جامعة العربي بن مهيدي – أم البواقي–
كلية العلوم الاقتصادية والعلوم التجارية وعلوم التسيير
قسم الجذع المشترك

السنة الجامعية: 2022 - 2023
المستوى: سنة اولى
التخصص: الجذع المشترك

مقياس الرياضيات 1 (حل السلسلة الرابعة) الاشتقاقية

التمرين 01 :

1) $f'(x) = 20x^3 - 45x^2$

2) $g'(x) = \frac{(2x-5)(x-3)-(x^2-5x)}{(x-3)^2}$

3) $h'(x) = \frac{-xsinx-cosx}{x^2}$

التمرين 02 :

1) $f'(x) = 7(3x^2 - 10x)(x^3 - 5x^2 - 4)^6$

2) $g'(x) = \dfrac{-3(2x-2)(x^2-2x-3)^2}{(x^2-2x-3)^6}$

3) $h'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2-4}}$

-التمرين 03 :

1)

$$f'(x) = e^x(x^5 - x^3 + 4)+e^x(5x^4 - 3x^2)$$

$$f''(x) = e^x(x^5 + 5x^4 - x^3 - 3x^2 + 4)+e^x(5x^4 + 20x^3 - 3x^2 - 6x)$$

2)

$$h'(x) = \frac{2x-1}{x^2-x+1}$$

$$h''(x) = \frac{2(x^2-x+1)-(2x-1)(2x-1)}{x^2-x+1}$$

حل السلسلة 04

التمرين 04:

1. Si $x \neq 0$,

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} ax + b = b = f(0)$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1+x} = 1$$

i $b = 1$.

2. Si $x \neq 0$

Si $x < 0$ alors $f'(x) = a$, si $x > 0$ alors $f'(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}$ et

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{-1}{(1+x)^2} = -1$$

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) \Leftrightarrow -1 = a$$

Si $b = 1$ et si $a = -1$

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} f'(x)$$

التمرين05

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

, avec $x \neq 0$.

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{|x|\sin(x)}{x} = \frac{|x|}{x}\sin(x)$$

Pour $x \neq 0$, $\frac{|x|}{x} = \pm 1$, $\sin(x) \to 0$ lorsque $x \to 0$ donc

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$$

$$\frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \frac{\ln(1+|x|)}{x}$$

Admet une limite finie en 0, avec $x \neq 0$.

Pour $x < 0$,

$$\frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \frac{\ln(1-x)}{x}$$

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$$

Avec $t = -x$ pour trouver que

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{\ln(1-x)}{x} = -1$$

Pour $x > 0$,

$$\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\frac{\ln(1+x)}{x}$$
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

Ces deux limites sont distinctes donc g n'est pas dérivable.

التمرين06

(1

•

Soit $x \neq -1$, alors $f_1'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$, $f_1''(x) = +\frac{2(1+x)}{(1+x)^4} = \frac{2}{(1+x)^3}$, et $f_1^{(3)}(x) = -\frac{2\cdot 3(1+x)^2}{(1+x)^6} = -\frac{6}{(1+x)^4}$.

On suppose que, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \neq -1$, $f_1^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$.

Donc, pour $x \neq -1$, $f_1^{(n+1)}(x) = -\frac{(-1)^n n!\cdot(n+1)(1+x)^n}{(1+x)^{2(n+1)}} = \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{(1+x)^{n+2}}$.

pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \neq -1$, on a $\boxed{f_1^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}.}$

(2

. Soit $x \neq 1$, alors $f_2'(x) = -\frac{-1}{(1-x)^2} =$

$\frac{1}{(1-x)^2}$, $f_2''(x) = -\frac{(-1)\cdot 2(1-x)}{(1-x)^4} = \frac{2}{(1-x)^3}$, et $f_2^{(3)}(x) = -\frac{2\cdot(-3)(1-x)^2}{(1-x)^6} = \frac{6}{(1-x)^4}$.

On suppose que, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \neq 1$, $f_2^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$.

Donc, pour $x \neq 1$, $f_2^{(n+1)}(x) = \frac{n!\cdot(-1)\cdot(n+1)(1-x)^n}{(1-x)^{2(n+1)}} = \frac{(n+1)!}{(1-x)^{n+2}}$.

$n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \neq 1$, on a $\boxed{f_2^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}.}$

(3

On a avec la formule de Leibniz, $\forall n \in \mathbb{N}$, $k^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k e^x = xe^x + ne^x$.

(4

Exercice 20.7 *Les deux fonctions* $g(x) = x^2 + x + 1$ *et* $h(x) = e^{-x}$

formule de Leibniz $$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k g^{(k)}(x) h^{(n-k)}(x).$$

$$C_n^0 g^{(0)}(x) h^{(n)}(x) + C_n^1 g^{(1)}(x) h^{(n-1)}(x) + C_n^2 g^{(2)}(x) h^{(n-2)}(x) + \sum_{k=3}^{n} C_n^k g^{(k)}(x) h^{(n-k)}(x),$$

$$h^{(n)}(x) = (-1)^n e^{-x} \text{ (qui se prouve facilement par récurrence),}$$

$$f^{(n)}(x) = \left[(-1)^n g^{(0)}(x) + n(-1)^{n-1} g^{(1)}(x) + \tfrac{n(n-1)}{2}(-1)^{n-2} g^{(2)}(x)\right] e^{-x} + \sum_{k=3}^{n} C_n^k \underbrace{g^{(k)}(x)}_{=0 \text{ si } n \geq 3} h^{(n-k)}(x)$$

$$= (-1)^n \left[(x^2 + x + 1) - n(2x+1) + \tfrac{n(n-1)}{2} \times 2\right] e^{-x} = (-1)^n \left[x^2 + (1-2n)x + 1 - 2n + n^2\right] e^{-x}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f^{(n)}(x) = (-1)^n \left(x^2 + (1-2n)x + 1 - 2n + n^2\right) e^{-x}$$

On vérifie avec $n = 0$ *que l'on a* $f^{(0)}(x) = (x^2 + x + 1) e^{-x}$

(5

Exercice 20.9 *Très facile, si on pose* $f(x) = \frac{1}{n!} x^n (1 + x^n) = x^n + x^{2n}$ *alors* $f^{(n)}(x) = \frac{1}{n!}\left(n! + \frac{2n!}{n!} x^n\right) = 1 + C_{2n}^n x^n$.