Université Larbi Ben M'hidi Oum El Bouaghi

Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie

Département S.M

Polycopié de cours: Méthodes numériques

Dr. Dehilis Sofiane

3 ème année licence physique des matériaux

Avant propos

Cet ouvrage est un support de cours, il couvre le programme de la matière méthodes numériques, il est principalement destiné aux étudiants de troisième année licence physique . Il peut aussi servir aux étudiants de deuxième année mathématiques, ainsi qu'aux étudiants de deuxième année de la filière Sciences et Technologie (ST) et la filière Sciences de la Matière (SM).

Ce cours se compose de quatre chapitres et un annexe:

- Rappel: Analyse matricielle
- Méthodes directes de résolution des systèmes linéaires
- Méthodes itératives de résolution des systèmes linéaires

Ce cours ne suppose connus que quelques notions et résultats de première année (Analyse et Algèbre). Les différentes méthodes numériques seront exposées d'une manière simple et compréhensible, et nous avons omis la plupart des démonstrations.

A la fin de chaque chapitre on pourra trouver une série d'exercices .

Chapitre 1

Rappel sur l'analyse matricielle

Nous rappelons dans ce chapitre les notions d'algèbre linéaire abordées en première année. Pour une bonne compréhension des prochains chapitres, il est important que ces notions soient bien assimilées. Ce chapitre constitue un recueil de résultats sans démonstration.

1.1 Matrices

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R} \quad \text{ou} \quad \mathbb{C}$ un corps. Un tableau rectangulaire de la forme:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1j} & ... & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2j} & ... & a_{2m} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{i1} & a_{i2} & ... & a_{ij} & ... & a_{im} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nj} & ... & a_{nm} \end{pmatrix}$$

où les a_{ij}, sont des scalaires du corps $\mathbb{K}$, est appelé une matrice sur $\mathbb{K}$, ou simplement une matrice. La matrice précédente est aussi notée par $A = (a_{ij}), i = 1, ..., n, j = 1, , ..., m$. Elle est dite de taille $n \times m$ si le tableau possède n lignes et p colonnes. L'ensemble des matrices à n lignes et m colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $M_{n,m}(\mathbb{K})$. Les éléments de $M_{n,m}(\mathbb{R})$

sont appelés matrices réelles. Une matrice ayant le même nombre de lignes que de colonnes est appelée une matrice carrée, on note $M_n(\mathbb{K})$ au lieu de $M_{n,n}(\mathbb{K})$.

Exemple .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

est une matrice de taille 2×3. On dit que $A \in M_{2,3}(\mathbb{R})$

1.1.1 Opérations sur les matrices

égalité des matrices

Deux matrices $A = (a_{ij})_{n \times m}$ et $B = (b_{ij})_{n \times m}$ sont égales, on note $A = B$, si :

1. elles ont le même nombre de lignes.
2. elles ont le même nombre de colonnes.
3. pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ et pour tout $j \in \{1, \ldots, m\}$ on a : $a_{ij} = b_{ij}$, c'est-à-dire les coefficients des deux matrices sont égaux.

Transposée d'une matrice

Définition 1 *Soit $A = (a_{ij})_{n \times m}$ une matrice du type $n \times m$. La transposée de A notée A^T est la matrice à m ligne et n colonnes définie par :*

$$\boxed{A^T = (a_{ji})_{m \times n}}$$

Autrement dit les colonnes de A^T sont les lignes de A et les lignes de A^T sont les colonnes de A.

Exemple 1 *Si*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 5 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

alors

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Propriétés :

Si $A \in M_{,mn}(\mathbb{R})$, nous avons les résultats suivants :

1. $\left(A^T\right)^T = A.$
2. $(A+B)^T = A^T + B^T.$
3. $(\lambda A)^T = \lambda A^T, \lambda \in \mathbb{R}.$
4. $(AB)^T = B^T A^T.$
5. $(A^{-1})^T = \left(A^T\right)^{-1}.$

Somme

Définition 2 *Soient $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ deux matrices du même type $n \times m$. La somme des matrices A et B, notée $A+B$, est la matrice C du type $n \times m$ dont les coefficients sont égaux à la somme des coefficients de A et B. Autrement dit $C = A + B = (c_{ij})$ où,*

$$\boxed{c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \qquad \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}, \quad \forall j \in \{1, 2, \ldots, m\}.}$$

Exemple 2 *Soient* $A = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{5} & \mathbf{7} \\ 3 & 6 & 5 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & 5 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3 & 5+1 & 7+1 \\ 3+1 & 6+2 & 5+1 \\ 1+3 & 3+2 & 3+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 8 \\ 4 & 8 & 6 \\ 4 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Propriétés :

1. $A + B = B + A$.
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$.
3. $(A + B)^T = A^T + B^T$.

Multiplication par un scalaire

Définition 3 *Soit* $A = (a_{ij})$ *une matrice du type* $n \times m$ *et* λ *un scalaire (dans* $\mathbb{R}$ *ou de* $\mathbb{C}$ *). On désigne par* λA *la matrice du type* $n \times m$ *dont les coefficients sont obtenus par le produit des coefficients de* A *par* λ.

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1m} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \cdots & \lambda a_{nm} \end{pmatrix}$$

Exemple 3 *Soient* $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \\ 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ *et* $\lambda = 3$. *Alors:*

$$3M = \begin{pmatrix} 3\times 3 & 3\times 2 & 3\times 1 \\ 3\times 2 & 3\times 1 & 3\times 6 \\ 3\times 1 & 3\times 5 & 3\times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 6 & 3 & 18 \\ 3 & 15 & 12 \end{pmatrix}$$

Produit de deux matrices

Définition 4 *Soit* $A = (a_{ij})_{n\times m} \in M_{nm}(\mathbb{k})$ *et* $B = (b_{ij})_{m\times p} \in M_{mp}(\mathbb{k})$. *Le produit* $A \times B$ *est la matrice à* n *lignes et* p *colonnes dont le coefficient* c_{ij} *est donné par*

$$\boxed{c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}.b_{kj}}$$

C'est-à-dire, le coefficient c_{ij} *s'obtient par le produit de la* $i^{éme}$ *ligne de la matrice* A *et la* $j^{éme}$ *colonne de la matrice* B.

$$c_{ij} = (a_{i1}\ a_{i1}\ \ldots\ a_{im}) \times \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{mj} \end{pmatrix}$$

Exemple 4 *Soient* $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, *On a :*

$$M \times N = \begin{pmatrix} (2\times 1 + 1\times 3 + 2\times 2) & (2\times 2 + 1\times 1 + 2\times 1) \\ (2\times 1 + 3\times 3 + 4\times 2) & (2\times 2 + 3\times 1 + 4\times 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 7 \\ 19 & 11 \end{pmatrix}$$

Propriétés :

Soients A, B et C trois matrices dont les produits ci-dessous sont définies, on a :

1. **Associativité** : $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$.

2. **Distributivité par rapport à l'addition** : $(A + B) \times C = A \times C + B \times C$ et $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$.

3. $(\lambda A) \times B = A \times (\lambda B) = \lambda (A \times B)$.

4. Si A est une matrice du type $n \times m$ alors $A \times I_m = A$ et $I_n \times A = A$.

5. $(A \times B)^T = B^T \times A^T$.

Remarque 1 1. *Le produit de deux matrices A et B est défini "si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B".*

2. *Le produit matriciel* ***n'est pas commutatifs***

3. *Soient A, B et C trois matrices, Si $AB = AC$, on ne peut pas simplifier par A pour en déduire que $B = C$.*

4. *Si $A \times B = 0_{n \times m}$, on ne peut pas en déduire que soit $A = 0_{n \times m}$ ou bien $B = 0_{n \times m}$.*

5. *On note en général, le produit de deux matrices par : $A \times B = AB$.*

1.1.2 déterminant d'une matrice

Définition 5 ***Déterminant :***

Le déterminant d'une matrice carrée (n, n) est noté $\det(A)$ *ou encore:*

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

Développement d'un déterminant

De manière générale, on a la formule :

Si on développe selon la $i^{ème}$ ligne :

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} det(Ai,j)$$

Si on développe selon la $j^{ème}$ colonne :

$$det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} det(Ai,j)$$

(seule la variable de la somme change)

Dans ces formules, $A_{i,j}$ correspond à la matrice obtenue en rayant la $i^{ème}$ ligne et la $j^{ème}$ colonne de la matrice A.
$(-1)^{i+j}$ correspond au fait que l'on mette + ou – devant le coefficient suivant sa position dans la matrice.
Le terme $(-1)^{i+j}\det(A_{i,j})$ est appelé **le cofacteur du terme $a_{i,j}$** et le terme $\det(A_{i,j})$ est appelé le mineur du terme $a_{i,j}$.

Dans l'exemple suivant, on a réalisé le développement par rapport à la 2-ème ligne :

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 6^{-} & -1^{+} & 1^{-} \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} = -6 \times \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 6 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} + (-1) \times \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 6 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} - 1 \times \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 6 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

Propriétés :

Les déterminants possèdent les propriétés suivantes :

1. $\det I_n = 1$.
2. $\det A^T = \det A$.
3. $\det(AB) = \det A \det B$.
4. *pour tout scalaire* $\alpha \in \mathbb{k}$, $\det(\alpha A) = \alpha^n \det A$.
5. *le déterminant d'une matrice triangulaire (a fortiori diagonale) est égal au produit de ses termes diagonaux.*

1.1.3 Inverse d'une matrice

Définition 6 *On dit que la matrice carrée A de taille n est* **inversible** *s'il existe une matrice B de taille n telle que $AB = BA = I_n$. La matrice B est appelée inverse de A et notée A^{-1}.*

Exemple 5 *Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. La matrice $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ est l'inverse de la matrice A car $AB = BA = I_2$. En effet, on a :*

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a le résultat suivant.

Propriétés :

1. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
2. $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$.

Théorème 1 ***Caractérisation d'une matrice inversible***

Soit $A \in M_n(\Bbbk)$. Les propositions suivantes sont équivalentes:

1. *A est inversible,*
2. *$\det A \neq 0$,*
3. *$Ax = 0$ a pour seule solution $x = 0$;*
4. *pour tout $b \in \Bbbk^n$, $Ax = b$ possède une unique solution.*

Calcul de l'inverse

Si le déterminant d'une matrice A est non nul, alors A est inversible, son inverse étant donnée par :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \times (Com(A))^t$$

où $(Com(A))^t$ est la transposée de la comatrice de A.

La comatrice de A est la matrice des cofacteurs.

Le cofacteur d'indice i, j de A est :

$$(Com(A))_{i,j} := (-1)^{i+j} \det(A_{i,j})$$

où

$A_{i,j}$ est la sous-matrice carrée de taille $n-1$ déduite de A en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne (son déterminant fait donc partie des mineurs de A).

Exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

1.1.4 Quelques matrices particulières

Une matrice carrée $A \in M_n(\Bbbk)$ de coefficients $(a_{ij}) \in \Bbbk$ pour tous $i, j = 1, \ldots, n$. est :

1. ***Diagonale :*** *si $a_{ij} = 0$ pour tout $i \neq j$. On note en général $A = diag\left(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}\right)$.*

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

2. *une matrice diagonale de taille n particulière est la matrice* ***identité*** *I_n dont tous les*

coefficients valent $1,$ *autrement dit* $I_n = diag\,(1, 1, \ldots, 1)\,.$

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. ***triangulaire supérieure :*** *si* $a_{ij} = 0$ *pour tout* $i \succ j$.

$$U = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ddots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

4. ***triangulaire inférieure :****si* $a_{ij} = 0$ *pour tout* $i \prec j$.

$$L = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Chapitre 2

Méthodes directes de résolution des systèmes linéaires

2.1 Motivation

Beaucoup de problèmes se réduisent à la résolution numérique d'un système d'équations linéaires.
Dans ce chapitre, on s'intéresse à la résolution numérique d'un système linéaire système d'ordre n, ($n \in \mathbf{N}$), de la forme

$$Ax = b \qquad (1)$$

où $A = (a_{ij}), 1 \leq i, j \leq n$ est une matrice carrée supposée inversible, $b = (b_i)1 \leq i \leq n$ un vecteur second membre et $x = (x_i)1 \leq i \leq n$ le vecteur des inconnues.

Théoriquement, le fait que A soit inversible entraîne que le système (1) admet une solution unique $x = A^{-1}b$, le calcul de A^{-1} s'obtient par la formule $A^{-1} = \dfrac{1}{det(A)}(com(A))^t$ qui nécessite le calcul n^2 déterminant d'ordre $n-1$ et un déterminant d'ordre n. Une autre méthode consisterait à obtenir les x_i à l'aide des formules de Cramer :

$x_i = \dfrac{det(A_i)}{det(A)}$,*où* $det(A_i)$ *désigne le déterminant de la matrice obtenue en remplaçant la* i^{eme} *colonne de* A *par le vecteur* b. *Le calcul de chaque déterminant d'ordre nécessite* $n.n! - 1$ *opérations arithmétiques. donc le coût total pour calculer* A^{-1} *est* $n^2((n-1).((n-1)!-1) + n.n! - 1$ *opérations en plus de la multiplication* $A^{-1}b$. *et le coût total est* $(n+1)(n.n! - 1)$ *pour la méthode de Cramer. Par exemple : si un ordinateur effectuant* 10^{15} *opérations par seconde il faudrait au moins 327789 années pour résoudre un système linéaire de* $n = 25$ *équations par la méthode de Cramer , impossible d'utiliser Cramer pour résoudre les systèmes de grandes tailles. Il faut donc développer d'autres méthodes avec un coût raisonnable. Ces méthodes se divisent en deux grandes classes :*

Méthodes directes : *déterminent explicitement la solution après un nombre fini d'opérations arithmétiques.*

Méthodes itératives : *consistent à générer une suite de vecteurs* $x^{(n)}$ *qui converge vers la solution du système* x

2.2 Remarques sur la résolution des systèmes triangulaires

C'est le cas où on a résoudre un système de la forme:

$$Ux = b \tag{2.1}$$

ou

$$Lx = b \tag{2.2}$$

avec U *triangulaire supérieure et* L *triangulaire inférieure.*

*Si on prend l'équation (**??**) par exemple on obtient :*

$$Ux = b \Leftrightarrow \begin{cases} u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + ... + u_{1n}x_n & = b_1 \\ 0 + u_{22}x_2 + ... + u_{2n}x_n & = b_2 \\ 0 \qquad \ddots & \vdots \\ \qquad\qquad u_{2n}x_n & = b_n \end{cases}$$

En supposant que les u_{kk} sont non nuls, on obtient les x_i de façon évidente en commençant par le bas et en remontant. On obtient ainsi $x_n = \frac{b_n}{u_{nn}}$ puis $x_i = \frac{\left(b_i - \sum\limits_{j=i+1}^{n} u_{ij}x_j\right)}{u_{ii}}$, pour $i = n-1$ à 1.

Remarque 2 *Le cas d'un système avec matrice triangulaire inférieure se traite de façon similaire en obtenant x_1 d'abord puis en descendant.*

2.2.1 Méthode d'élimination de Gauss

☐ Description de l'algorithme dans le cas d'un système de 3 équations à 3 inconnues. Notion de pivot

Soit à résoudre le système suivant que nous supposons régulier. Le déterminant de la matrice associée est donc supposé non nul.

$$S^{(0)} \quad \begin{array}{l} \mathbf{L}_1^{(0)} \\ \mathbf{L}_2^{(0)} \\ \mathbf{L}_3^{(0)} \end{array} \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = c_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = c_3 \end{cases}.$$

Etape 1. Elimination de x_1 dans $\mathbf{L}_2^{(0)}$ et $\mathbf{L}_3^{(0)}$.

$$\left\| \begin{array}{l} \mathbf{L}_2^{(0)} \longleftarrow \mathbf{L}_2^{(0)} - \frac{a_{21}}{a_{11}}\mathbf{L}_1^{(0)} \\ \mathbf{L}_3^{(0)} \longleftarrow \mathbf{L}_3^{(0)} - \frac{a_{31}}{a_{11}}\mathbf{L}_1^{(0)} \end{array} \right. .$$

Attention, Nous divisons par a_{11}. Cela n'est possible que si a_{11} est non nul. Nous arrivons à

$$S^{(1)} \quad \begin{array}{l} \mathbf{L}_1^{(0)} \\ \mathbf{L}_2^{(1)} \\ \mathbf{L}_3^{(1)} \end{array} \begin{cases} a_{11}x_1 \quad +a_{12}x_2 \quad +a_{13}x_3 = c_1 \\ 0 \quad +(a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{12})x_2 \quad +(a_{23} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{13})x_3 = c_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}}c_1 \\ 0 \quad +(a_{32} - \frac{a_{31}}{a_{11}}a_{12})x_2 \quad +(a_{33} - \frac{a_{31}}{a_{11}}a_{13})x_3 = c_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}}c_1 \end{cases}.$$

que nous écrivons encore sous la forme

$$S^{(1)} \quad \begin{array}{l} \mathbf{L}_1^{(0)} \\ \mathbf{L}_2^{(1)} \\ \mathbf{L}_3^{(1)} \end{array} \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = c_1 \\ 0 + a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 = c_2^{(1)} \\ 0 + a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 = c_3^{(1)} \end{cases}.$$

Etape 2. Elimination de x_2 dans $\mathbf{L}_3^{(2)}$.

$$\left\| \mathbf{L}_3^{(1)} \longleftarrow \mathbf{L}_3^{(1)} - \frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}\mathbf{L}_2^{(1)} \right. .$$

Attention, nous divisons cette fois par $a_{22}^{(1)}$. La condition $a_{22}^{(1)} \neq$ est nécessaire. Il vient

$$S^{(2)} \quad \begin{array}{l} \mathbf{L}_1^{(0)} \\ \mathbf{L}_2^{(1)} \\ \mathbf{L}_3^{(2)} \end{array} \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = c_1 \\ 0 + a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 = c_2^{(1)} \\ 0 + 0 + (a_{33}^{(1)} - \frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}a_{23}^{(1)})x_3 = c_3^{(1)} - \frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}c_2^{(1)} \end{cases}$$

que nous écrivons

$$S^{(2)} \quad \begin{array}{l} \mathbf{L}_1^{(0)} \\ \mathbf{L}_2^{(1)} \\ \mathbf{L}_3^{(1)} \end{array} \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = c_1 \\ 0 + a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 = c_2^{(1)} \\ 0 + 0 + a_{33}^{(2)}x_3 = c_3^{(2)} \end{cases}.$$

Ce dernier système est triangulaire supérieur, nous pouvons donc le résoudre rapidement par substitutions successives comme expliqué dans la partie précédente. Il reste à examiner si, et comment, nous pouvons modifier la méthode dans le cas où un des nombres par lesquels nous devons diviser s'avère être égal à 0. Supposons que $a_{11} = 0$. Nous avons alors $a_{21} \neq 0$ ou $a_{31} \neq 0$ sinon la première colonne de la matrice du système serait nulle et son déterminant vaudrait 0 ce qui est contraire à l'hypothèse. Supposons pour fixer les idées que $a_{22} \neq 0$, nous permutons alors les lignes $\mathbf{L}_1^{(0)}$ et $\mathbf{L}_2^{(0)}$ et commençons la méthode décrite ci-dessus à partir du système

$$\begin{cases} a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = c_2 \\ 0 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = c_1 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = c_3 \end{cases}.$$

Dans la deuxième étape, si nécessaire, c'est-à-dire si $a_{22}^{(1)} = 0$, nous pouvons permuter les lignes $\mathbf{L}_2^{(1)}$ et $\mathbf{L}_3^{(1)}$ de telle sorte que nous diviserons à nouveau par un nombre non nul.

Les nombres par lesquels nous effectuons les divisions dans les diverses étapes de l'algorithme s'appellent les **pivots de Gauss**. Pour que l'algorithme fonctionne, ces nombres doivent être non nuls, et, pour la précision des calculs, il est préférable qu'il ne soit pas proche de 0.

2.2.2 Méthode d'élimination de Gauss (cas général)

La méthode d'élimination de Gauss consiste en premier lieu à transformer, par des opérations simples sur les équations, un système linéaire quelconque en un système triangulaire supérieure équivalent . soit le système linéaire de n équations à n inconnue:

$$\left(S^{(0)}\right):\begin{cases} a_{11}^{(0)}x_1+a_{12}^{(0)}x_2+a_{13}^{(0)}x_3+\cdots+a_{1n}^{(0)}x_n &= b_1^{(0)} \qquad ...L_1^{(0)}\\ a_{21}^{(0)}x_1+a_{22}^{(0)}x_2+a_{23}^{(0)}x_3+\cdots+a_{2n}^{(0)}x_n &= b_2^{(0)} \qquad ...L_2^{(0)}\\ \qquad\vdots \qquad\qquad \vdots & \qquad\qquad \vdots\\ a_{n1}^{(0)}x_1+a_{n2}^{(0)}x_2+a_{n3}^{(0)}x_3+\cdots+a_{nn}^{(0)}x_n &= b_n^{(0)} \qquad ...L_n^{(0)} \end{cases}$$

Etape 1:

On suppose $a_{11}^{(0)}\neq 0$ et on pose $m_{i1}=\frac{a_{i1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}}$.

On remplace la ligne $L_i^{(0)}$ par $L_i^{(1)}=L_i^{(0)}-m_{i1}L_1^{(0)}$ pour $i=2,3,\ldots,n$, $\quad a_{ij}^{(1)}=a_{ij}^{(0)}-m_{i1}a_{1j}^{(0)}$ pour $i;j=2,3,\ldots,n$ et $b_i^{(1)}=b_i^{(0)}-m_{i1}b_1^{(0)}$ pour $i=2,3,\ldots,n$.

On obtient alors le système (S_1) suivant :

$$\left(S^{(1)}\right):\begin{cases} a_{11}^{(0)}x_1+a_{12}^{(0)}x_2+a_{13}^{(0)}x_3+\cdots+a_{1n}^{(0)}x_n &= b_1^{(0)} \qquad ...L_1^{(0)}\\ 0+a_{22}^{(1)}x_2+a_{23}^{(1)}x_3+\cdots+a_{2n}^{(1)}x_n &= b_2^{(1)} \qquad ...L_2^{(1)}\\ \qquad\vdots \qquad\qquad \vdots & \qquad\qquad \vdots\\ 0+a_{n2}^{(1)}x_2+a_{n3}^{(1)}x_3+\cdots+a_{nn}^{(1)}x_n &= b_n^{(1)} \qquad ...L_n^{(1)} \end{cases}$$

Etape 2:

A nouveau, on suppose $a_{22}^{(1)}\neq 0$ et on pose $m_{i2}=\frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$.

On remplace la ligne $L_i^{(1)}$ par $L_i^{(2)}=L_i^{(1)}-m_{i2}L_2^{(1)}$ pour $i=3,\ldots,n$, $\quad a_{ij}^{(2)}=a_{ij}^{(1)}-m_{i2}a_{2j}^{(1)}$ pour $i,j=3,\ldots,n$ et $b_i^{(2)}=b_i^{(1)}-m_{i2}b_2^{(1)}$ pour $i=3,\ldots,n$.

On obtient alors le système (S_2) suivant :

$$
\left(S^{(2)}\right):\begin{cases}
a_{11}^{(0)}x_1+a_{12}^{(0)}x_2+a_{13}^{(0)}x_3+\cdots+a_{1n}^{(0)}x_n & =b_1^{(0)} \qquad ...L_1^{(0)}\\
0+a_{22}^{(1)}x_2+a_{23}^{(1)}x_3+\cdots+a_{2n}^{(1)}x_n & =b_2^{(1)} \qquad ...L_2^{(1)}\\
\quad\vdots \qquad\qquad \vdots & \qquad\qquad \vdots\\
0+0+a_{n3}^{(2)}x_3+\cdots+a_{nn}^{(2)}x_n & =b_n^{(2)} \qquad ...L_n^{(2)}
\end{cases}
$$

En supposant qu'à chaque étape on a $a_{kk}^{(1)} \neq 0$*, on poursuit la transformation jusqu'à l'obtention d'un système triangulaire :*

$$
\left(S^{(n-1)}\right):\begin{cases}
a_{11}^{(0)}x_1+a_{12}^{(0)}x_2+a_{13}^{(0)}x_3+\cdots+a_{1n}^{(0)}x_n & =b_1^{(0)} \qquad ...L_1^{(0)}\\
0+a_{22}^{(1)}x_2+a_{23}^{(1)}x_3+\cdots+a_{2n}^{(1)}x_n & =b_2^{(1)} \qquad ...L_2^{(1)}\\
\quad\vdots \qquad\qquad \vdots & \qquad\qquad \vdots\\
0+0+0+\cdots+0+a_{nn}^{(n-1)}x_n & =b_n^{(n-1)} \qquad ...L_n^{(n-1)}
\end{cases}
$$

On obtient alors la solution en commençant par : $x_n=\frac{b_n^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}}, x_{n-1},\ldots,x_1$.

2.3 La factorisation LU

Théorème 2 *Soit A une matrice telle que les sous matrices principales $A_{[k]}=(a_{ij})_{1\preceq i,j\preceq k}$ de A soient **inversibles** pour tous $1\preceq k\preceq n$, alors il existe une matrice $L=(l_{ij})_{1\preceq i,j\preceq k}$ **triangulaire inférieure** telle que $l_{ii}=1, i=\overline{1,n}$ et une matrice **triangulaire supérieure** U telle que $A=LU$.*

*De plus cette décomposition est **unique**.*

Détermination des matrices L et U

Par identification: *En connaisont* $A=(a_{ij})_{1\preceq i,j\preceq n}$ *, on écrit l'égalité* $A=LU$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ l_{21} & 1 & & 0 & \\ l_{31} & & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ l_{n1} & \cdots & \cdots & l_{nn-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & & \vdots \\ & 0 & & \ddots & \vdots \\ & & & & u_{nn} \end{pmatrix}$$

(U contient $\frac{n(n+1)}{2}$ *éléments et L contient* $\frac{n(n-1)}{2}$ *éléments).*

Par identification on obtient un système linéaire de n^2 *équations à* n^2 *inconnues. En résolvant le système obtenu dans des cas particuliers* $(n=2,3,4)$ *, on constate que la détermination des éléments de L et U cherchés se fait suivant l'algorithme général :*

$$\begin{cases} l_{ii}=1, 1\preceq i\preceq n, \\ \begin{cases} u_{1j}=a_{1j} & 1\preceq j\preceq n, \\ l_{ii}=\frac{a_{i1}}{u_{11}} & 2\preceq i\preceq n, \end{cases} \\ \begin{cases} u_{mj}=a_{mj}-\sum\limits_{k=1}^{m-1} l_{mk}u_{kj}, & m\preceq j\preceq n, 2\preceq m\preceq n, \\ l_{im}=\dfrac{\left(a_{im}-\sum\limits_{k=1}^{m-1} l_{ik}u_{km}\right)}{u_{mm}}, & m+1\preceq i\preceq n, \end{cases} \end{cases}$$

Utilité de la détermination L et U

Calcul de déterminant :

Grâce à la factorisation LU, on peut calculer le déterminant d'une matrice carrée avec $\boldsymbol{O}\left(\frac{2}{3}\boldsymbol{n}^3\right)$ *opérations, vu que :*

$$\det(A) = \det(L) \times \det(U) = \det(U) = \prod_{k=1}^{n} u_{kk}.$$

Résolution :

Supposons qu'on veut résoudre le système $AX = b$. *Décomposons* A *sous forme* LU, *alors* $AX = b$ *devient* $(LU)X = b$ *ou encore* $L(UX) = b$. *Posons* $Y = UX$, *on cherche alors* Y *tel que* $LY = b$ *est un système triangulaire inférieur qu'on résout par la méthode descendante.* Y *étant trouvé, on cherche* X *tel que* $UX = Y$ *est un système triangulaire supérieur qu'on résout par la méthode ascendante.*

Coût total :

coût (*décomposition LU*) + *coût* (*résolution de deux systèmes triangulaires*), *C'est à dire,*

$$\boxed{\textbf{\textit{coût total}} = \boldsymbol{O}\left(\tfrac{2}{3}\boldsymbol{n}^3\right) + 2n^2 = \boldsymbol{O}\left(\tfrac{2}{3}\boldsymbol{n}^3\right).}$$

Chapitre 3

Méthodes itératives de résolution des systèmes linéaires

Dans les méthodes directes (Gauss, LU,...) les calculs peuvent être lourds (matrice pleine de grande taille, le nombre d'opérations est d'ordre $O(\frac{2}{3}n^3)$ *). Dans ce cas, on a recours à des méthodes appelées méthodes itératives qui consistent à générer une suite de vecteurs* $X^{(k)}$ *qui converge vers la solution* X *du système (1).*

3.1 Principe des méthodes itératives

L'idée est d'écrire le système $AX = b$*(1) sous une forme équivalente* $X = BX + C$*,où* B *est une matrice carrée de taille n,* C *un vecteur de* $\mathbb{R}^n$*, et à partir d'un vecteur initial* $X^{(0)} \in \mathbb{R}^n$*, on construit la suite de vecteurs* $(X^{(k)})_{k\geq 0}$ *définit par:*

$$\begin{cases} X^{(0)} \in \mathbb{R}^n \textit{vecteur initial} \\ X^{(k+1)} = BX^{(k)} + C \end{cases} \tag{3.1}$$

c'est simple : Pour toute matrice M *carrée d'ordre* n *inversible on a*

$Ax = b \Leftrightarrow MX - (M - A)X = b$

En posant $N = M - A$ (c'est à dire $A = M - N$) on trouve :

$MX - NX = b \Leftrightarrow MX = NX + b \Leftrightarrow X = M^{-1}NX + M^{-1}b \Leftrightarrow X = BX + C$

où $B = M^{-1}N$ et $C = M^{-1}b$.

Donc il faut bien choisir la décomposition $A = M - N$.

écrivons A sous la forme

$$A = D + A_I + A_S = \begin{pmatrix} & & A_S \\ & D & \\ A_I & & \end{pmatrix}$$

où

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{pmatrix}, A_I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & ... & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & ... & 0 \end{pmatrix}, A_S = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{n-1n} \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}$$

, Ce procédé consiste donc à décomposer la matrice A à trois parties :

D : la diagonale de A

A_I la partie triangulaire inférieure de A et A_S la partie triangulaire supérieure de A.

Les trois méthodes les plus connues sont :

3.2 Méthodes de Jacobi

Dans cette méthode, nous prenons $M = D$ et $N = -(A_I + A_S)$ et on suppose que la matrice diagonale D est inversible, i.e. $a_{ii} \neq 0$ pour $1 \leq i \leq n$ (sinon on fait une permutation de lignes). L'avantage de cette méthode est que $M = D$ est très facile à inverser: $D^{-1} = diag(\frac{1}{a_{11}}, \frac{1}{a_{22}}, ..., \frac{1}{a_{nn}})$.

Cette méthode s'écrit $k = 0, 1, ...$ *:*

$$\begin{cases} X^{(0)} \in \mathbb{R}^n & \textit{vecteur initial donné} \\ X^{(k+1)} = D^{-1}(-(A_I + A_S))X^{(k)} + D^{-1}b \end{cases} \tag{3.2}$$

(ce qui revient au même que de choisir dans la suite (1.1): $M = D$ *et* $N = -(A_I + A_S)$ *)*

La matrice $B_J = D^{-1}(-(A_I + A_S))$ *est dite matrice d'itération de Jacobi associée à A. Cette forme matricielle servira uniquement pour l'analyse de convergence de la méthode.*

Il est facile de trouver le même résultat précédent sous forme d'un système d'équation. En effet, considérons le système linéaire (1) :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{i1}x_1 + ... + a_{ii-1}x_{i-1} + a_{ii}x_i + a_{ii+1}x_{i+1} + ... + a_{in}x_n = b_i \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn-1}x_{n-1} + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{3.3}$$

Tirons x_1 *de* 1^{er} *équation,* x_2 *de* 2^{eme} *équation,...,* *et* x_n *de* n^{eme}*, on obtient:*

$$\begin{cases} x_1 = (-a_{12}x_2 - ... - a_{1n}x_n + b_1)/a_{11} \\ x_2 = (-a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - ... - a_{2n}x_n + b_2)/a_{22} \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ x_i = (-a_{i1}x_1 - ... - a_{ii-1}x_{i-1} - a_{ii+1}x_{i+1} - ... - a_{in}x_n + b_i))/a_{ii} \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ x_n = (-a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - ... - a_{nn-1}x_{n-1} + b_n)/a_{nn} \end{cases}$$

à partir d'un vecteur initial $X^{(0)}$ donné, on construit la suite de vecteurs $(X^{(k)})_{k\geq 0}$ définit par:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = (-a_{12}x_2^{(k)} - ... - a_{1n}x_n^{(k)} + b_1)/a_{11} \\ x_2^{(k+1)} = (-a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)} - ... - a_{2n}x_n^{(k)} + b_2)/a_{22} \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ x_i^{(k+1)} = (-a_{i1}x_1^{(k)} - ... - a_{ii-1}x_{i-1}^{(k)} - a_{ii+1}x_{i+1}^{(k)} - ... - a_{in}x_n^{(k)} + b_i))/a_{ii} \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ x_n^{(k+1)} = (-a_{n1}x_1^{(k)} - a_{n2}x_2^{(k)} - ... - a_{nn-1}x_{n-1}^{(k)} + b_n)/a_{nn} \end{cases}$$

L'algorithme de la méthode de Jacobi s'exprime alors par : ($k = 0, 1, ...$ jusqu'à satisfaction du critère d'arrêt.)

$$\begin{cases} x_i^{(0)} \qquad \textit{donné} \qquad 1 \leq i \leq n \\ x_i^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{ii}}(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}) \qquad 1 \leq i \leq n \end{cases} \tag{3.4}$$

exemple *[?]*

Soit le système linéaire :

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & 5x_2 & + & 2x_3 & = & 17 \\ 2x_1 & - & x_2 & - & 6x_3 & = & -18 \end{array}$$

La méthode de Jacobi s'écrit dans ce cas :

$$\begin{array}{rcl} x_1^{k+1} & = & \frac{1}{3}\left(2 - x_2^k + x_3^k\right) \\ x_2^{k+1} & = & \frac{1}{5}\left(17 - x_1^k - 2x_3^k\right) \\ x_3^{k+1} & = & -\frac{1}{6}\left(-18 - 2x_1^k + x_2^k\right) \end{array}$$

À partir de $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$, on trouve d'abord :

$$\begin{array}{rclcl} x_1^1 & = & \frac{1}{3}(2 - 0 + 0) & = & \frac{2}{3} \\ x_2^1 & = & \frac{1}{5}(17 - 0 - 0) & = & \frac{17}{5} \\ x_3^1 & = & -\frac{1}{6}(-18 - 0 + 0) & = & 3 \end{array}$$

La deuxième itération donne :

$$\begin{array}{rclcl} x_1^1 & = & \frac{1}{3}\left(2 - \frac{17}{5} + 3\right) & = & \frac{8}{15} \\ x_2^1 & = & \frac{1}{5}\left(17 - \frac{2}{3} - 2(3)\right) & = & \frac{31}{15} \\ x_3^1 & = & -\frac{1}{6}\left(-18 - 2\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{17}{5}\right) & = & 2{,}655\,556 \end{array}$$

3.3 Méthodes de Gauss-Seidel

Pour cette méthode, les matrices M *et* N *sont données par* $M = D + A_I$ *et* $N = -A_S$ *.*

Cette méthode s'écrit $k = 0, 1, \ldots$ *:*

$$\begin{cases} X^{(0)} \in \mathbb{R}^n & \textit{vecteur initial donné} \\ X^{(k+1)} = (D + A_I)^{-1}(-A_S))X^{(k)} + (D + A_I)^{-1}b \end{cases} \tag{3.5}$$

La matrice $B_{GS} = (D + A_I)^{-1}(-A_S))$ *est dite matrice d'itération de Gauss-Seidel associée à* A.

Remarquons que le calcul de l'inverse de la matrice $M = D + A_I$ *n'est facile dans ce cas, pour éviter cette situation on écrit l'équation (1.4) sous la forme équivalente :*

$$\begin{cases} X^{(0)} \in \mathbb{R}^n & \textit{vecteur initial donné} \\ (D + A_I)X^{(k+1)} = (-A_S))X^{(k)} + b \end{cases} \tag{3.6}$$

On peut aussi trouver le même résultat précédent sous forme d'un système d'équation, en suivant la même procédure dans la méthode de Jacobi.

Considérons le système linéaire (1.3), tirons x_1 *de* 1^{er} *équation,* x_2 *de* 2^{eme} *équation,..., et* x_n *de* n^{eme}*, on obtient:*

$$\begin{cases} x_1 = (-a_{12}x_2 - ... - a_{1n}x_n + b_1)/a_{11} \\ x_2 = (-a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - ... - a_{2n}x_n + b_2)/a_{22} \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ x_i = (-a_{i1}x_1 - ... - a_{ii-1}x_{i-1} - a_{ii+1}x_{i+1} - ... - a_{in}x_n + b_i))/a_{ii} \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ x_n = (-a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - ... - a_{nn-1}x_{n-1} + b_n)/a_{nn} \end{cases}$$

Dans la méthode de Jacobi, toutes les valeurs de $X^{(k+1)}$ *sont calculées à partir des valeurs de* $X^{(k)}$*. Dans la méthode de Gauss-Seidel à l'itération k + 1, au moment du calcul de* $x_2^{(k+1)}$ *, on possède déjà* $x_1^{(k+1)}$ *, De même, au moment du calcul de* $x_3^{(k+1)}$ *, on peut utiliser* $x_1^{(k+1)}$ *et* $x_2^{(k+1)}$ *qui ont déjà été calculés.Plus généralement, pour le calcul de* $x_i^{(k+1)}$ *, on peut utiliser* $x_1^{(k+1)}$, $x_2^{(k+1)}$, ...,$x_{i-1}^{(k+1)}$ *déjà calculés et les* $x_{i+1}^{(k)}$,$x_{i+2}^{(k)}$,...,$x_n^{(k)}$ *de l'itération précédente. à partir d'un vecteur initial* $X^{(0)}$ *donné, on construit la suite de vecteurs* $(X^{(k)})_{k\geq 0}$ *de la méthode de*

Gauss-Seidel définit par:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = (-a_{12}x_2^{(k)} - ... - a_{1n}x_n^{(k)} + b_1)/a_{11} \\ x_2^{(k+1)} = (-a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)} - ... - a_{2n}x_n^{(k)} + b_2)/a_{22} \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ x_i^{(k+1)} = (-a_{i1}x_1^{(k+1)} - ... - a_{ii-1}x_{i-1}^{(k+1)} - a_{ii+1}x_{i+1}^{(k)} - ... - a_{in}x_n^{(k)} + b_i)/a_{ii} \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ x_n^{(k+1)} = (-a_{n1}x_1^{(k+1)} - a_{n2}x_2^{(k+1)} - ... - a_{nn-1}x_{n-1}^{(k+1)} + b_n)/a_{nn} \end{cases}$$

Les équations précédentes se généralisent comme suit :

$$\begin{cases} x_i^{(0)} \text{ donné} \qquad 1 \leq i \leq n \\ x_i^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{ii}}(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}) \qquad 1 \leq i \leq n \end{cases} \tag{3.7}$$

exemple

exemple *[?]*

Soit le système linéaire :

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & 5x_2 & + & 2x_3 & = & 17 \\ 2x_1 & - & x_2 & - & 6x_3 & = & -18 \end{array}$$

La méthode de Gauss-Seidel s'écrit dans ce cas :

$$\begin{aligned} x_1^{k+1} &= \frac{1}{3}\left(2 - x_2^k + x_3^k\right) \\ x_2^{k+1} &= \frac{1}{5}\left(17 - x_1^{k+1} - 2x_3^k\right) \\ x_3^{k+1} &= -\frac{1}{6}\left(-18 - 2x_1^{k+1} + x_2^{k+1}\right) \end{aligned}$$

Notons la différence des indices avec la méthode de Jacobi. Partant de $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$, on trouve d'abord :

$$\begin{aligned} x_1^1 &= \frac{1}{3}(2 - 0 + 0) &&= \frac{2}{3} \\ x_2^1 &= \frac{1}{5}\left(17 - \frac{2}{3} - 0\right) &&= \frac{49}{15} \\ x_3^1 &= -\frac{1}{6}\left(-18 - 2\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{49}{15}\right) &&= \frac{241}{90} \end{aligned}$$

tandis qu'à la deuxième itération on trouve :

$$\begin{aligned} x_1^1 &= \frac{1}{3}\left(2 - \frac{49}{15} + \frac{241}{90}\right) &&= 0{,}470\,3704 \\ x_2^1 &= \frac{1}{5}\left(17 - 0{,}470\,3704 - 2\left(\frac{241}{90}\right)\right) &&= 2{,}234\,815 \\ x_3^1 &= -\frac{1}{6}(-18 - 2(0{,}470\,3704) + 2{,}234\,815) &&= 2{,}784\,321 \end{aligned}$$

Critère d'arrêt *: On arrête les calculs dès que l'erreur est assez petite :*

$$\|X^{k+1} - X^k\|_i < \epsilon$$

Bibliographie

[1] B. Démidovitch, I. Maron, Éléments de calcul numérique*, Moscou, Éditions Mir, 1973.*

[2] A. Fortin, Analyse numérique pour ingénieurs*, Éditons de l'école polytechnique de Montréal, 1995.*

[3] M. Lakrib, Cours d'analyse Numérique*, O.P.U 2014.*

[4] J.L. Merrien, Analyse numérique avec matlab*, Dunod 2007.*

[5] J. Kiusalaas, Numerical Methods in Engineering with MATLAB *,Cambridge University Press 2009.*