

Série N°05 : Vecteurs aléatoires gaussiennes

Exercice 01 :

Soient X, Y, Z trois variables gaussiennes centrées de variance $\sigma_X^2 = 3^2$, $\sigma_Y^2 = 2^2$, et $\sigma_Z = 1$ respectivement. On sait que :

$$\text{Cov}(X, Y) = -1, \quad \text{Cov}(X, Z) = -3, \quad E(YZ) = 2$$

1. Que peut-on dire de la loi de Z ?
2. Calculer $\rho(X, Y)$, $\text{Cov}(Y, Z)$, $\text{Cov}(2X + 1, X + Y)$, $\text{Cov}(2X + 1, Y - Z)$.
3. On suppose que Y indépendant de Z . Calculer le coefficient de corrélation de $2X + 1$ et $Y - Z$.

Exercice 02 :

Soit $X = (X_1, X_2, X_3)^t$ un vecteur gaussien de moyenne $\mu_X = (3 \ 0 \ 10)^t$ et de matrice de covariance :

$$\Sigma_X = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer la loi de X_1 , X_2 , et X_3 .
2. Que peut-on dire de X_3 et de (X_1, X_2) ?
3. déterminer la loi de la variable $Y = X_1 + 2X_2 - X_3$? même question si $Y = X_1 + X_2 + X_3$.

Exercice 03 :

Soit $X = (X_1, X_2, X_3)^t$ un vecteur gaussien centré de matrice de variance-covariance :

$$\Sigma_X = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer la loi de X_1 , X_2 , et X_3 .
2. Que peut-on dire de X_3 et de (X_1, X_2) ?
3. Quelle est la loi du vecteur $Y = (X_1, X_2)$?
4. On définit la variable aléatoire U comme suite :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad U = X_2 + aX_1$$

Quelle est la loi de la variable aléatoire U ?

5. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, le vecteur (X_2, U) est un vecteur gaussien.

6. Déterminer a de sorte que X_2 et U soient indépendantes.

Exercice 04 : Soient Z_1 et Z_2 deux variables aléatoires **indépendantes gaussiennes centrées réduites**. On définit les deux variables X et Y comme suite :

$$X = \frac{Z_1 + Z_2}{\sqrt{2}}, \quad Y = \frac{Z_1 - Z_2}{\sqrt{2}}$$

1. Quelle est la loi du vecteur $Z = (Z_1, Z_2)$?
2. Quelle est la loi de la variable aléatoire X ?
3. Quelle est la loi de la variable aléatoire Y ?
4. Quelle est la loi de vecteur (X, Y) ?
5. Que peut-on dire de l'indépendance de X et Y ?