Série N° 01 : Suites numériques :

Exercice 01 :

Dans chacun des cas suivants, déterminer les termes de rang 0, 1, 2 et 3 de la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

① $U_n = -7n + 2$

② $V_n = n^2 - 1$

③ $W_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Exercice 02 :

On considère la suite (U_n), définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$U_n = 2n^2 - 3n - 1$$

① Calculer : U_0, U_1, U_{10}.

② Existe-t-il un $n \in \mathbb{N}$ tel que $U_n = 0$?

③ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n > -3$.

Exercice 03 :

On considère la suite (U_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$U_n = \sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)$$

① Calculer U_0, U_1 et U_2

② Trouver un entier k tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$U_{n+k} = U_n$$

Exercice 04 :

Pour chacune des suites numériques suivantes, calculer les termes de rang 1, 2 et 3 :

* $\begin{cases} U_0 = 4 \\ \text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = 2U_n - 3 \end{cases}$

* $\begin{cases} U_0 = 2 \\ \text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = \dfrac{1}{U_n + 1} \end{cases}$

* $\begin{cases} V_0 = 256 \\ \text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ V_{n+1} = \sqrt{V_n} \end{cases}$

* $\begin{cases} W_0 = -3 \\ \text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ W_{n+1} = W_n + n \end{cases}$

Exercice 05 :

Considérons la suite (U_n) définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 10 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = \dfrac{17}{19} U_n + \dfrac{18}{19} \end{cases}$$

① Montrer que : $U_n \geq 9$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

② Montrer que (U_n) est décroissante, puis déduire qu'elle est convergente

③ On pose, $V_n = U_n - 9$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

ⓐ Montrer que (V_n) est une suite géométrique

ⓑ Calculer V_n en fonction de n

ⓒ Déduire U_n en fonction de n, puis calculer $\lim_{n \to +\infty} U_n$.

Exercice 06 :

Considérons la suite (U_n) définie par

$$\begin{cases} U_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N} \; ; \; U_{n+1} = \dfrac{12 - 8U_n}{4 - 3U_n} \end{cases}$$

① Montrer par récurrence que : $U_n > 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

② On pose : $V_n = \dfrac{U_n}{U_n - 2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

ⓐ Montrer que (V_n) est une suite arithmétique

ⓑ Calculer V_n en fonction de n.

ⓒ Etudier la variation de la suite (V_n)

ⓓ Déduire U_n en fonction de n.

Exercice 07 :

On considère la suite (U_n) de nombres réels, définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \dfrac{1}{2} U_n + 3 \end{cases}$

① Calculer U_1, U_2 et U_3

② (V_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$V_n = U_n - 6$

Démontrer que (V_n) est une suite géométrique et déterminer sa raison.

③ Pour tout entier naturel n, exprimer V_n puis U_n en fonction de n.

④ Calculer $S = V_0 + V_1 + \dots + V_9$ puis $S' = U_0 + U_1 + \dots + U_9$.