

# **CHAPITRE 3**

---

## **Méthode des forces**

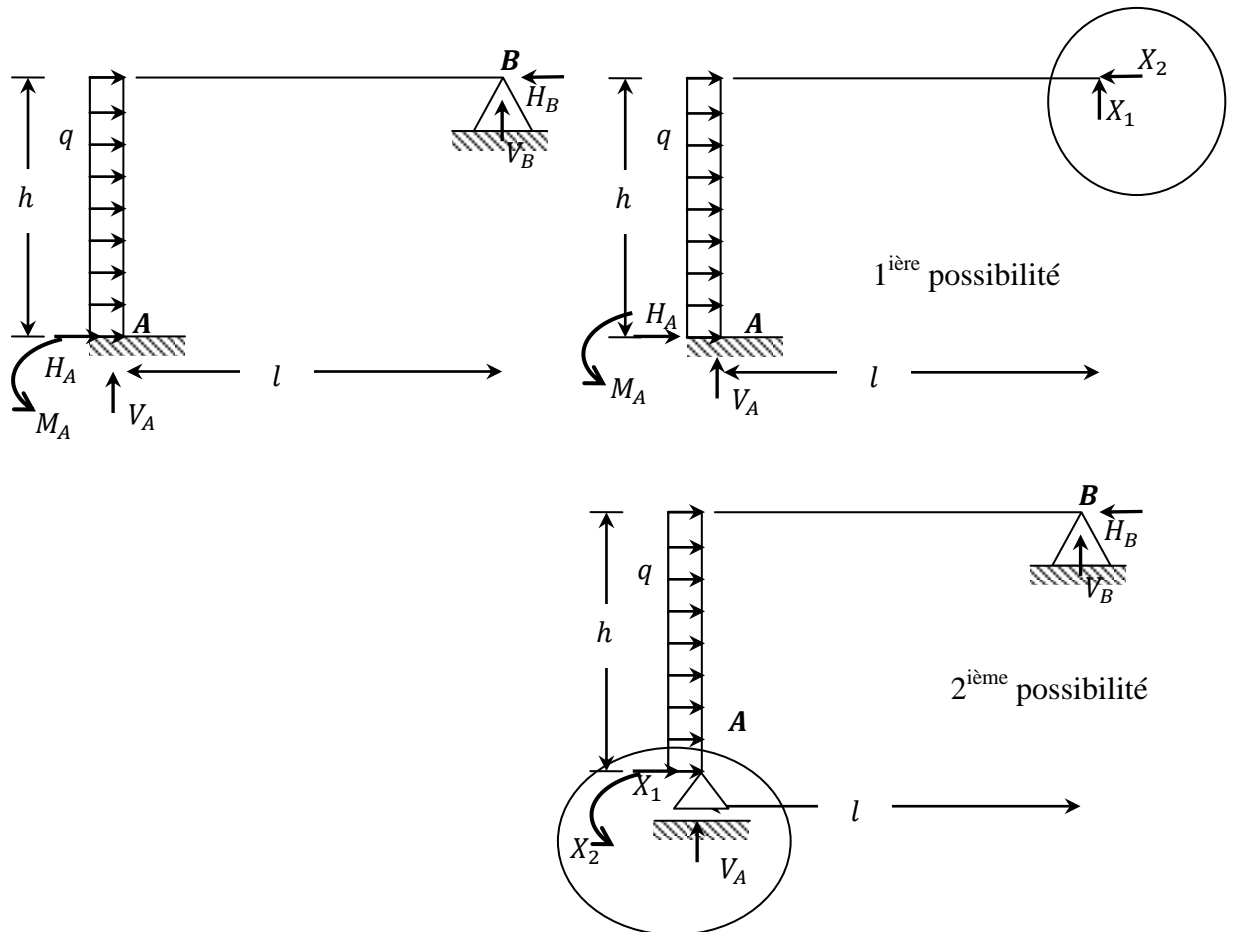
### 3.1. Méthode des forces

La méthode des forces s'applique aux structures hyperstatiques lorsque les liaisons sont rigides et parfaites. Elle est basée sur le choix d'un système de base qui permet d'identifier les réactions surabondantes et aussi le principe de superposition du système isostatique simple avec les charges réelles et des systèmes virtuels avec une charge unitaire.

### 3.2. Principe de la méthode des forces

Le principe de cette méthode consiste à remplacer la structure hyperstatique en une structure isostatique équivalente c'est-à-dire que les liaisons surabondantes sont remplacées par des réactions inconnues qu'il faut calculer.

Pour la même structure il y a plusieurs choix du système de base (Exemple, Figure 3.1).



**Figure 3.1. :** La structure initiale est transformée en une structure isostatique équivalente soumise aux charges extérieures et aux réactions choisies (les inconnues  $X_1$  et  $X_2$ ).

Le système isostatique obtenu par suppression des liaisons surabondantes est désigné par :

- Système de base,
- Système fondamental,
- Système principal.

La structure isostatique équivalente est soumise à deux catégories de forces :

- Forces extérieures de départ (les charges réparties, concentrées, ...).
- Réactions introduites (les inconnues hyperstatiques).

### 3.3. Degré d'hyperstaticité :

Le degré d'hyperstaticité  $d$  représente le nombre d'équations supplémentaires qu'il faut pour calculer toutes les réactions du système.

On peut calculer  $d$  à l'aide de la formule des contours :

$$d = 3c - a - 2s \quad (3.1)$$

### 3.4. Système de base :

Le système de base est le système isostatique obtenu par suppression des liaisons surabondantes dont les actions sont remplacées par des forces inconnues. D'une façon générale, pour une structure hyperstatique donnée, on peut choisir plusieurs systèmes isostatiques de base.

### 3.5. Différentes possibilités des systèmes de base

Différentes possibilités de systèmes de bases d'une même structure plane hyperstatique (Figure 3.2.) sont présentées.

$$d = 3c - 1a - 2s = 3.2 - 1.2 - 2.0 = 4$$

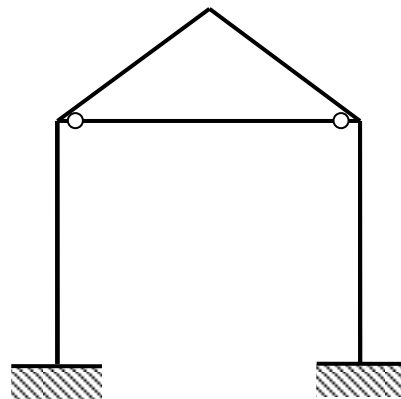


Figure 3.2. : Exemple de structure hyperstatique

#### 1<sup>ère</sup> possibilité :

- En effet, on peut rendre isostatique la structure de la Figure suivante en libérant totalement l'encastrement au pied du poteau gauche et en sectionnant le tirant (élément entre les 2 rotules) ; les inconnues hyperstatiques sont alors : le moment d'encastrement  $X_1$ , les réactions respectivement verticale  $X_2$  et horizontale  $x_3$  au pied du poteau gauche et l'effort normal  $X_4$  dans le tirant.

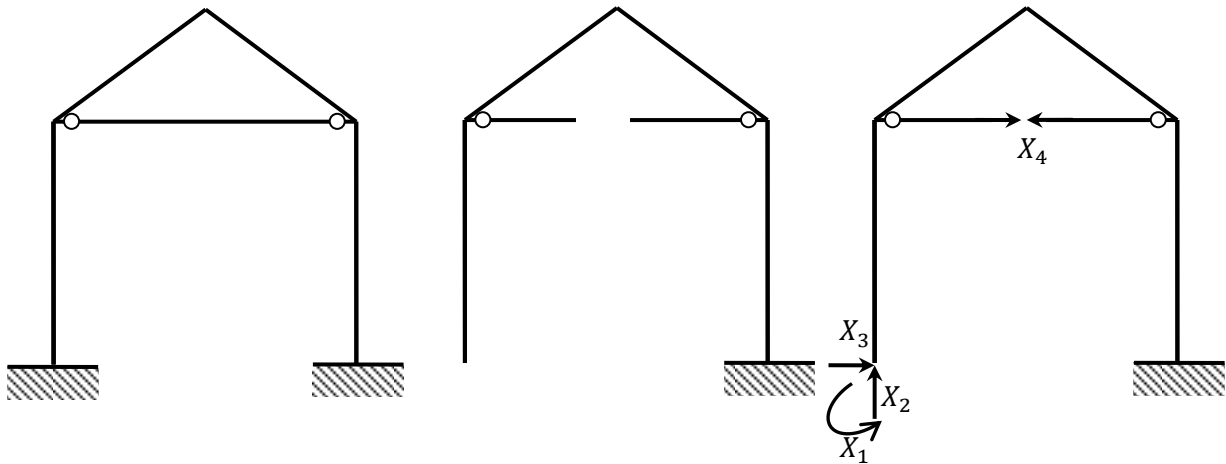


Figure 3.2.a : Type poutre sur appuis simple

2<sup>ème</sup> possibilité :

- Une deuxième manière est de libérer la rotation et la translation horizontale au niveau de l'encastrement gauche ( $X_1$  (moment) et  $X_3$ (réaction)), aussi de libérer la rotation au niveau de l'encastrement de droite  $X_2$  (moment) et enfin de sectionner le tirant pour faire apparaître l'inconnu  $X_4$  (l'effort normal).

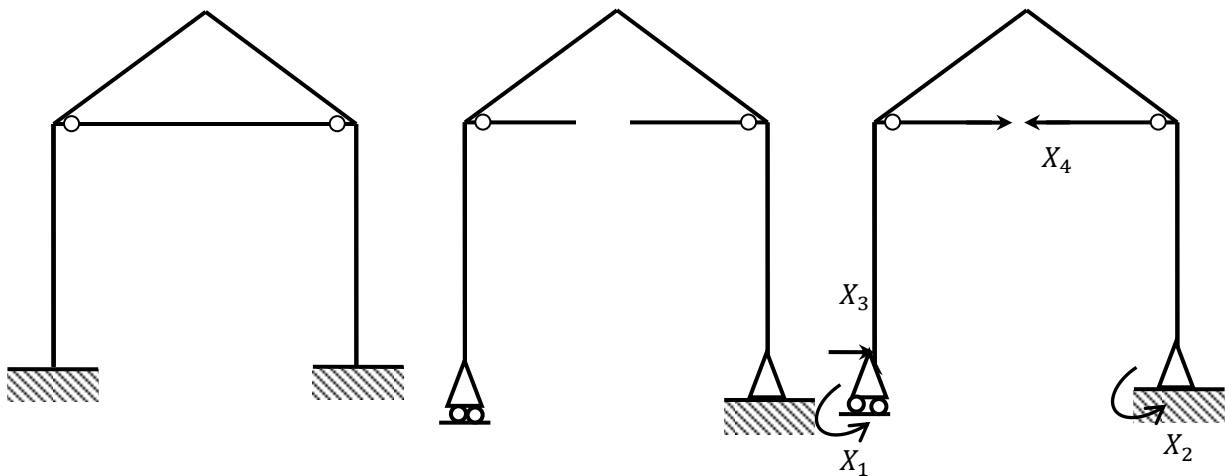


Figure 3.2.b : Type poutre cantilever

3<sup>ème</sup> possibilité :

- On pourrait aussi choisir les inconnues  $X_1, X_2$  et  $X_3$  respectivement le moment interne, l'effort normal et l'effort tranchant de l'élément indiqué sur la figure ci-dessous et toujours en gardant  $X_4$  comme inconnu (l'effort normal de tirant) (Figure 3.2.c).

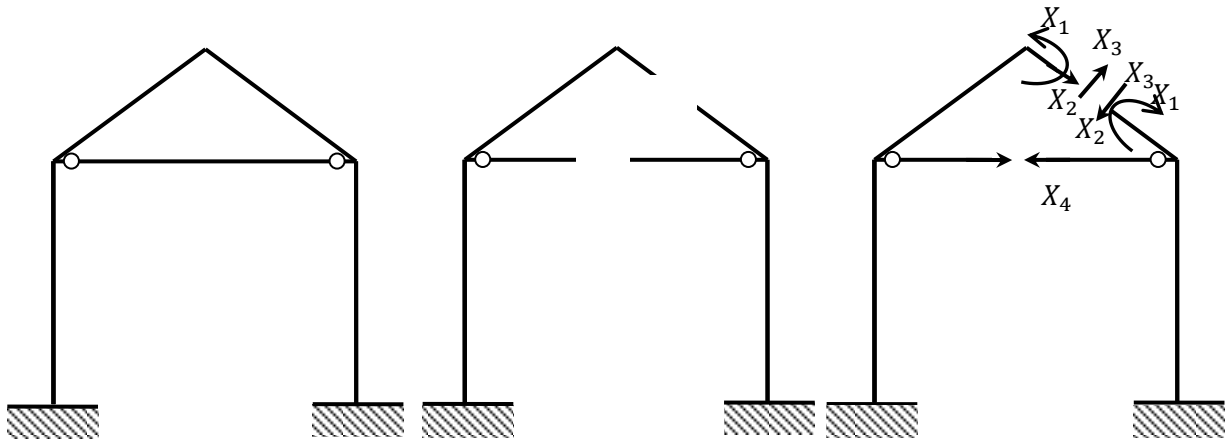
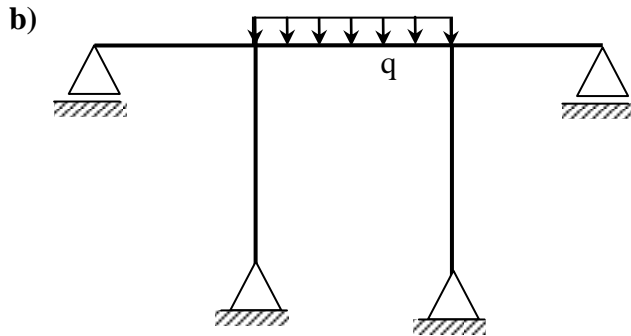
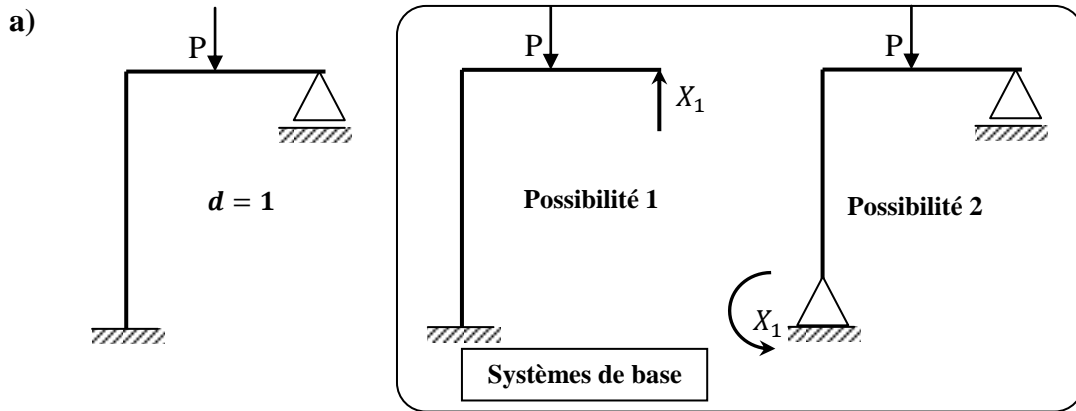


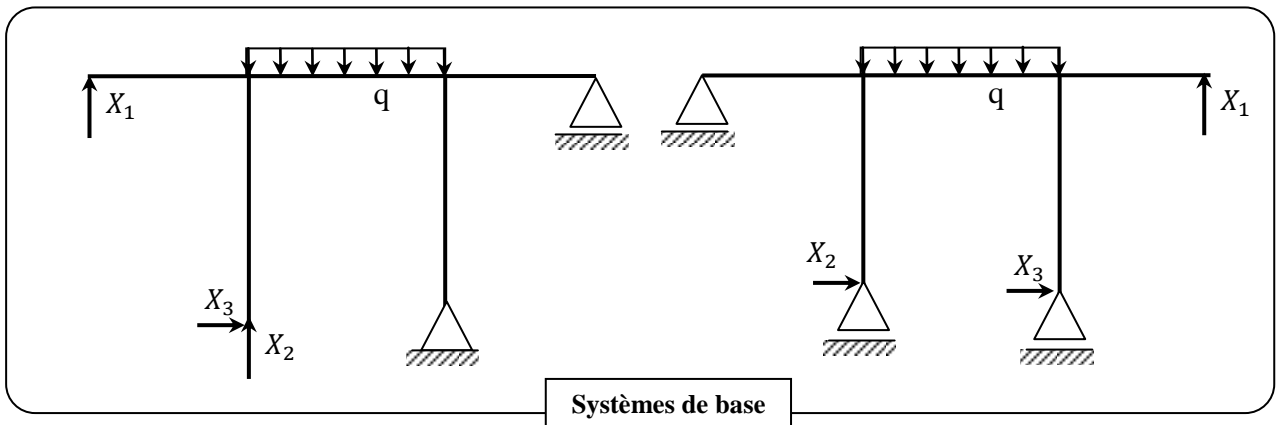
Figure 3.2.c : Type double poutre cantilever

### 3.6. Exemples :

Calculer le degré d'hyperstaticité et représenter les différents systèmes de base :



$$d = 3c - a - 2s = 3 * 3 - 2 - 2 * 2 = 3$$





$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_{ij} = \delta_{ji} = \frac{1}{EI} \int_0^l m_j m_i dx \\ \delta_{i0} = \frac{1}{EI} \int_0^l M_0 m_i dx \\ \delta_{ii} = \frac{1}{EI} \int_0^l m_i m_i dx \end{array} \right. \quad (3.4)$$

Notant que les expressions des moments  $m_i$  et  $m_j$  sont toujours linaires sauf pour les expressions de  $M_0$ . Nous pouvons calculer les coefficients de flexibilité  $\delta_{ij}$  à l'aide des expressions analytiques données ci-dessous, aussi par la méthode graphique de veretchaguine.

Les tableaux présentés ci-dessous permettent d'évaluer ces intégrales pour certaines cas de charges extérieures.

Tableau 3.1. : Valeur de  $\frac{1}{l} \int_0^l M_i m_j dx$

Remarque : Ne pas oublier de multiplier les résultats par  $\frac{l}{EI}$

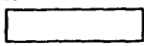
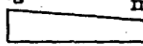
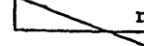
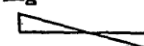


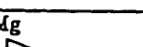
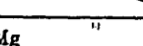
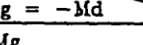
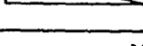
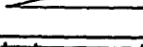
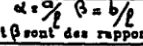
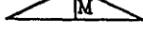
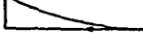
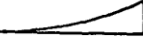
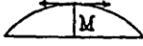
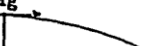
Introduire M et m avec leur SIGNE				
	M.m	$1/2 M(mg+md)$	$1/2 M(mg+md)$	0
	$1/2 m(Mg+Md)$	$1/6(2Mgmg+Mgmd+Mdmg+2Mdmd)$	$1/6(2Mgmg+Mgmd+Mdmg+2Mdmd)$	$1/6 mg(Mg-Md)$
	$1/2 m(Mg+Md)$	$1/6(2Mgmg+Mgmd+Mdmg+2Mdmd)$	$1/6(2Mgmg+Mgmd+Mdmg+2Mdmd)$	$1/6 mg(Mg-Md)$
 $Mg = -Md$	0	$1/6 Mg(mg-md)$	$1/6 Mg(mg-md)$	$1/3 Mgmg$
	$1/2 Mgm$	$1/6 Mg(2mg+md)$	$1/6 Mg(2mg+md)$	$1/6 Mgmg$
	$1/2 Mdm$	$1/6 Md(mg+2md)$	$1/6 Md(mg+2md)$	$-1/6 Mdmg$
 $\alpha = a/l, \beta = b/l$ <small><math>\alpha</math> et <math>\beta</math> sont des rapports</small>	$1/2 Mm$	$1/6 M[mg(1+\beta) + md(1+\alpha)]$	$1/6 M[mg(1+\beta) + md(1+\alpha)]$	$1/6 Mmg(1-2\alpha)$
	$1/2 Mm$	$1/4 M(mg+md)$	$1/4 M(mg+md)$	0
	$1/3 Mgm$	$1/12 Mg(3mg+md)$	$1/12 Mg(3mg+md)$	$1/6 Mgmg$
	$1/3 Mdm$	$1/12 Md(mg+3md)$	$1/12 Md(mg+3md)$	$1/6 Mdmd$
	$2/3 Mm$	$1/3 M(mg+md)$	$1/3 M(mg+md)$	0
	$2/3 Mgm$	$1/12 Mg(5mg+3md)$		$1/6 Mgmg$
	$2/3 Mdm$	$1/12 Md(3mg+5md)$		$-1/6 Mdmg$



Tableau 3.1. (suite): Valeur de  $\frac{1}{l} \int_0^l M_i m_j dx$

Remarque : Ne pas oublier de multiplier les résultats par  $\frac{l}{EI}$

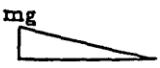
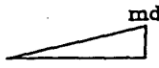
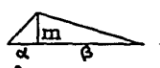

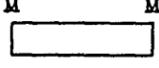
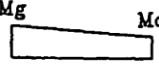
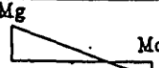

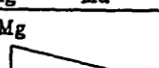
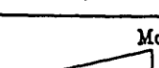
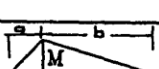
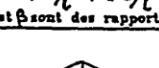
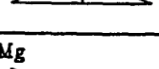
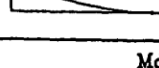
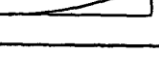
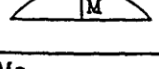
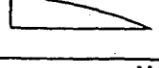
Introduire M et m avec leur SIGNE			 $\alpha$ et $\beta$ sont des rapports	
	$1/2 Mmg$	$1/2 Mmd$	$1/2 Mm$	$1/2 Mm$
	$1/6 mg(2Mg+Md)$	$1/6 md(Mg+2Md)$	$1/6 m[Mg(1+\beta) + Md((1+\alpha))]$	$1/4 m(Mg+Md)$
	$1/6 mg(2Mg+Md)$	$1/6 md(Mg+2Md)$	$1/6 m[Mg(1+\beta) + Md((1+\alpha))]$	$1/4 m(Mg+Md)$
 $Mg = -Md$	$1/6 Mgm$	$-1/6 Mgm$	$1/6 Mgm(1-2\alpha)$	0
	$1/3 Mgm$	$1/6 Mgm$	$1/6 Mgm(1+\beta)$	$1/4 Mgm$
	$1/6 Mdm$	$1/3 Mdm$	$1/6 Mdm(1+\alpha)$	$1/4 Mdm$
 $\alpha = a/l$ $\beta = b/l$ $\alpha$ et $\beta$ sont des rapports	$1/6 Mmg(1+\beta)$	$1/6 Mmd(1+\alpha)$	$1/3 Mm$	$1/12 Mm(3-4\alpha^2)/\beta$ valable pour $\alpha < \beta$
	$1/4 Mmg$	$1/4 Mmd$	$1/12 Mm(3-4\alpha^2)/\beta$ valable pour $\alpha < \beta$	$1/3 Mm$
	$1/4 Mgm$	$1/12 Mdm$	$1/12 Mdm(1+\beta+\beta^2)$	$7/48 Mgm$
	$1/12 Mdm$	$1/4 Mdm$	$1/12 Mdm(1+\alpha+\alpha^2)$	$7/48 Mdm$
	$1/3 Mmg$	$1/3 Mmd$	$1/3 Mm(1+\alpha\beta)$	$5/12 Mm$
	$5/12 Mgm$	$1/4 Mgm$	$1/12 Mgm(5-\alpha-\alpha^2)$	$17/48 Mgm$
	$1/4 Mdm$	$5/12 Mdm$	$1/12 Mdm(5-\beta-\beta^2)$	$17/12 Mdm$

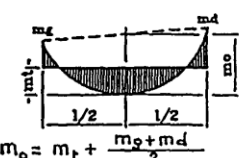
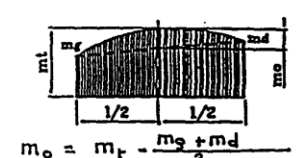
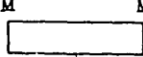
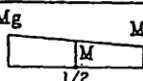
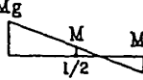
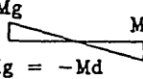
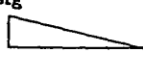
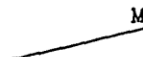
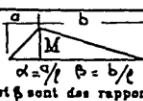

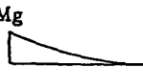

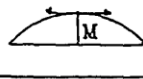
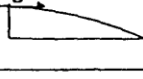
Tableau 3.1. (suite) : Valeur de  $\frac{1}{l} \int_0^l M_i m_j dx$

Remarque : Ne pas oublier de multiplier les résultats par  $\frac{l}{EI}$

Introduire M et m avec leur SIGNE					
	$1/3 Mmg$	$1/3 Mmd$	$2/3 Mm$	$2/3 Mmg$	$2/3 Mmd$
	$1/12 mg(3Mg+Md)$	$1/12 md(3Md+Mg)$	$1/3 m(Mg+Md)$	$1/12 mg(5Mg+3Md)$	$1/12 md(3Mg+5Md)$
	$1/12 mg(3Mg+Md)$	$1/12 md(3Md+Mg)$	$1/3 m(Mg+Md)$	$1/12 mg(5Mg+3Md)$	$1/12 md(3Mg+5Md)$
	$1/6 Mgm$	$1/6 Mdmd$	0	$1/6 Mgm$	$1/6 Mdmd$
	$1/4 Mgm$	$1/12 Mgmd$	$1/3 Mgm$	$5/12 Mgm$	$1/4 Mgmd$
	$1/12 Mdm$	$1/4 Mdmd$	$1/3 Mdm$	$1/4 Mdm$	$5/12 Mdmd$
	$1/12 Mmg(1+\beta+\beta^2)$	$1/12 Mmd(1+\alpha+\alpha^2)$	$1/3 Mm(1+\alpha\beta)$	$1/12 Mmg(5-\alpha-\alpha^2)$	$1/12 Mmd(5-\beta-\beta^2)$
	$7/48 Mmg$	$7/48 Mmd$	$5/12 Mm$	$17/48 Mmg$	$17/48 Mmd$
	$1/5 Mgm$	$1/30 Mgmd$	$1/5 Mgm$	$3/10 Mgm$	$2/15 Mgmd$
	$1/30 Mdm$	$1/5 Mdmd$	$1/5 Mdm$	$2/15 Mdm$	$3/10 Mdmd$
	$1/5 Mmg$	$1/5 Mmd$	$8/15 Mm$	$7/15 Mmg$	$7/15 Mmd$
	$3/10 Mgm$	$2/15 Mgmd$	$7/15 Mgm$	$8/15 Mgm$	$11/30 Mgmd$
	$2/15 Mdm$	$3/10 Mdmd$	$7/15 Mdm$	$11/30 Mdm$	$8/15 Mdmd$

Tableau 3.1. (suite) : Valeur de  $\frac{1}{l} \int_0^l M_i m_j dx$

Remarque : Ne pas oublier de multiplier les résultats par  $\frac{l}{EI}$

Introduire M et m avec leur SIGNE	$\frac{1}{l} \int M^2 dx$	  $m_o = m_t + \frac{m_d + m_t}{2}$ $m_o = m_t - \frac{m_d + m_t}{2}$
	$M^2$	$\frac{1}{6} M(mg + 4mt + md)$
	$\frac{1}{3}(Mg^2 + MgMd + Md^2)$	$\frac{1}{6} (Mgmg + 4Mmt + Mdmd)$
	$\frac{1}{3}(Mg^2 + MgMd + Md^2)$	$\frac{1}{6} (Mgmg + 4Mmt + Mdmd)$
 $Mg = -Md$	$\frac{1}{3} Mg^2$	$\frac{1}{6} Mg(mg - md)$
	$\frac{1}{3} Mg^2$	$\frac{1}{6} Mg(mg + 2mt)$
	$\frac{1}{3} Md^2$	$\frac{1}{6} Md(2mt + md)$
 $\alpha = a/l$ $\beta = b/l$ <small>a et b sont des rapports</small>	$\frac{1}{3} M^2$	$\frac{M}{6} \left[ -2m_o(1 + \alpha + \alpha^2) + (m_o - m_g + m_d)(1 + \alpha) + 3m_g \right]$
	$\frac{1}{3} M^2$	$\frac{1}{24} M(mg + 10mt + md)$
	$\frac{1}{5} Mg^2$	$\frac{1}{60} Mg[5(3mg + md) + 12m_o]$
	$\frac{1}{5} Md^2$	$\frac{1}{60} Md[5(mg + 3md) + 12m_o]$
	$\frac{8}{15} M^2$	$\frac{1}{15} M[5(mg + md) + 8m_o]$
	$\frac{8}{15} Mg^2$	ou $\frac{1}{60} Mg[5(5mg + 3md) + 28m_o]$ $\frac{1}{60} Mg(11mg + md + 28mt)$

### 3.9. La procédure de la méthode des forces :

Les différentes étapes de calcul par la méthode des forces sont les suivantes :

- Déterminer le degré d'hyperstaticité  $d = n$
- Ecrire les  $n$  équations canoniques.
- Choisir le système de base (système isostatique le plus simple)
- Tracer le diagramme des moments fléchissants  $M_0$  du système isostatique due aux charges extérieures ( $X_1 = X_2 = \dots = X_n = 0$ )
- Tracer les diagrammes ou épures unitaires  $m_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) correspondant au système isostatique sans charges extérieures et avec  $X_i=1$  et les autres inconnus nuls.
- On calcul tous les coefficients  $\delta_{ij}$  et  $\delta_{i0}$  à l'aide des diagrammes.
- Résolution du système d'équations canoniques

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \delta_{1n}X_n + \delta_{10} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \dots + \delta_{2n}X_n + \delta_{20} = 0 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \dots + \delta_{nn}X_n + \delta_{n0} = 0 \end{array} \right.$$

- Correction des épures unitaires  $m_i^* = m_i X_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ).  
 $m_1^* = m_1 X_1$  ;  $m_2^* = m_2 X_2$  ;  $\dots$  ;  $m_n^* = m_n X_n$
- On fait la somme des épures unitaires corrigées  $\sum m_i^* = m_1^* + m_2^* + \dots + m_n^*$
- En dernier, on obtient le diagramme des moments fléchissants final du système hyperstatique réel en faisant la somme des moments suivants  
 $M_{final} = M_0 + \sum m_i^*$