - \frac{2.813}{EI} = 0$$

A partir de cette équation, on tire : $X_1 = 0.313t$

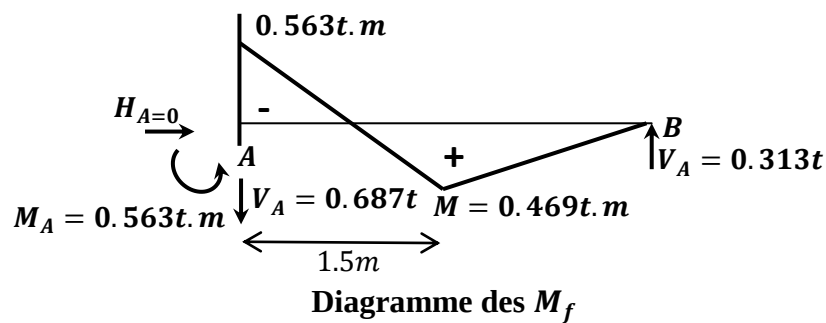
- Correction de diagramme unitaire :

Le diagramme corrigé $m_1^* = m_1 X_1$



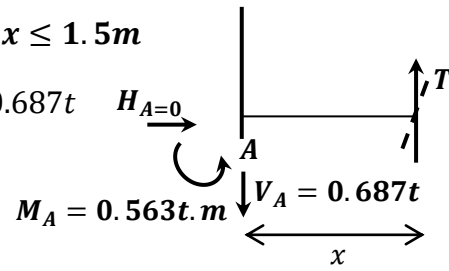
- On Trace le diagramme final des moments fléchissants :

$$M_f = M_0 + m_1^*$$



Section 1-1 $0 \leq x \leq 1.5m$

$$\sum F_V = 0 \Rightarrow T = 0.687t$$



Section 1-1 $1.5 \leq x \leq 3m$

$$\sum F_V = 0 \Rightarrow T = 0.687 - 1 = 0.313t$$

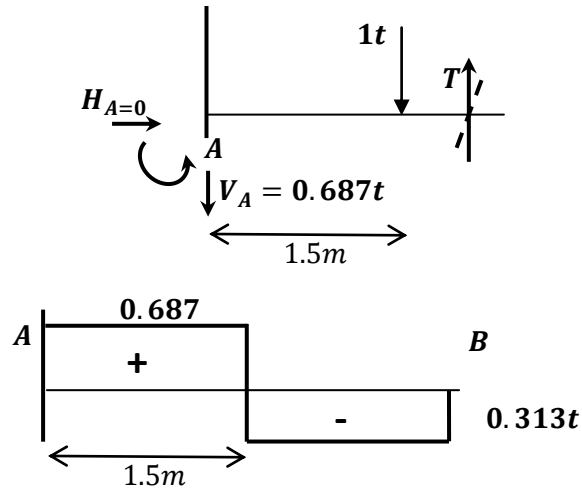
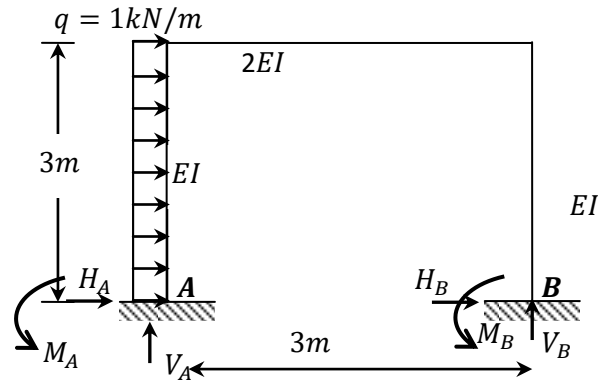


Diagramme de T

3.10.4. Exercice N°3.4 :

Un portique constitué de deux poteaux et une poutre. Tracer le diagramme des moments fléchissants.



- On détermine le degré d'hyperstaticité d
 $d = 3c - a - 2s = 3.1 - 0 - 2.0 = 3$

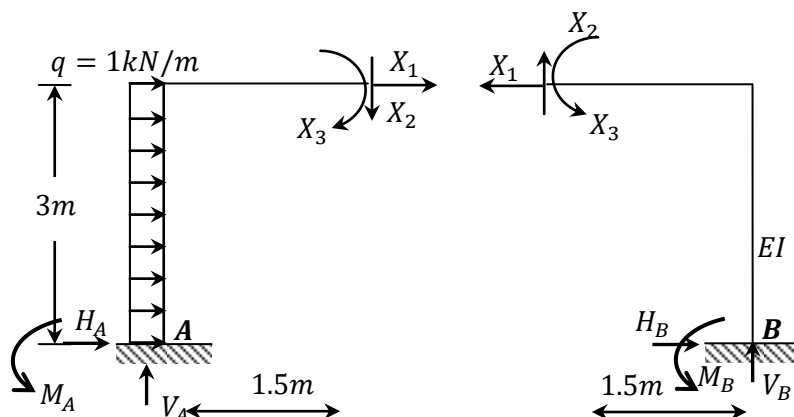
⇒ 3 inconnues hyperstatiques (X_1, X_2 et X_3)

- On écrit le système d'équations canoniques :

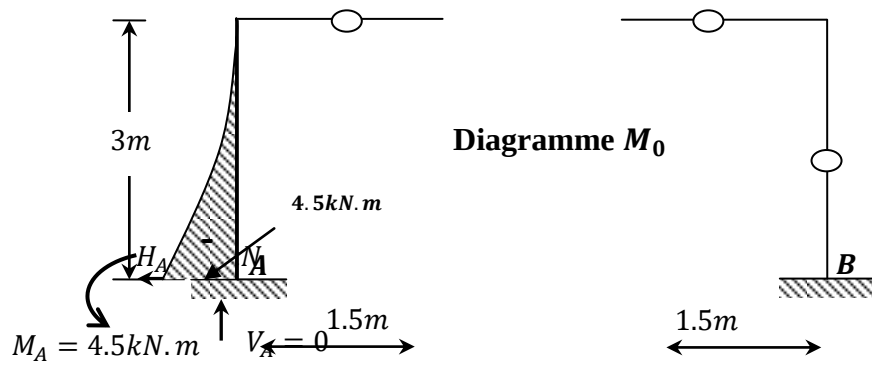
$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \delta_{10} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \delta_{20} = 0 \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \delta_{30} = 0 \end{cases}$$

- Choix du système de base (fondamental)

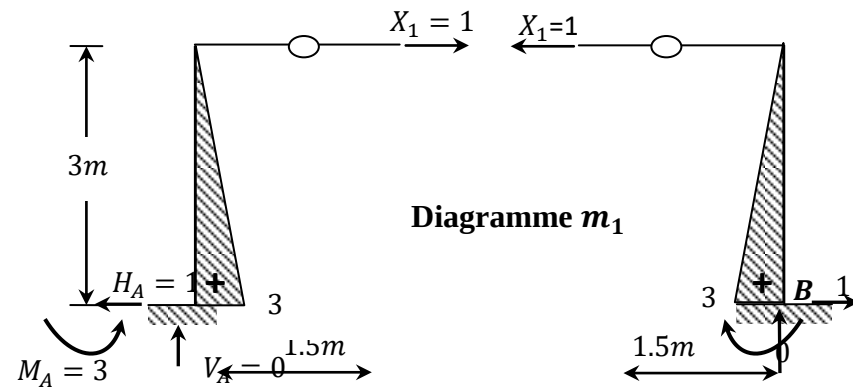
Les inconnus X_1, X_2 et X_3 représente les efforts internes au milieu de la poutre du cadre.



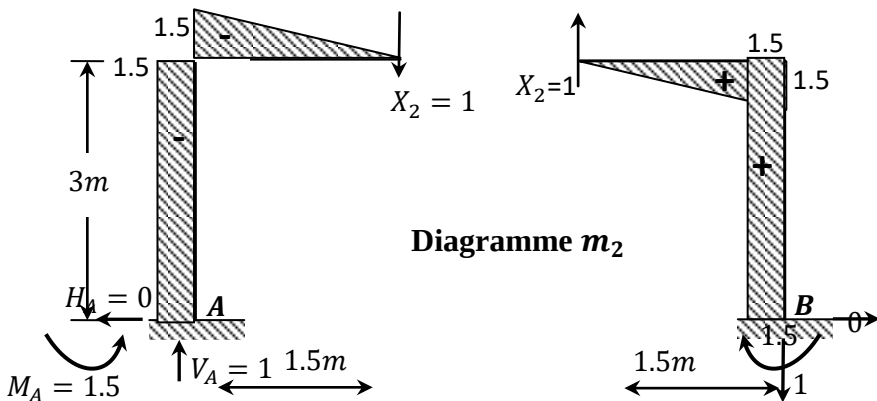
- On Trace les diagrammes unitaires ($m_1; m_2; m_3$) et celui des charges extérieures (M_0)
 - Etat 0 : Charges extérieures $\neq 0$ et $X_1 = X_2 = X_3 = 0$



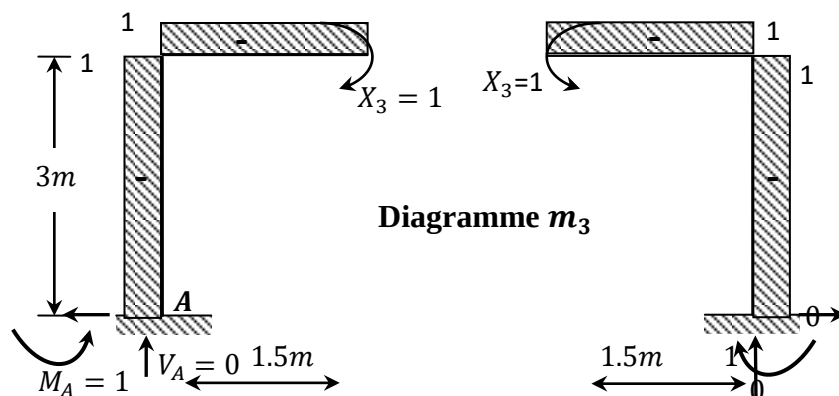
- Etat 1 : Charges extérieures = 0, $X_1 = 1$, $X_2 = 0$ et $X_3 = 0$



- Etat 2 : Charges extérieures = 0, $X_1 = 0$, $X_2 = 1$ et $X_3 = 0$



- Etat 3 : Charges extérieures = 0, $X_1 = 0$, $X_2 = 0$ et $X_3 = 1$



- Calculer les déplacements δ_{ij} .

$$\delta_{11} = \frac{18}{EI}, \quad \delta_{12} = \delta_{21} = \delta_{23} = \delta_{32} = 0, \quad \delta_{22} = \frac{14.63}{EI}$$

$$\delta_{13} = \delta_{31} = -\frac{9}{EI}, \quad \delta_{33} = \frac{7.5}{EI}$$

$$\delta_{10} = -\frac{10.13}{EI}, \quad \delta_{20} = \frac{6.75}{EI} \quad \text{et} \quad \delta_{30} = \frac{13.5}{EI}$$

- Le système d'équations canoniques :

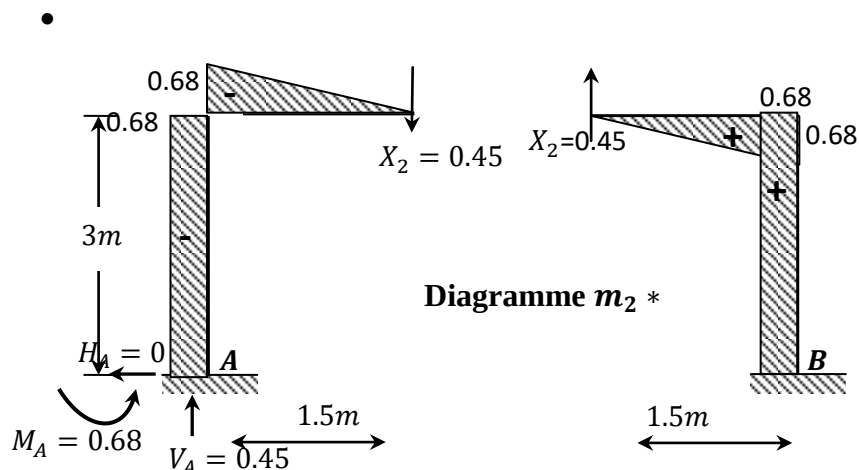
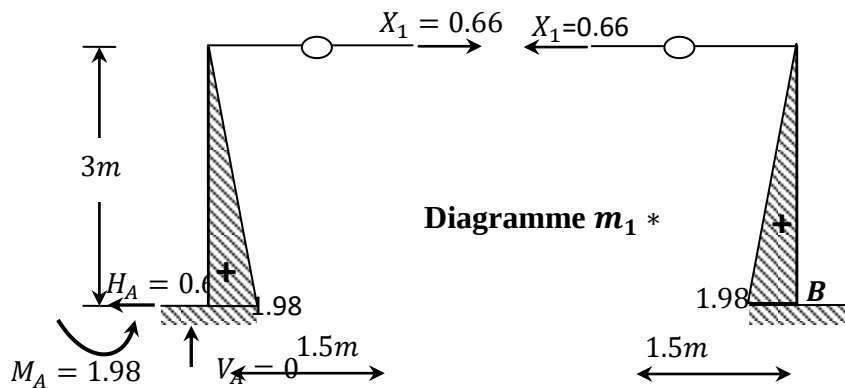
$$\begin{cases} \frac{18}{EI} X_1 + 0 \cdot X_2 + -\frac{9}{EI} X_3 - \frac{10.13}{EI} = 0 \\ 0 \cdot X_1 + \frac{14.63}{EI} X_2 + 0 \cdot X_3 + \frac{6.75}{EI} = 0 \\ -\frac{9}{EI} X_1 + 0 \cdot X_2 + \frac{7.5}{EI} X_3 + \frac{13.5}{EI} = 0 \end{cases}$$

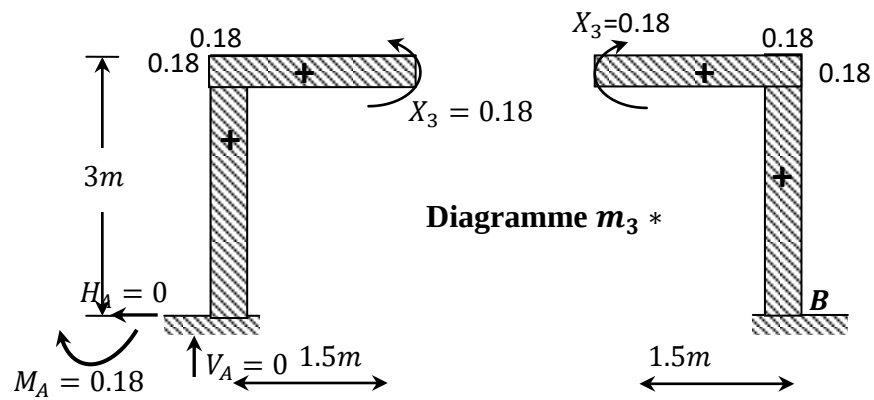
La résolution du système donne :

$$\begin{cases} X_1 = 0.66 \text{ kN} \\ X_2 = 0.45 \text{ kN} \\ X_3 = -0.18 \text{ kN.m} \end{cases}$$

- Correction des épures unitaires

- Le diagramme corrigé $m_1^* = m_1 X_1$
- Le diagramme corrigé $m_2^* = m_2 X_2$
- Le diagramme corrigé $m_3^* = m_3 X_3$





- Donc le diagramme final du système réel :

$$M_f = M_0 + m_1^* + m_2^* + m_3^*$$

