Chapitre III

Résolution des systèmes d'équations Non linéaires

Objectif du chapitre

- ✓ ***Méthode de Newton pour la résolution d'une équation non linéaire***
- ✓ ***Méthode de Newton pour la résolution d'un système d'équations non linéaires***

III.1 Méthode de Newton pour la résolution d'une équation non linéaire

La méthode de Newton-Raphson, encore appelée méthode de la tangente ou encore méthode de Newton. Consiste à construire une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$; telle que l'itéré x_{n+1} est obtenue comme l'intersection de la tangente à la courbe de f (x) au point $(x_n; f(x_n))$ avec l'axe des abscisses.

Cette tangente à pour équation :

$$y = f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) + f(x_n)$$

En posant $y = 0$ on obtient la formule de Newton

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

En effet, soit $\hat{x}$ une racine recherchée et x_0 une estimation à priori de $\hat{x}$, supposons également que la fonction f est de classe C^2 au voisinage de $\hat{x}$, le développement de Taylor d'ordre 1 donne

$$f(\hat{x}) = f(x_0) + f'(x_0)(\hat{x} - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2}(\hat{x} - x_0)^2 \quad avec\ \xi \in]\hat{x}, x_0[$$

comme $f(\hat{x}) = 0$ on obtient :

$$0 = f(x_0) + f'(x_0)(\hat{x} - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2}(\hat{x} - x_0)^2 \qquad (*)$$

En négligeant le reste :

$$\frac{f''(\xi)}{2}(\hat{x} - x_0)^2$$

L'équation (*) peut être approximée par :

$$0 \simeq f(x_0) + f'(x_0)(\hat{x} - x_0) \Rightarrow \hat{x} \simeq x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_1$$

En répétant le processus on obtient la formule de récurrence :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

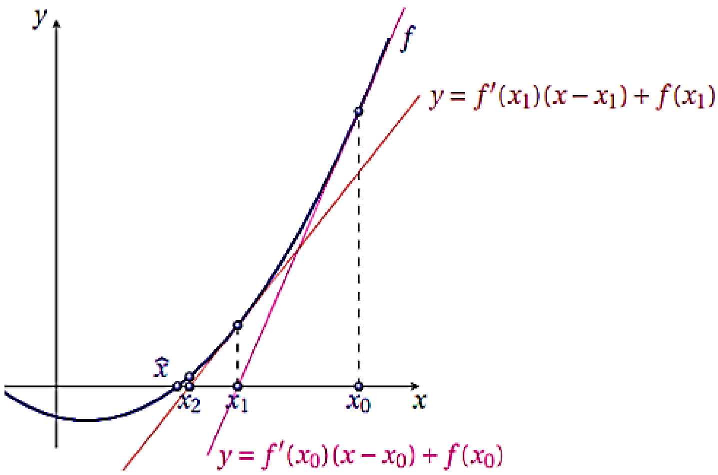

Figure III.1 e 6.2 : Construction des premiers itères de la méthode de Newton

On remarque que la méthode de Newton nécessite à chaque itération l'évaluation des deux fonctions f et f' au point courant x_n. Cet effort est compensé par le fait que cette méthode est deconvergence quadratique si la racine recherchée est simple. En effet, on a :

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

et

$$\phi' = \frac{f(x).f''(x)}{f'(x)} = 0 \quad \text{en } x$$

donc l'algorithme est d'ordre 2.

Remarque *Si la racine x est de multiplicité m, nous avons l'algorithme suivant :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = x_n - m\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

La plus grande difficulté dans l'utilisation de la méthode de NEWTON-RAPHSON réside dans le caractère local de sa convergence. Si l'initialisation x_0 est trop éloignée de la racine, la méthode peut très bien diverger. Pour cette raison, il est courant dans les applications de l'associer à une méthode d'encadrement, comme la méthode de dichotomie, cette dernière permettant d'approcher, bien que lentement, la racine recherchée de manière à fournir une bonne initialisation pour la méthode de NEWTON-RAPHSON.

En conclusion, la méthode de NEWTON-RAPHSON est la méthode de choix en termes de vitesse de convergence, puisqu'elle converge de manière quadratique pour un x_0 assez proche de x. Par ailleurs, elle nécessite pour cela que la dérivée de la fonction f puisse être évaluée en tout point donné. Si cela n'est pas le cas, on utilisera la méthode de la sécante (voir la prochaine section), dont la vitesse de convergence est moindre mais ne requiert pas que la dérivée de f existe.

3.2 Méthode de Newton pour system des equation non liniare

La méthode de Newton pour la résolution d'un systéme d'équations est une généralisation de l'algorithme de Newton pour la recherche du zéro d'une fonction unidimensionnelle. Le fait qu'un algorithme pour un probléme unidimensionnel puisse ^etre efficacement généralisé au cas multidimensionnel est une situation exceptionnelle. La méthode de Newton est souvent aussi appelée méthode de Newton-Raphson

3.2.1 Présentation de la méthode

Dans la formulation classique on écrit le système d'équations comme

$$F(y) = 0 \equiv \begin{cases} f_1(y) = 0. \\ f_2(y) = 0 \\ . \\ . \\ . \\ f_n(y) = 0 \end{cases}$$

Cette écriture est équivalente à la notation $h(y, z) = 0$, à la différence que les variables z sont directement dans F.

On approche la solution y^* par la séquence $\{y^{(k)}\}_{k=1,2,\ldots}$. Etant donné $y^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ et une évaluation de la matrice Jacobienne

$$\nabla F(y^{(k)}) = \begin{bmatrix} \frac{\delta f_1}{\delta y_1}\big|_{y_1=y_1^k} & \cdots & \frac{\delta f_1}{\delta y_n}\big|_{y_n=y_n^k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta f_n}{\delta y_1}\big|_{y_1=y_1^k} & \cdots & \frac{\delta f_n}{\delta y_n}\big|_{y_n=y_n^k} \end{bmatrix}$$

on construit une approximation meilleure $y^{(k+1)}$ de y^* . Pour ce faire on approche $F(y)$ dans le voisinage de $y^{(k)}$ par une fonction affine

$$F(y) \approx F(y^{(k)}) + \nabla F(y^{(k)})(y - y^{(k)}).$$

On peut résoudre ce "modèle local" pour obtenir une valeur de y qui satisfasse

$$F(y^{(k)}) + \nabla F(y^{(k)})(y - y^{(k)}) = 0,$$

c'est à dire

$$y = y^{(k)} - (\nabla F(y^{(k)}))^{-1} F(y^{(k)}).$$

On construira alors un nouveau mod'ele local autour de la valeur obtenue pour y . A l'itération k on a

$$y^{(k+1)} = y^{(k)} - (\nabla F(y^{(k)}))^{-1} F(y^{(k)}),$$

et $y^{(k+1)}$ est solution du système linéaire

$$\underbrace{\nabla F(y^{(k)})}_{J}\underbrace{(y^{(k+1)} - y^{(k)})}_{s} = -\underbrace{F(y^{(k)})}_{b}.$$

Méthode de Newton

La méthode de Newton est l'une des méthodes numériques les plus populaires et est mémé désignée par Burden et Faires comme la méthode la plus puissante utilisée pour résoudre l'équation

$$f(x) = 0.$$

Cette méthode provient du développement en série de Taylor de la fonction

$$f(x),$$

autour du point x_1.

$$f(x) = f(x_1) + (x - x_1) f'(x_1) + \frac{1}{2!}(x - x_1)^2 f''(x_1) + \cdots.$$

Où j et ses dérivées du premier et du seconde ordre. f' et f'' sont calculés en x_1 si nous prenons les deux premier termes du développement en série de Taylor,nous avons

$$f(x) \approx f(x_1) + (x - x_1) f'(x_1).$$

On pose alors (3.2) à zéro(i.e $f(x) = 0$ pour trouver la racine de l'équation qui nous donne

$$f(x_1) + (x - x_1) f'(x_1) = 0.$$

En réarrangeant le(3.3)nous obtenons la prochaine approximation de la racine, nous donnant $x = x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$

Ainsi en généralisant (3.4)on obtient La méthode itérative de Newton

$$x_i = x_{i-1} - \frac{f(x_{i-1})}{f'(x_{i-1})}, i \in \mathbb{N},$$

ou $x_i \to \bar{x}$ as $i \to \infty$, et est l'approximation d'une racine de la fonction $f(x)$.

Remarque *Lorsque les itérations commencent à avoir les memes valeurs réétées, as x_i c'est à dire $x_i = x_{i+1} = barx$, cela indique que*

$$f(x) = 0$$

converge versbarx. Ainsi ,x_i est la racine de la fonction $f(x)$.

Preuve de remarque :

Puisque

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

si $x_i = x_{i+1}$, alors

$$x_i = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}.$$

Cela implique que

$$\frac{f(x_i)}{f'(x_i)} = 0,$$

et donc

$$f(x_i) = 0.$$

Un autre indicateur que x_i est la racine de la fonction est s'il satisfait que $|f(x_i)| < \epsilon$ où $\epsilon > 0$ est une tolérance donnée. Cependant, (3.5) ne peut être utilisé que pour résoudre des équations non linéaires ne faisant intervenir qu'une seule variable. Cela signifie que nous devons prendre (3.5) et le modifier, afin de l'utiliser pour résoudre des équations algébriques non linéaires impliquant plusieurs variables.

Nous savons de l'algèbre linéaire que nous pouvons prendre des systèmes d'équations et exprimer ces systèmes sous la forme de matrices et de vecteurs. Dans cet esprit et en utilisant la Définition 2.2.

nous pouvons exprimer le système non linéaire comme une matrice avec un vecteur correspondant. Ainsi, l'équation suivante est dérivée :$\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k-1)} - J\left(\mathbf{x}^{(k-1)}\right)^{-1} \mathbf{F}\left(\mathbf{x}^{(k-1)}\right)$ ou $k = 1, 2, \ldots, n$ représente l'itération $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

F est une fonction vectorielle, et ($J(\mathbf{x}))^{-1}$ ' est l'inverse de la matrice jacobienne. Cette équation représente la procédure de Newton Méthode de résolution de systèmes algébriques non linéaires. Cependant, au lieu de résoudre l'équation $f(x) = 0$, nous résolvons maintenant le système $F(x) = 0$. Nous allons maintenant passer par l'équation et définir chaque composant.

(1) Soit F une fonction qui envoie $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$.

$$\mathbf{F}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{bmatrix}$$

où : $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

(2) Soit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Alors $\mathbf{x}$ représente le vecteur

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

où a,$x_i \in \mathbb{R}$ and $i = 1, 2, \ldots, n$. (3) D'après la Définition 2.13, nous savons que $J(\mathbf{x})$ est la matrice jacobienne.

Ainsi $J(\mathbf{x})^{-1}$ est

$$J(\mathbf{x})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}^{-1}.$$

Nous décrivons maintenant les étapes de la méthode de Newton

Étape 1 :

Soit $\mathbf{x}^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right)$

Étape 2 :

Calculez $J\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)$ et $\mathbf{F}\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)$.

Nous devons maintenant calculer le vecteur $\mathbf{y}^{(0)}$, où

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Afin de trouvery$^{(0)}$, nous résolvons le système linéaire $J\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)\mathbf{y}^{(0)} = -\mathbf{F}\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)$, en utilisant l'élimination gaussienne.

Remarque 3.2.2.
En réarrangeant le système à l'étape 3, nous obtenons que

$$\mathbf{y}^{(0)} = -J\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)^{-1}\mathbf{F}\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)$$

nous pouvons remplacer . La signification de ceci est que, puisque

$$\mathbf{y}^{(0)} = -J\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)^{-1}\mathbf{F}\left(\mathbf{x}^{(0)}\right) ,$$

nous pouvons remplacer $-J\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)^{-1}\mathbf{F}\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)$),
dans note formule itérative par $\mathbf{y}^{(0)}$.

Ce résultat donnera que $\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k-1)} - J\left(\mathbf{x}^{(k-1)}\right)^{-1}\mathbf{F}\left(\mathbf{x}^{(k-1)}\right) = \mathbf{x}^{(k-1)} - \mathbf{y}^{(k-1)}$

Étape 4 : une fois que $\mathbf{y}^{(0)}$ est trouvé,nous pouvons maintenant terminer la première itération en résolvant pour $\mathbf{x}^{(1)}$. Ainsi,en utilisant le résulta de étape 3 ;nous avons cel

2.1 Méthode de point fixe :

Une des méthodes parmi les plus importantes de résolutions numérique des équations est la méthode du point fixe appliquée à la résolutions d'équations non linéaires consiste à élaborer un schéma itératif, en l'occurrence une suite convergente vers un point fixe x d'une certaine application g, ce point fixe est en l'occurrence. L'objectif ce méthode est la résolution d'équation du type

$$f(x) = 0. \tag{2.2}$$

Soit x^* une solution de $f(x) = 0$, replaçons l'équation par une équation équivalente ou l'idée générale est de se ramener à une équation du type :

$$g(x) = x \tag{2.3}$$

où $x = x^*$ est un point fixe de l'application g.

Cette section est divisée en trois paragraphes. Dans le premier paragraphe, nous commençons par présentation de la méthode et démontrons un théorème d'existence et d'unicité de la solution, puis trois points de convergence ont été étudiés sur les données. Ensuite, dans le deuxième paragraphe nous donnons critère de convergence du méthode. Enfin, dans le troisième paragraphe, nous énonçons exemple numériques.

Les techniques employées sont basées sur la théorie de résoudre l'équation non linéaire, suivi par méthode de points fixes.

2.1.1 Présentation de la méthode

On introduit alors une suite d'itérée $(x_n)_{n\geq 0}$ qui converge vers le point fixe α de g, qui est en l'occurrence la solution de l'équation $f(x) = 0$, en une équation équivalente $g(x) = x$ où g est une fonction auxiliaire bien choisie. Le point α est alors un point fixe de

g. Approcher les zéros de f revient à approcher les points fixes de g. Le choix de la fonction g est motivé par les exigences du théorème de point fixe.

En effet, elle doit être contractante dans un intervalle I de α, ce qui revient à vérifier que $|g'(x)| < 1$ sur ce intervalle.

Dans ce cas, on construit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} x_0 \text{ dans } [a, b], \\ x_{n+1} = g(x_n), \qquad \forall n \geq 0. \end{cases} \tag{2.4}$$

Il ne reste plus qu'à appliquer localement le théorème de point fixe pour démontrer que

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} x_n. \tag{2.5}$$

Etant donnée f, il y a plusieurs choix possibles pour g.

Exemple 2.1. *Vous avez l'équation suivante*

$$x^2 - a = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - a = 2x, \Longleftrightarrow \frac{1}{2}(x^2 - a + 2x) = x.$$

Quel est le bon choix pour g ?. Il sera nécessaire de demander que g soit contractante

Applications contractantes

Une application g est k-contractante sur un intervalle I lorsque

1. $g(I) \subseteq I$, (indispensable pour itérer g).
2. Il existe une constante k vérifiant $0 \leq k < 1$ telle que, pour tout x et y dans I,

$$|g(y) - g(x)| = k|y - x|. \tag{2.6}$$

Remarque 2.1.1. *Si g est dérivable sur I et $|g'(x)| < 1$ est majorée par k, alors, d'après la formule des accroissements finis, g vérifie (2-).*

Théorème du point fixe

Theoreme 2.1. *[?] **Existence***
Si $g \in C([a,b])$ et $g'(x) \in C([a,b])$, alors g a un point fixe α en $[a,b]$.

Unicité.
Si $g' \in C[a,b]$ et s'il existe une constante k dans]0,1[telle que

$$|g'(x)| \leq k, \tag{2.7}$$

sur $[a,b]$ alors
(1) *Le point fixe α est unique.*
(2) *La suite définie par $x_{n+1} = g(x_n)$ converge vers α le point fixe de g, $\forall x_0 \in [a,b]$.*

Test d'arrêt.

Comme nous l'avons expliqué dans l'introduction, la suite x_n converge vers un réel α vérifiant $g(\alpha) = \alpha$. En fixant la tolérance ϵ on estime qu'on atteint la précision ϵ dès qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$| x_{n_0+1} - x_{n_0} | < \epsilon.$$

Néanmoins, la situation devient plus concrète lorsque g est négative au voisinage de α.

Proposition *[4] Soit $g : [a, b] \to [a, b]$ de classe C . On suppose que g admet un unique point $\alpha \in [a, b]$ vérifiant $-1 < g'(x) < 0$ pour tout x dans un intervalle de convergence $[a, b]$ de α , soit la suite (x_n) définie par*

$$\begin{cases} x_0 \in [a, b], \\ x_{n+1} = g(x_n), \quad \forall n \geq 0. \end{cases} \tag{2.15}$$

Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad | x_{n+1} - \alpha | \leq | x_{n+1} - x_n | .$$

Par conséquent, soit n_0 tel que $| x_{n_0} - \alpha | < \epsilon$; alors x_{n_0} approche α à ϵ près.

Démonstration On applique le théorème des accroissements finis à g entre x_n et α. Il existe alors (c_n) entre x_n et α telle que

$$g(x_n) - g(\alpha) = g'(c_n)(x_n - \alpha).$$

Ce qui donne

$$x_{n+1} - \alpha = g'(c_n)(x_n - \alpha).$$

Comme $g'(c_n) \leq 0, (x_{n+1} - \alpha)$ et $(x_n - \alpha)$ sont de signes contraires.

Quelques exemples

Exemple 01 :

Trouver les racines de l'équation par la méthode du point fixe :

$$f(x) = x^2 - 5x + 4.$$

On choisit l'intervalle $[0, 2]$ alors $f(0) = 4 > 0$ et $f(2) = -10 < 0$.
En effet $f(0) \times f(2) < 0$, alors le racine d'équation dans l'intervalle $[0, 2]$.
On choisit entre les deux fonctions suivantes la fonction qui vérifie

$$x = g(x) = \frac{x^2 + 4}{5}.$$
$$x_{n+1} = g(x_n) = \frac{x_n^2 + 4}{5}.$$

On prend la première approximation $x_0 = 2$

$$x_1 = \frac{x_0^2+4}{5} = \frac{2^2+4}{5} = \frac{8}{5} = 1,6.$$
$$x_2 = \frac{x_1^2+4}{5} = \frac{(1,6)^2+4}{5} = \frac{6,16}{5} = 1,312.$$
$$x_3 = \frac{(1,312)^2+4}{5} = \frac{5,721}{5} = 1,144.$$
$$x_4 = \frac{(1,144)^2+4}{5} = \frac{5,309}{5} = 1,062.$$
$$x_5 = \frac{(1,062)^2+4}{5} = \frac{5,126}{5} = 1,025.$$
$$x_6 = \frac{(1,025)^2+4}{5} = \frac{5,051}{5} = 1,010.$$
$$x_7 = \frac{(1,010)^2+4}{5} = \frac{5,020}{5} = 1,004.$$
$$x_8 = \frac{(1,004)^2+4}{5} = \frac{5,008}{5} = 1,0016.$$
$$x_9 = \frac{(1,0016)^2+4}{5} = \frac{5,0032}{5} = 1,00064.$$
$$x_{10} = 1,000256.$$

On remarque que la suite de nombres x_1 jusqu'à x_{10} converge vers la racine $x = 1$ de l'équation donnée car les solutions sont arrondies à trois chiffres après la faune.

Pour trouver l'autre racine de l'équation, on prend la première approximation $x_0 = 5$, et on trouve

$$x_1 = \frac{x_0^2+4}{5} = \frac{(5)^2+4}{5} = \frac{29}{5} = 5,8.$$
$$x_2 = \frac{x_1^2+4}{5} = \frac{(5,8)^2+4}{5} = \frac{37,64}{5} = 7,528.$$
$$x_3 = \frac{x_2^2+4}{5} = \frac{(7,528)^2+4}{5} = \frac{60,6}{5} = 12,12.$$

On remarque que la suite de nombres x_1, x_2, x_3 diverge, cela signifie que le choix de la fonction récursive $g(x)$ n'est pas approprié .