Série 2

Résolution des systèmes d'équations linéaires

Exercice 1 :

Trouvez les factorisations de Cholesky des matrices suivantes :

$$(a)\ \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix},\quad (b)\ \begin{pmatrix} 4 & -12 \\ -12 & 45 \end{pmatrix},\quad (c)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 14 \end{pmatrix},\quad (d)\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},\quad (e)\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Soit t ∈ R et considérons le système linéaire décrit par la matrice augmentée suivante :

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & t & d \end{array}\right.$$

Pour quelles valeurs de t ce système n'a-t-il

(i) Aucune solution,

(ii) Une solution unique, et infinité de solutions ?

Soit h;k ∈ R et considérons le système suivant d'équations linéaires dans les variables x,y ; et z :

$$\begin{cases} x + y + hz = 1 \\ y - z = k \\ x - y + 2z = 3 \end{cases}$$

Pour quelles valeurs de h et k ce système n'a-t-il

(i) Aucune solution,

(ii) Une solution unique, et une infinité de solutions ?

Exercice 2:

1- Résolvez le système d'équations linéaires suivant à l'aide de l'élimination gaussienne. Déterminez et indiquez si le système a une solution ou s'il est incohérent.

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 5 \\ 3x + 2y - 4z = 7 \\ x - y + 2z = 4 \end{cases}\qquad \begin{cases} 2x + 4y - 3z = 11 \\ 3x - 5y + 2z = 9 \\ 4x - y + 3z = 13 \end{cases}\qquad \begin{cases} 2x + 3y - z = 5 \\ 4x + 6y - 2z = 10 \\ 6x + 9y - 3z = 15 \end{cases}$$

- Le système, qui n'a pas pu être résolu par élimination gaussienne, tente de trouver la solution la plus proche avec une erreur d'arrêt de ε = 0,01 en utilisant la méthode de Jordan. D'où $\begin{matrix} x^0 = 0 \\ y^0 = 0. \\ z^0 = 0 \end{matrix}$

2- Soit les deux systèmes ci-après :

$$S_1 \begin{cases} -9\,x - 6\,y + 15\,z = 93 \\ -6\quad x + 12\,y + 14\,z = -2 \\ 15\,x + 14\,y - 25\,z = -179 \end{cases}\qquad S_2 \begin{cases} 8x - 3\,y + 2\,z = 8 \\ 4\,x + 11\,y - z = 23 \\ 6\,x + 3\,y + 12\,z = 48 \end{cases}$$

- Résoudre le système d'équations S_1 en utilisant l'algorithme de Cholesky.
- En appliquant l'algorithme de Jacobi, résoudre le système S_2: Avec $X^{(0)} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ et $\varepsilon = 10^{-1}$