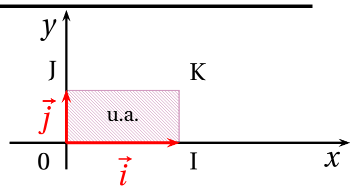
1. Intégrale et aire

1.1. Unité d'aire

Soit $(O; \vec{i}; \vec{j})$ un repère orthogonal du plan.
L'unité d'aire, notée u.a, est l'aire du rectangle unitaire OIJK avec $I(0;1)$, $J(0;1)$ et $K(1;1)$.

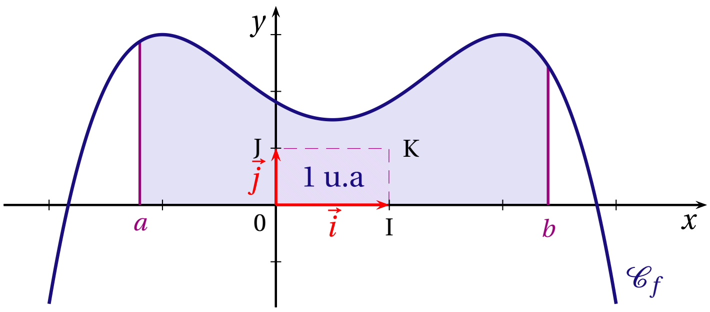


1.2. Intégrale d'une fonction continue et positive

Définition 1 :

Soit f une fonction définie, continue et positive sur un intervalle $[a;b]$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
L'intégrale de f entre a et b est l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine $\mathscr{D}_f$ compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$

Ce nombre est noté : $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$



Remarque :

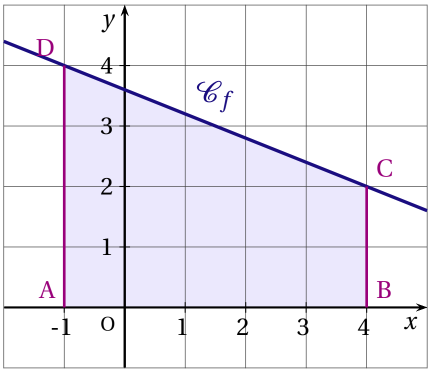
- $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ se lit « intégrale de a à b de $f(x)\mathrm{d}x$ ».
- Les réels a et b sont appelés les bornes de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.
- La variable x est dite « muette », elle n'intervient pas dans le résultat. C'est à dire qu'on peut la remplacer par n'importe quelle autre variable distincte des lettres a et b : $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\mathrm{d}u$
- $\displaystyle\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$, car le domaine $\mathscr{D}_f$ est alors réduit à un segment.

Exemple :

Calculons $\displaystyle\int_{-1}^{4} (-0,4x+3,6)\,\mathrm{d}x$.

La fonction affine f définie pour tout réel x par $f(x) = -0,4x+3,6$ est continue et positive sur l'intervalle $[-1;4]$

L'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{4} (-0,4x+3,6)\,\mathrm{d}x$ est égale à l'aire du trapèze ABCD.

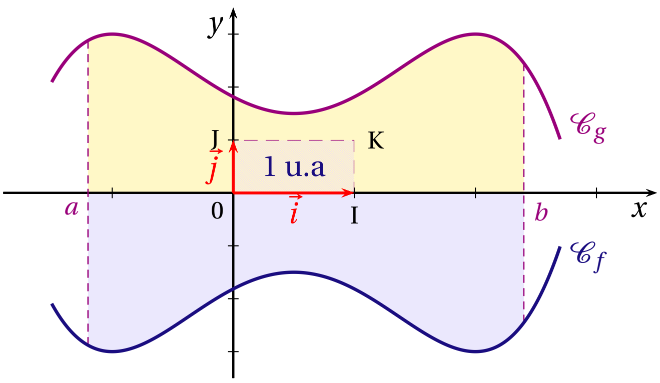


$$\begin{aligned}\int_{-1}^{4} (-0,4x+3,6)\,\mathrm{d}x &= \frac{(\mathrm{AD}+\mathrm{BC})\times \mathrm{AB}}{2}\\ &= \frac{(4+2)\times 5}{2}\\ &= 15\end{aligned}$$

1.3. Intégrale d'une fonction continue et négative

Si f est une fonction continue et négative sur un intervalle $[a;b]$ alors, la fonction g définie sur l'intervalle $[a;b]$ par $g=-f$ est une fonction continue et positive sur cet intervalle.

Par symétrie par rapport à l'axe des abscisses, l'aire du domaine $\mathscr{D}_f$ compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ est égale à l'aire du domaine $\mathscr{D}_g$ compris entre la courbe $\mathscr{C}_g$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$.



Définition 2 :

Soit f une fonction définie, continue et négative sur un intervalle $[a;b]$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(\mathrm{O};\vec{i};\vec{j})$.
L'intégrale de la fonction f entre a et b est égale à l'opposé de l'aire $\mathscr{A}$, exprimée en unités d'aire, du domaine $\mathscr{D}_f$ compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\mathscr{A}$$

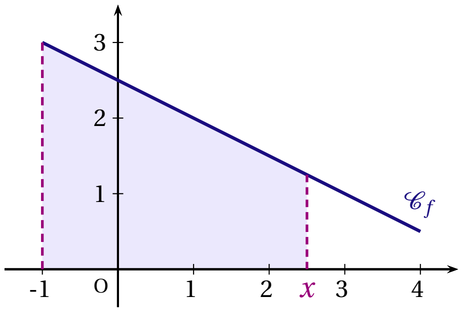
1.4. Lien entre intégrale et dérivée

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$. On peut définir une nouvelle fonction F qui à tout réel x de l'intervalle $[a;b]$, associe l'intégrale de f entre a et x : $\mathrm{F}(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$

Théorème 1 :

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$.
La fonction F définie sur $[a;b]$ par $\mathrm{F}(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur $[a;b]$ et a pour dérivée f.

Exemple :
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-1;4]$ par $f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$. Si x est un réel de l'intervalle $[-1;4]$, la fonction F définie par $\mathrm{F}(x) = \int_{-1}^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est égale à l'aire du trapèze colorié. On a donc $\mathrm{F}(x) = \frac{(3+(-0,5x+2,5)) \times (x+1)}{2} = -\frac{x^2}{4} + \frac{5x}{2} + \frac{11}{4}$. La fonction F est dérivable sur $[-1;4]$ et $\mathrm{F}'(x) = -\frac{x}{2} + \frac{5}{2} = f(x)$.



2. Primitives

2.1. Définition

Définition 3 :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que F est une **primitive de la fonction f sur I** si F est dérivable et si :

$$\forall x \in \mathrm{I}, \qquad \mathrm{F}'(x) = f(x).$$

Exemple :

- $\mathrm{F} : x \mapsto x^3 + 3x^2 - 1$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $f : x \mapsto 3x^2 + 6x$.
  En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{F}'(x) = 3x^3 + 6x = f(x)$
- $\mathrm{G} : x \mapsto 2\sqrt{x}$ est une primitive sur$\mathbb{R}$ de $g : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$.
  En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{G}'(x) = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} = g(x)$
- Les fonctions $\mathrm{F} : x \mapsto x^2$, $\mathrm{G} : x \mapsto x^2 + 1$, mais aussi $\mathrm{H} = x \mapsto x^2 + \mathrm{K}$, $\mathrm{K} \in \mathbb{R}$ sont des primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto 2x$.
  En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{F}'(x) = \mathrm{G}'(x) = \mathrm{H}'(x) = 2x = f(x)$.

Remarque :

- Comme F est dérivable sur I, la fonction F est en particulier continue sur I.

- Il n'y a pas unicité de la primitive d'une fonction donnée f. C'est pourquoi on parle **d'une** primitive de la fonction f et non de **la** primitive de la fonction f.

Théorème 2 :

- Toute fonction continue sur un intervalle I admet au moins une primitive sur I.
- Si F est une primitive de f sur I, alors toute autre primitive de f sur I est la forme $F + c$ où c est une constante.
- Il existe une et une seule primitive de f sur I qui prend une valeur donnée en un point donné :
  Si $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique primitive F_0 de f sur I telle que $F_0(x_0) = y_0$.

Exemple : La fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = x^2 - 1$ est une primitive de $f : x \mapsto 2x$ vérifiant $F(1) = 0$.
En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = 2x = f(x)$ et $F(1) = 1^2 - 1 = 0$.

2.2. Calculs de primitives

Les opérations sur les fonctions dérivables et la définition d'une primitive conduisent aux résultats suivants :

- Si F et G sont des primitives des fonctions f et g sur un intervalle I, alors $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I.
- Si F est une primitives de la fonction f sur un intervalle I et k un réel, alors kF est une primitive de kf sur I.

2.2.1 Primitives des fonctions usuelles

f est définie sur I par ...	une primitive F est donnée par	validité
$f(x) = a$ (a est un réel)	$F(x) = ax$	sur $\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ (n est un entier naturel)	$F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	sur $\mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	*prochain cours*	sur $]0; +\infty[$
$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$	$F(x) = -\dfrac{1}{x}$	sur $]-\infty; 0[$ ou sur $]0; +\infty[$
$f(x) = \dfrac{1}{x^n}$ (n entier, $n > 1$)	$F(x) = -\dfrac{1}{(n-1)x^{n-1}}$	sur $]-\infty; 0[$ ou sur $]0; +\infty[$
$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x}$	sur $]0; +\infty[$

Exemple : Calculer les primitives des fonctions suivantes :

1. $f(x)=3x^2$
   $F(x)=3\times\frac{1}{3}x^3+C=x^3+C$

2. $f(x)=x+\frac{3}{2}$
   $F(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+C$

3. $f(x)=(2x+1)(x-3)$
   Tout d'abord, développons $f(x)=(2x+1)(x-3)=2x^2-6x+x-3=2x^2-5x+3$. Ainsi, une primitive est donnée par $F(x)=2\times\frac{1}{3}x^3-5\times\frac{1}{2}x^2+3x+C=\frac{2}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+3x+C$

4. $f(x)=\frac{1}{x^2}$
   $F(x)=-\frac{1}{x}+C$

5. $f(x)=x^2+3x+\frac{1}{x^2}$
   $F(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{x}+C$

6. $f(x)=\frac{1}{x^5}$
   $F(x)=-\frac{1}{4x^4}+C$

7. $f(x)=x+2+\frac{1}{\sqrt{x}}$
   $F(x)=\frac{1}{2}x^2+2x+2\sqrt{x}+C$

8. $f(x)=\frac{6x^2-8x+2}{5}$
   $F(x)=\frac{2x^3-4x^2+2x}{5}+C$

9. $f(x)=-\frac{6}{x^4}$
   $F(x)=-\frac{6}{3x^3}=-\frac{2}{x^3}+C$

2.2.2 Primitive des fonctions composées usuelles

u est une fonction dérivable sur un intervalle I.

conditions	fonction f	une primitive F est donnée par
n entier, $n>0$	$f=u'u^n$	$F=\frac{u^{n+1}}{n+1}$
u ne s'annule pas sur I	$f=\frac{u'}{u^2}$	$F=-\frac{1}{u}$
u ne s'annule pas sur I n entier, $n>1$	$f=\frac{u'}{u^n}$	$F=-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}$
u strictement positive sur I	$f=\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$F=2\sqrt{u}$

Exemple : Calculer des primitives des fonctions suivantes :

1. $f(x)=(2x+1)^2$
   f semble être de la forme $u'u^2$ avec $u(x)=2x+1$. On a $u'(x)=2$ donc
   $$u'(x)u(x)^2=2(2x+1)^2=2f(x)$$
   Donc, une primitive de f est donnée par
   $$F(x)=\frac{1}{2}\times\frac{u^3}{3}=\frac{1}{6}(2x+1)^3$$

2. $f(x)=\frac{1}{(x+1)^2}$
   f semble être de la forme $\frac{u'}{u^2}$ avec $u(x)=x+1$. On a $u'(x)=1$ donc
   $$\frac{u'(x)}{u(x)^2}=\frac{1}{(x+1)^2}=f(x)$$

Donc, une primitive de f est donnée par

$$F(x) = -\frac{1}{u(x)} = -\frac{1}{x+1}$$

3. $f(x) = \dfrac{1}{(1-3x)^2}$

f semble être de la forme $\dfrac{u'}{u^2}$ avec $u(x) = 1-3x$. On a $u'(x) = -3$ donc

$$\frac{u'(x)}{u(x)^2} = \frac{-3}{(x+1)^2} = -3f(x)$$

Donc, une primitive de f est donnée par

$$F(x) = \frac{1}{-3}\times\left(-\frac{1}{u(x)}\right) = \frac{1}{-3}\times\left(-\frac{1}{1-3x}\right) = \frac{1}{3(1-3x)}$$

4. $f(x) = (2x-1)(x^2-x+1)^3$
f semble être de la forme $u'u^3$ avec $u(x) = x^2-x+1$. On a $u'(x) = 2x-1$ donc

$$u'(x)u(x)^3 = (2x-1)(x^2-x+1)^3 = f(x)$$

Donc, une primitive de f est donnée par

$$F(x) = \frac{u(x)^4}{4} = \frac{(x^2-x+1)^4}{4}$$

5. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$

f semble être de la forme $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ avec $u(x) = x+2$. On a $u'(x) = 1$. Donc,

$$\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}} = \frac{1}{\sqrt{x+2}} = f(x)$$

Donc, une primitive de f est donnée par :

$$F(x) = 2\sqrt{u(x)} = 2\sqrt{x+2}$$

3. Intégrale d'une fonction continue

3.1. Définition

Définition 4 :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a et b deux éléments de I. Soit F une primitive de f sur I. L'intégrale de f entre a et b est le nombre réel égal à $F(b)-F(a)$:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b)-F(a).$$

Remarque :

- La différence $F(b)-F(a)$ se note $\Big[F(x)\Big]_a^b$. Ainsi,

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b)-F(a)$$

- Le résultat ne dépend pas de la primitive F choisie.

Exemple :

- $\displaystyle\int_1^3 3t^2+2t-1\mathrm{d}t = \left[t^3+t^2-t\right]_1^3 = \left(3^3+3^2-3\right)-\left(1^3+1^2-1\right) = 33-1 = 32$
- $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^2 = 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Proposition 1 :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a et b dans I. Soit F une primitive de f sur I. On a alors :

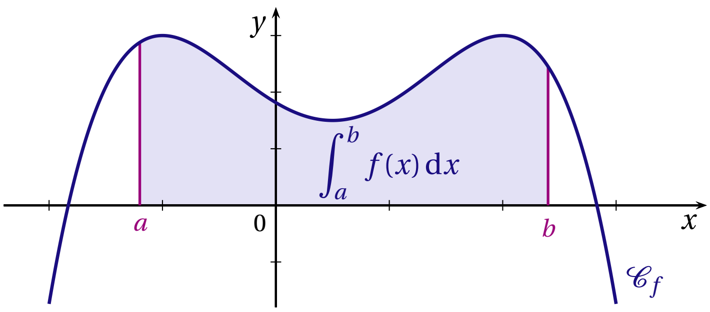
$$\int_a^a f(t)\mathrm{d}t = 0 \qquad \text{et} \qquad \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = -\int_b^a f(t)\mathrm{d}t.$$

3.2. Premières propriétés

Proposition 2 :

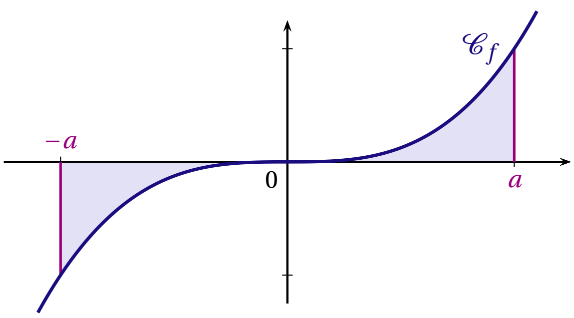
Soient a et b deux réels tels que $a \leqslant b$. Soit f une fonction continue et positive sur $[a;b]$. Soit $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f. Alors :

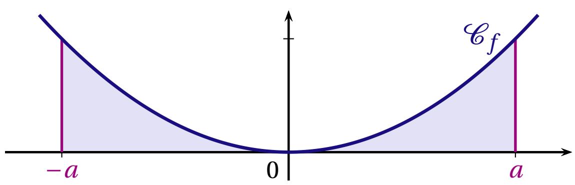
$\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est l'aire de la surface comprise entre $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$.



Proposition 3 :

- Si f est continue et paire sur $[-a;a]$, alors : $\displaystyle\int_{-a}^a f(t)\mathrm{d}t = 2\int_0^a f(t)\mathrm{d}t$.
- Si f est continue et impaire sur $[-a;a]$ alors : $\displaystyle\int_{-a}^a f(t)\mathrm{d}t = 0$.





Exemple :

- $\displaystyle\int_{-1}^{1} t^3\sqrt{t^2+1}\,\mathrm{d}t = 0$
- $\displaystyle\int_{-1}^{1} t^2+|t|\,\mathrm{d}t = 2\int_{0}^{1} t^2+|t|\,\mathrm{d}t = 2\int_{0}^{1} t^2+t\,\mathrm{d}t = 2\left[\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2\right]_0^1 = \frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$

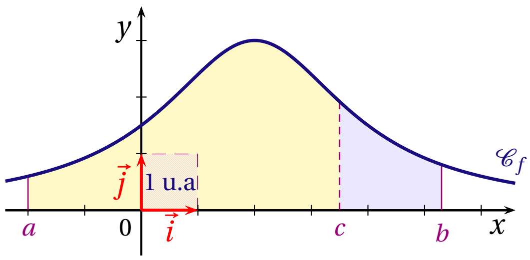
Proposition 4 : Relation de Chasles

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soient a, b et c dans I. Alors :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\mathrm{d}t.$$

Interprétation graphique

Dans le cas où f est une fonction continue et positive sur $[a;b]$.
L'aire du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ est égale à la somme des aires du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=c$ et du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=c$ et $x=b$.



Proposition 5 : Linéarité de l'intégrale

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a;b]$. Alors, pour tout réel α, on a :

$$\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int_a^b \alpha f(x)\,\mathrm{d}x = \alpha\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Exemple : Soit a un réel et f la fonction définie sur $[-1;1]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-a}{2} & \text{si} \quad -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ \dfrac{1+a}{2} & \text{si} \quad 0 < x \leqslant 1 \end{cases}$$

Vérifier que $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

On a :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} f(x)\ rmdx &= \int_{-1}^{0} \frac{1-a}{2}\ rmdx + \int_{0}^{1} \frac{1+a}{2}\ rmdx \\ &= \frac{1-a}{2}\int_{-1}^{0} 1\,\mathrm{d}x + \frac{1+a}{2}\int_{0}^{1} 1\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1-a}{2}\Big[x\Big]_{-1}^{0} + \frac{1+a}{2}\Big[x\Big]_{0}^{1} \\ &= \frac{1-a}{2} + \frac{1+a}{2} = 1 \end{aligned}$$

Quelques Techniques d'intégration :

① Intégration par partie :

Si u et v sont dérivables et que leurs dérivées sont continues sur [a ; b], alors :

$$\int_a^b u'(x)\, v(x)\, dx = \left[u(x)\, v(x)\right]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b u(x)\, v'(x)\, dx$$

▶ Quelques astuces de base :

* **Avec la fonction ln** : Lorsque vous avez une intégration par partie à faire avec la fonction ln, c'est toujours celle ci que vous devez dérivez, et donc primitiver l'autre.

Voici un exemple : $\int x \ln x \, dx$

* **Avec polynôme** : Il faut toujours dériver les puissances de x pour baisser la puissance jusqu'à tomber sur 1 et ainsi pouvoir calculer l'intégrale tranquillement.

Attention : La règle des ln passe toujours avant celle des puissances de x.

Voici un exemple : $\int_a^5 x e^x \, dx$

Notez bien que cette règle ne marche pas tout le temps, seule la pratique vous permettre de savoir faire correctement une IPP

* **Autre cas de figure :**

$$\int \arctan(x)\, dx = \int 1 \times \arctan(x)\, dx$$

on prend : $u' = 1 \longrightarrow u = x$

$v = \arctan(x) \longrightarrow v' = \frac{1}{1+x^2}$

donc $\int \arctan(x)\,dx = x\arctan(x) - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx$

$= x\arctan(x) - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx$

Soit $u = 1+x^2$, alors $u' = 2x$, on obtient alors :

$\int \arctan(x)\,dx = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\int \frac{u'}{u}\,dx$

$= x\arctan x - \frac{1}{2}\ln|u| + C$

$= x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$

② Par changement de variable :

si sous forme $\int f'(x) \times g(f(x))\,dx$

on pose $u = f(x)$

soit $f'(x)\,dx = du$ donc $dx = \frac{1}{f'(x)}\,du$

Exemple 01 : Resoudre : $\int \frac{\cos(\ln(x))}{x}\,dx$

on pose : $u = \ln x$, alors $du = \frac{1}{x}\,dx$ d'où $dx = x\,du$
$= e^u\,du$

$\int \frac{\cos(\ln(x))}{x}\,dx = \int \frac{\cos(u)}{e^u} \times e^u\,du = \int \cos(u)\,du$

$= \sin(u) + C$

$= \sin(\ln x) + C$

Exemple 2 : Calculer $\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$

on pose $t=e^x$, alors $dt=e^x\,dx$

et si $x=0 \Rightarrow t=e^0=1$

si $x=1 \Rightarrow t=e^1=e$

$$\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}\,dx=\int_1^e \frac{1}{1+t}\,dt=\Big[\ln|1+t|\Big]_1^e$$

$$=\ln(1+e)-\ln(2)$$

③ Intégrale de type $\int \frac{ax+b}{x^2+px+q}\,dx$; où $a,b,p,q\in\mathbb{R}$

▶ si x^2+px+q possède deux racines réelles α et β, donc :

$$\frac{ax+b}{x^2+px+q}=\frac{A}{x-\alpha}+\frac{B}{x-\beta}$$

Par suite : $\int \frac{ax+b}{x^2+px+q}\,dx=\int\frac{A}{x-\alpha}\,dx+\int\frac{B}{x-\beta}\,dx$

$$=A\ln|x-\alpha|+B\ln|x-\beta|+c\ ;$$

où $c\in\mathbb{R}$

Exemple : Calculer $\int\frac{1}{x^2-1}\,dx$

on a : $\frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{(x-1)(x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}$

alors : $\frac{1}{x^2-1}=\frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{x(A+B)+(A-B)}{(x-1)(x+1)}$

$$\frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{(x-1)(x+1)}=\frac{(A+B)x+(A-B)}{(x-1)(x+1)}$$

d'où : $\begin{cases}A+B=0\\ \text{et } A-B=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}A=-B\\ \text{et}\\ A=1+B\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}1+2B=0\\ \text{et}\\ A=-B\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}B=-\frac{1}{2}\\ \text{et}\\ A=\frac{1}{2}\end{cases}$

Alors : $\dfrac{1}{x^2-1} = \dfrac{1}{2(x-1)} - \dfrac{1}{2(x+1)}$

$$\int \frac{1}{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + C$$

▶ Si x^2+px+q n'a pas de racines réelles, écrivons :

$$x^2+px+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}$$

On pose : $\alpha = -\frac{p}{2}$ et $\beta^2 = q - \frac{p^2}{4}$

alors : $x^2+px+q = (x-\alpha)^2 + \beta^2$

On fait maintenant le changement de variable $x-\alpha = \beta t$

et donc $dx = \beta\,dt$ et $(x-\alpha)^2+\beta^2 = \beta^2 t^2 + \beta^2$

$$= \beta^2(1+t^2),$$

alors : $\displaystyle\int \frac{ax+b}{x^2+px+q}\,dx = \int \frac{ax+b}{(x-\alpha)^2+\beta^2}\,dx$

$$= \int \frac{Mt+N}{1+t^2}\,dt$$

$$= \frac{M}{2}\ln(1+t^2) + N\arctan(t) + C$$

Puis, on remplace t par $\dfrac{x-\alpha}{\beta}$

<u>Exemple</u>: Calculer $\displaystyle\int \frac{x+4}{x^2+2x+5}\,dx$

$$\Delta = 4 - 4(1)(5) = -16 < 0$$

alors : $x^2+2x+5 = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}$

$$= (x+1)^2 + 4$$

$\alpha = -1$ et $\beta = 2$

On pose $2t = x + 1 \Rightarrow 2\,dt = dx$

Alors $\displaystyle\int \frac{x+4}{x^2+2x+5}\,dx = \int \frac{(2t-1)+4}{4t^2+4} \times 2\,dt$

$$= \int \frac{2t+3}{4(1+t^2)} \times 2\,dt$$

$$= \int \frac{2t+3}{2(1+t^2)}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2t}{1+t^2}\,dt + \frac{3}{2}\int \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\ln(1+t^2) + \frac{3}{2}\arctan(t) + c$$

④ Intégration des Fractions rationnelles en e^x :

On utilise le changement de variable $t = e^x$ et donc $dt = e^x\,dx$; d'où : $dx = \dfrac{dt}{e^x} = \dfrac{dt}{t}$

Exemple : Calculer $\displaystyle\int \frac{dx}{3-2e^x}$;

On pose $t = e^x \Rightarrow dx = \dfrac{dt}{t}$

Alors $\displaystyle\int \frac{dx}{3-2e^x} = \int \frac{1}{3-2t} \times \frac{dt}{t} = \int \frac{1}{t(3-2t)}\,dt$

on a : $\dfrac{1}{t(3-2t)} = \dfrac{A}{t} + \dfrac{B}{3-2t}$

$$\frac{1}{t(3-2t)} = \frac{(3-2t)A + Bt}{t(3-2t)} = \frac{t(B-2A) + 3A}{t(3-2t)}$$

d'où : $\begin{cases} B - 2A = 0 \\ \text{et} \\ 3A = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = 2A \\ \text{et} \\ A = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = \frac{2}{3} \\ \text{et} \\ A = \frac{1}{3} \end{cases}$

Alors : $\int \frac{1}{t(3-2t)} dt = \frac{1}{3}\int \frac{1}{t} dt - \frac{1}{3}\int \frac{-2}{3-2t} dt$

$= \frac{1}{3}\ln|t| - \frac{1}{3}\ln|3-2t| + c$

d'où $\int \frac{dx}{3-2e^x} = \frac{1}{3}\ln(e^x) - \frac{1}{3}\ln|3-2e^x| + c$

$= \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}\ln|3-2e^x| + c.$

5- Intégration des fonctions trigonométriques :

1. Si l'intégrale est de la forme $\int f(sinx)cosxdx$

En faisant le changement de variable :

$$u = sinx, \qquad du = \cos xdx$$

L'intégrale s'écrit : $\int f(u)du$.

2. Si l'intégrale est de la forme $\int f(cox)sinxdx$

En effectuant le changement de variable :

$$u = cosx, \qquad du = \sin xdx$$

L'intégrale s'écrit : $\int f(u)du$

- Si nécessaire, on utilise la relation

$$sinx^2 + cosx^2 = 1$$

pour passer de sinus au cosinus ou vice-versa.

Exemple 1. $\int sinx^2cosxdx$

Par le changement de variable :

$$u = sinx, \qquad du = \cos xdx$$

$$\int u^2du = \frac{1}{3}u^3 + c$$

$$\int sinx^2cosxdx = \frac{1}{3}sinx^3 + c$$

Exemple 2. $\int cosx^2sinxdx$

Par le changement de variable :

$$u = cosx, \qquad du = -\sin xdx$$

$$\int -u^2du = -\frac{1}{3}u^3 + c$$

$$\int cosx^2sinxdx = -\frac{1}{3}cosx^3 + c$$

Exemple 3. $\int sinx^3dx$

$$\int sinx^3dx = \int sinx^2\, sinxdx = \int (1 - cosx^2)sinxdx$$

Par le changement de variable : $u = cosx, \qquad du = -\sin xdx$

$$\int (1 - cosx^2)sinxdx = \int -(1 - u^2)du = \int u^2\, du - \int du = \frac{1}{3}u^3 - u + c$$

$$\int sinx^2dx = \frac{1}{3}cosx^3 - cosx + c$$

3. Si l'intégrale à intégrer ne dépend que de tgx ; $\int f((tgx)dx$.Utilisons le changement de variable suivant:

$$u = tgx, \qquad x = arctgu \Rightarrow dx = \frac{du}{u^2+1}$$

Nous obtenons $\int f((tgx)dx = \int f(u)\frac{du}{u^2+1}$

Exemple. $\int \frac{tgx}{cos^2x}dx$

On a : $cos^2x = \frac{1}{1+tg^2x} \rightarrow \frac{1}{cos^2x} = 1 + tg^2x$. En substituant cette relation dans l'intégrale considérée :

$$\int \frac{tgx}{cos^2x}dx = \int tgx\frac{1}{cos^2x}dx = \int tgx(1 + tg^2x)dx = \int (tgx + tg^3x)dx = \int tgxdx + \int tg^3xdx$$

Par le changement de variable cité au-dessus, nous obtenons :

$$\int \frac{tgx}{cos^2x}dx = \int tgxdx + \int tg^3xdx = \int u\frac{du}{u^2+1} + \int u^3\frac{du}{u^2+1} \quad ; \quad \left[\frac{u^3}{u^2+1} = u - \frac{u}{u^2+1}\ (division)\right]$$

$$\int \frac{tgx}{cos^2x}dx = \int u\frac{du}{u^2+1} + \int (u - \frac{u}{u^2+1})\,du = \int u\frac{du}{u^2+1} + \int udu - \int u\frac{du}{u^2+1} = \int udu = \frac{1}{2}u^2 + c$$

$$\int \frac{tgx}{cos^2x}dx = \frac{1}{2}tg^2x + c$$

4. **Intégrale du type**

$$\int sinmxcosnxdx, \quad \int sinmxsinnxdx \quad et \quad \int cosmxcosnxdx$$

Dans ce cas, on utilise les formules suivantes :

$$sinmxcosnx = \frac{1}{2}[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x]$$

$$sinmxsinnx = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x]$$

$$cosmxcosnx = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x + \cos(m+n)x]$$

Exemple $\int cos\frac{x}{2}cos\frac{x}{3}dx$

$$cos\frac{x}{2}cos\frac{x}{3}dx = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)x + \cos\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)x\right] = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{1}{6}\right)x + \cos\left(\frac{5}{6}\right)x\right]$$

$$\int cos\frac{x}{2}cos\frac{x}{3}dx = \int \frac{1}{2}\left[\cos\frac{1}{6}x + \cos\frac{5}{6}x\right]dx = \frac{1}{2}\left[\int \cos\frac{x}{6}dx + \int \cos\frac{5}{6}x\,dx\right] =$$

$$\frac{1}{2}\left[6sin\frac{1}{6}x + \frac{6}{5}sin\frac{5}{6}x\right] + c$$

$$\int cos\frac{x}{2}cos\frac{x}{3}dx = 3sin\frac{x}{6} + \frac{3}{5}sin\frac{5}{6}x + c$$