جامعة العربي بن مهيدي – أم البواقي–
كلية العلوم الاقتصادية والعلوم التجارية وعلوم التسيير
قسم الجذع المشترك

السنة الجامعية: 2022 - 2023
المستوى: سنة اولى
التخصص: الجذع المشترك

مقياس الرياضيات 1 (حل السلسلة الثالثة)
الدوال العددية

التمرين الاول : مجموعة تعريف الدوال

$$D_f = IR - \{-3,1\},(c \quad , \quad D_f = \left[\frac{-1}{2}, +\infty\right[\ (b\ , \qquad D_f = IR - 4 \ \ (a$$

$$D_f = [1, +\infty[\ (e\ , \qquad D_f =]-\infty, 3[(d$$

التمرين الثاني : النهايات

(1

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{4x^4 - 2x^3 + 6}{2x^4 + 2x^2 + 3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4 - 2/x + 6/x^4}{2 + 2/x^2 + 3/x^4} = 2.$$

(2

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{x+1-x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}.$$

On a donc $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = 0.$

$$\lim_{x\to2} \frac{x-2}{x^2-4} = \lim_{x\to2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4} \quad (3$$

(4

$$\lim_{x\to+0} \left(\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1} - \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} - 1} \right) =$$

$$= \lim_{x\to+0} \frac{\left(\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1} - \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} - 1} \right)\left(\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1} + \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} - 1} \right)}{\left(\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1} + \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} - 1} \right)}$$

$$= \lim_{x\to+0} \frac{2}{\left(\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1} + \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} - 1} \right)} = 0,$$

التمرين الثالث :

$$\lim_{x\to5} f(x) = f(5) = 10 \ \ (1$$

و منه f مستمرة عند 5.

$$\lim_{x\to2} g(x) = \lim_{x\to2} \frac{1}{\sqrt{x-1}+1} = \frac{1}{2}$$

و منه g مستمرة عند 2 اذا وفقط اذا كان $\frac{1}{2} = 2b + 1$

$$b = \frac{-1}{4} \ (2$$

التمرين الرابع :

لدينا f مستمرة على IR-{4 ,1} لانها دالة كثير حدود في كل مجال.
دراسة الاستمرارية عند 4

$$\lim_{x\to 4+} f(x) = 16 - m = \lim_{x\to 4-} f(x) = 4b + 2$$

دراسة الاستمرارية عند 1

$$\lim_{x\to 1+} f(x) = b + 2 = \lim_{x\to 1-} f(x) = -2$$

و منه
b=-4 et m=30

التمرين الخامس :

$$1) S = \left\{\frac{-1}{3}\right\}, \quad 2) S = \emptyset, \quad 3) S = \{\ln 7\},$$

$$4) S = \{2\ln 2\}, \quad 5) S = \{\ln 2\}, \quad 6) S = \{\ln 3\},$$

$$7) S = \left\{\frac{1}{2}\right\},$$

التمرين السادس :

1) L'équation est définie si et seulement

$$\begin{cases} 2+5x>0 \\ x+6>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-\frac{2}{5} \\ x>-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in \left]-\frac{2}{5};+\infty\right[\\ x\in]-6;+\infty[\end{cases} \Leftrightarrow x\in \left]-\frac{2}{5};+\infty\right[\cap]-6;+\infty[= \left]-\frac{2}{5};+\infty\right[$$

Pour tout $x\in \left]-\frac{2}{5};+\infty\right[$, $\ln(2+5x)=\ln(x+6) \Leftrightarrow 2+5x=x+6 \Leftrightarrow 4x=4 \Leftrightarrow x=1$. Comme $1\in \left]-\frac{2}{5};+\infty\right[$, $S=\{1\}$

2) L'équation est définie si et seulement

$$\begin{cases} x-1>0 \\ x-3>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x>3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in]1;+\infty[\\ x\in]3;+\infty[\end{cases} \Leftrightarrow x\in]1;+\infty[\cap]3;+\infty[=]3;+\infty[$$

Pour tout $x\in]3;+\infty[$,

$\ln(x-1)+\ln(x-3)=\ln(3) \Leftrightarrow \ln((x-1)(x-3))=\ln(3)$ (car $\ln(a)+\ln(b)=\ln(a\times b)$)

$\Leftrightarrow (x-1)(x-3)=3 \Leftrightarrow x^2-4x=0 \Leftrightarrow x(x-4)=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=4$.

Mais $0\notin]3;+\infty[$ donc $S=\{4\}$

3) L'équation est définie si et seulement $x\in]0;+\infty[$

$\ln x=2 \Leftrightarrow \ln x=2\times 1 \Leftrightarrow \ln x=2\times \ln e \Leftrightarrow \ln x=\ln(e^2) \Leftrightarrow x=e^2$. $\boxed{S=\{e^2\}}$

5) En posant $X=\ln x$, l'équation devient équivalente à l'équation du second degré $X^2+X-6=0$, que l'on sait résoudre : $X=2$ ou $X=-3$ En revenant à la variable x on a : $X=2 \Leftrightarrow \ln x=2 \Leftrightarrow x=e^2$ et $X=-3 \Leftrightarrow \ln x=-3 \Leftrightarrow x=e^{-3}$. Finalement, $\boxed{S=\{e^2;e^{-3}\}}$

8) L'équation $\ln\left(\left|\frac{x-1}{2x-1}\right|\right)=0$ n'est définie que si et seulement si $\frac{x-1}{2x-1}\neq 0$, donc d'après le tableau de signes ci-dessus, que si et seulement si $x\in \left]-\infty;\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2};1\right[\cup]1;+\infty[$. En utilisant la bijectivité de la fonction ln, on obtient $\ln\left(\left|\frac{x-1}{2x-1}\right|\right)=0 \Leftrightarrow \left|\frac{x-1}{2x-1}\right|=1 \Leftrightarrow \frac{x-1}{2x-1}=1$ ou $\frac{x-1}{2x-1}=-1$. La première équation a été résolue dans la question 2. La deuxième est $\frac{x-1}{2x-1}=-1 \Leftrightarrow x-1=-2x+1 \Leftrightarrow 3x=2 \Leftrightarrow x=\frac{2}{3}$. Ces deux solutions appartenant à l'ensemble de définition de l'équation, on conclut que $\boxed{S=\left\{0;\frac{2}{3}\right\}}$

11) L'équation $\ln(|x-1|)=\ln(|2x-1|)$ est définie si et seulement si on a simultanément $x-1\neq 0 \Leftrightarrow x\in]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$ et $2x-1\neq 0 \Leftrightarrow x\in \left]-\infty;\frac{1}{2}\right[\cup\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$, donc si et seulement si

$x\in\left(\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[\cup\left]\frac{1}{2};+\infty\right[\right)\cap(]-\infty;1[\cup]1;+\infty[)=\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[\cup\left]\frac{1}{2};1\right[\cup]1;+\infty[=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2};1\right\}$.

On utilise la bijectivité de la fonction ln : Pour tout $x\in\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[\cup\left]\frac{1}{2};1\right[\cup]1;+\infty[$, $\ln(|x-1|)=\ln(|2x-1|)\Leftrightarrow|x-1|=|2x-1|$, ce qui équivaut à deux équations :

$x-1=2x-1\Leftrightarrow x=0$ (déjà résolue dans la question 4) et $-x+1=2x-1\Leftrightarrow x=\frac{2}{3}$ (déjà résolue dans la question 10)

Puisque ces deux solutions appartiennent à l'ensemble de définition de l'équation, on conclut que $\boxed{S=\left\{0;\frac{2}{3}\right\}}$

التمرين السابع :

6) L'inéquation est définie si et seulement $2x-5>0\Leftrightarrow x\in\left]\frac{5}{2};+\infty\right[$

$\ln(2x-5)\geq 1\Leftrightarrow \ln(2x-5)\geq\ln(e)\Leftrightarrow 2x-5\geq e\Leftrightarrow x\geq\frac{e+5}{2}$

$S=\left]\frac{5}{2};+\infty\right[\cap\left]\frac{e+5}{2};+\infty\right[=\boxed{\left]\frac{e+5}{2};+\infty\right[}$,

2) $\ln(2x+1)\leq\ln(x+2)$, l'ensemble de définition est $\left]\frac{-1}{2},+\infty\right[$

$$S=\left]\frac{-1}{2},1\right]$$

3) $On\ pose: e^x=X, donc\ \ X^2-3X+2\geq 0\ si\ X\in\ ]-\infty,1]\cup[2,+\infty[,$

$$donc\ S=\ ]-\infty,0]\cup[ln2,+\infty[,$$

التمرين الثامن :

1) Le système $\begin{cases}x-y=\frac{3}{2}\\ \ln x+\ln y=0\end{cases}$ n'est défini que si et seulement si $x>0$ et $y>0$. On le résout par substitution :

$$\begin{cases}x-y=\frac{3}{2} & L_1\\ \ln x+\ln y=0 & L_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=x-\frac{3}{2} & L_1\\ \ln x+\ln\left(x-\frac{3}{2}\right)=0 & L_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=x-\frac{3}{2} & L_1\\ \ln\left[x\left(x-\frac{3}{2}\right)\right]=0 & L_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=x-\frac{3}{2} & L_1\\ x\left(x-\frac{3}{2}\right)=1 & L_2\end{cases}$$

On résout l'équation $x^2-\frac{3}{2}x-1=0\Leftrightarrow 2x^2-3x-2=0$ en calculant son discriminant $\Delta=(-3)^2-4\times2\times(-2)=9+16=25$ d'où l'existence de deux solutions réelles distinctes $x_1=\frac{-(-3)-\sqrt{25}}{2\times2}=\frac{3-5}{4}=-\frac{1}{2}$ et $x_2=\frac{-(-3)+\sqrt{25}}{2\times2}=\frac{3+5}{4}=2$. La seule valeur compatible avec l'ensemble de définition du système est $x=2$ donc $\begin{cases}y=2-\frac{3}{2}=\frac{1}{2} & L_1\\ x=2 & L_2\end{cases}$. Ainsi $\boxed{S=\left\{\left(2;\frac{1}{2}\right)\right\}}$

2) Le système $\begin{cases} 5\ln x + 2\ln y = 26 \\ 2\ln x - 3\ln y = -1 \end{cases}$ n'est défini que si et seulement si $x > 0$ et $y > 0$

On effectue un changement de variable en posant $X = \ln x$ et $Y = \ln y$. Le système $\begin{cases} 5\ln x + 2\ln y = 26 \\ 2\ln x - 3\ln y = -1 \end{cases}$ devient alors équivalent au système. $\begin{cases} 5X + 2Y = 26 & L_1 \\ 2X - 3Y = -1 & L_2 \end{cases}$ Comme $5\times(-3) - 2\times 2 \neq 0$, ce système admet une unique solution

$$\begin{cases} 5X + 2Y = 26 & L_1 \\ 2X - 3Y = -1 & L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 15X + 6Y = 78 & 3L_1 \\ 4X - 6Y = -2 & 2L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 19X = 76 & 3L_1 - 2L_2 \\ Y = \dfrac{2X+1}{3} & L_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X = \dfrac{76}{19} = 4 & 3L_1 - 2L_2 \\ Y = \dfrac{2\times 4 + 1}{3} = 3 & L_2 \end{cases} \boxed{\Leftrightarrow \begin{cases} X = 4 & 3L_1 - 2L_2 \\ Y = 3 & L_2 \end{cases}}$$

. Ainsi $S = \{(4;3)\}$

On « revient aux inconnues *x* et *y* » : $X = 4 \Leftrightarrow \ln x = 4 \Leftrightarrow x = e^4$ et $Y = 3 \Leftrightarrow \ln y = 3 \Leftrightarrow y = e^3$

Finalement $\boxed{S = \{(e^4;e^3)\}}$

$$2)\ \begin{cases} e^x + 2e^y = 3 \\ x = -y \end{cases} \to e^{-y} + 2e^y = 3 \to 2e^{2y} - 3e^y + 1 = 0 \to 2Y^2 - 3Y + 1 = 0$$

$$Y_1 = 1, Y_2 = \frac{1}{2} \to y_1 = ln1, y_2 = ln\frac{1}{2}$$

$$x_1 = -ln1, x_2 = -ln\frac{1}{2}$$