SÉRIES ENTIÈRES

1) Définitions et Notations
2) Rayon et Domaine de convergence
3) Critères de convergence
4) Dérivation d'une série entière
5) Intégration d'une série entière
6) Développement en série entière

Série entière :

1) Définition :

On appelle série entière toute série de fonction $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$

On écrit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n\geq 0} U_n$ Et $(a_n)_{n\geq 0}$ est une suite réelle ou complexe.

On appelle $U_n = a_n x^n$ le terme général de la série$\{S_n\}$.

Exemples : $\sum_{n\geq 0} x^n$, $\sum_{n\geq 0} \frac{i}{n+i} x^n$, $\sum_{n\geq 0} 3^n z^n$

2) Rayon de convergence :

On appelle rayon de convergence de la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

Le réel positif R tel que :

$$\begin{cases} \text{Si } |x| < R \text{ La série } \{S_n\} \text{ est convergente.} \\ \text{Si } |x| > R \text{ La série } \{S_n\} \text{ est divergente.} \end{cases}$$

3) Domaine de convergence : On appelle domaine de convergence de la série $\{S_n\}$ l'ensemble de Tous les points où elle est convergente.

Si $|x| < R$, $\{S_n\}$ convergente et le domaine de convergence est le disque De centre zéro et de rayon R . $D(0, R) = \{\ x \in \mathbb{R}\ /\ \ |x| < R\}$.

Théorème :

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière. Et R son rayon de convergence. On a

$$\begin{cases} R = 0 \iff D = \{0\}\ (\{S_n\} \text{ converge uniquement en } x = 0 \text{ ou } z = 0) \\ R = +\infty \iff D = \mathbb{R}\ (\text{ou } \mathbb{C}) \\ 0 < R < +\infty \iff D =]-R \quad R[\ \ (\text{ou } D = D(0, R)) \end{cases}$$

Remarque : Pour $x = \pm R$ On peut rien conclure sur la convergence de la série$\{S_n\}$.

4) Critères de convergence : (Calcul de rayon R)

$$\text{Soit} \sum_{n\geq 0} a_n x^n \text{ série entière.}$$

a) Critère de Cauchy- Hadamard

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\ |x| < 1$ La série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ est convergente.

Le rayon de convergence R donné par : $R = \dfrac{1}{l}$. Avec $l = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$

.

Exemples :

1) $\sum\limits_{n\geq 0} (2x)^n$, $a_n = 2^n$ On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2^n} = \lim\limits_{n\to+\infty} 2 = 2$

Alors $\sum\limits_{n\geq 0} (2x)^n$ convergente, de rayon $R = \dfrac{1}{2}$.

Pour $x = \dfrac{1}{2}$ la série numérique $\sum\limits_{n\geq 0} 1$ est divergente.

$\left(\text{Rappel : } \sum\limits_{n\geq 0} u_n \text{ convergente } \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0\right)$

Alors le domaine de convergence est $D = \left]-\dfrac{1}{2}\ \dfrac{1}{2}\right[$

2) $\sum\limits_{n\geq 1} \left(\dfrac{x}{n}\right)^n$ $R = \dfrac{1}{l}$, $l = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(\dfrac{1}{n}\right)^n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$

$$R = +\infty \quad \text{Et} \quad D = \mathbb{R} .$$

b) Critère de D'Alembert :

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| |x| < 1$ La série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ est convergente.

Le rayon de convergence R donné par : $R = \dfrac{1}{l}$. Avec $l = \lim\limits_{n \to +\infty} \left| \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \right|$

.

Exemples : 1) $\sum\limits_{n \geq 1} \dfrac{x^n}{n+1}$ $\qquad a_n = \dfrac{1}{n+1}$

$$\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \to +\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1. \quad \text{Alors : } R = 1.$$

Pour $x = 1$, $\sum\limits_{n \geq 1} \dfrac{1}{n+1} \sim \sum\limits_{n \geq 1} \dfrac{1}{n}$ divergente.

$\left(\text{Rappel : } \sum\limits_{n \geq 1} \dfrac{1}{n} \text{ est une série numérique harmonique divergente} \right)$

Alors : $D =]-1 \quad 1[$.

2) $\sum\limits_{n \geq 0} n!\, x^n$ $\qquad a_n = n!$

$$R = \frac{1}{l} \quad , \quad l = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \to +\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n \to +\infty} (n+1) = +\infty$$

$$\text{Alors : } R = \frac{1}{l} = 0$$

$\sum\limits_{n \geq 0} n!\, z^n$ Converge uniquement au point $x = 0$ $(D = \{0\})$.

5) Somme d'une série entière :

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon R.

On appelle $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ la somme partielle de la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$.

On appelle somme de la série $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ la limite de sa somme partielle.

On écrit : $S = \lim_{n\to+\infty} S_n$.

Exemple : $\sum_{n\geq 0} \left(\frac{x}{2}\right)^n$, $a_n = \frac{1}{2^n}$, $R = \frac{1}{\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}} = 2$, $D =]-2 \;\; 2[$

$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ Somme de n terme premier d'une suite géométrique de base $q = \frac{x}{2}$.

$S_n = \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1-\left(\frac{x}{2}\right)^n}{1-\frac{x}{2}}$, La somme de la série $\sum_{n\geq 0} \left(\frac{x}{2}\right)^n$. $S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \frac{2}{2-x}$.

6) Dérivation et intégration des séries entières :

Théorème :

soit $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière, de rayon R et de la somme S. Alors :

(1) Les séries $\sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}$ et $\sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$, obtenues par dérivation.

Et intégration terme à terme de la série $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$, ont le même rayon De convergence.

$$(2) \quad S'(x) = \left(\sum_{n\geq 0} a_n x^n\right)' = \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}$$

$$(3) \quad \int_0^x S(t)dt = \int_0^x \left(\sum_{n\geq 0} a_n t^n\right) dt = \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

Exemple : $\quad S = \displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{x^n}{(n-1)n}$

$\displaystyle\sum_{n\geq 0} x^n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x}$ Par intégration on obtient :

$\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -ln(1-x) \xRightarrow{m=n+1} \sum_{m\geq 1} \frac{x^m}{m} = -ln(1-x)$ Par intégration

$$\sum_{m\geq 1} \frac{x^{m+1}}{(m+1)m} = -\int_0^x ln(1-t)dt = (1-x)\, ln(1-x) + x \xRightarrow{n=m+1} \sum_{n\geq 2} \frac{x^n}{n(n-1)} = (1-x)ln(1-x) + x$$

7) Développement en série entière :

Soit $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Dérivable sur D. Et $x_0 \in D$.

On appelle la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ série de Taylor de f au voisinage de x_0 .

Théorème :

Toute fonction dérivable sur un intervale D est égale à la somme

D'une série entière convergente dans cet intervale.

Exemples : Développement au voisinage de zéro $(x_0 = 0)$.

1) $f(x) = e^x = f(0) + xf'(0) + \dfrac{x^2 f''(0)}{2} + \cdots + \dfrac{x^n f^{(n)}(0)}{n!} +$

$\quad = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$.

2) $f(x) = \sin(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n x^{2n+1} + \cdots = \displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$

3) $f(x) = \cos(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$

4) $f(x) = \text{sh}(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$, $\quad g(x) = ch(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

On a $\begin{cases} e^x = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots \\ e^{-x} = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n x^n}{n!} = 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}x^n + \cdots \end{cases}$

$$sh(x) = x + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \cdots = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

$$ch(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + \cdots = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n)!} x^{2n}$$

5) $f(x) = ln(1+x)$

On a par la division suivant les puissances croissantes :

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots = \sum_{n\geq 0} (-1)^n x^n$$

$$f(x) = ln(1+x) = \int_0^x \frac{du}{1+u} = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$$

Exemples :

1) $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2+2x-3} = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{1-x} - \frac{1}{x+3}\right) = \frac{3}{4}\sum_{n\geq 0} x^n - \frac{1}{12}\frac{1}{1+\frac{x}{3}} = \frac{3}{4}\sum_{n\geq 0} x^n - \frac{1}{12}\sum_{n\geq 0}(-1)^n \left(\frac{x}{3}\right)^n$

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{4}\left(3 - \frac{(-1)^n}{3^{n+1}}\right)$$

$ln(4+x)=?$ On a $\left(ln(4+x)\right)'=\frac{1}{4+x}=\frac{1}{4}\frac{1}{1+\frac{x}{4}}=\frac{1}{4}\sum_{n\geq 0}(-1)^n\left(\frac{x}{4}\right)^n=\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{x^n}{4^{n+1}}$

Par intégration on obtient : $ln(4+x)=\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{n\,4^{n+1}}x^n$