في الفصول السابقة تم حساب الفائدة والقيمة الحالية باستخدام الفائدة البسيطة، أي أنه طوال مدة عملية الإقراض أو التوظيف حساب الفائدة يستند على المبلغ الأصلي فقط (رأس المال الأولي)، وهذا راجع إلى أن العمليات المالية قصيرة الأجل لا تتجاوز في العادة السنة الواحدة أو عشرات الأيام.

أما عندما تكون عملية الإقراض أو التوظيف طويلة الأجل، والتي يمكن أن تمتد لعدة سنوات، فمن العادة أن المقرض في نهاية المدة المتفق عليها مع المقترض، سنة على سبيل المثال، ينظر إلى الفائدة البسيطة التي تم تكوينها على المبلغ الأصلي خلال هذه السنة على أنها رأس مال جديد، وذلك بعد جمعها مع المبلغ الأصلي (رأس المال الأولي)، والذي ستحسب عليه فائدة في السنة الموالية وهكذا...

وعليه يقال أن مبلغ ما وظف (أقرض) بفائدة مركبة إذا كانت الفائدة المحصل عليها تضاف إلى المبلغ الأصلي وتستثمر في السنوات اللاحقة، وبالتالي فالفائدة تحسب على الجملة (رأس المال) في كل وحدة زمنية، وليس على الأصل فقط، وهذا يؤدي إلى زيادة الفوائد من سنة إلى أخرى على عكس الفائدة البسيطة التي تبقى ثابتة عند كل فترة.

مثال: اقترض شخص مبلغ 10000 دج بمعدل فائدة سنوي 10%.

فائدة السنة الأولى يمكن حسابها باستخدام علاقة الفائدة البسيطة.

$I_1 = C_0\, t\, n = 10000 \times 0{,}1 = 1000$ DA.

وعليه في نهاية السنة الأولى تصبح الجملة $10000 + 1000 = 11000$ DA ، وهو المبلغ الجديد الذي سيتم على أساسه احتساب الفوائد خلال السنة الثانية.

فوائد السنة الثانية تعادل 1100 دج، وتجمع هذه الفوائد مع المبلغ الأصلي تحصل على رأسمال جديد قدره: $11000 + 1100 = 12100$ DA، يتم على أساسه احتساب الفوائد خلال السنة الثالثة.

أي أن فوائد السنة الثالثة تحسب انطلاقا من الجملة المحصلة في نهاية السنة الثانية، أي:

$I_3 = 12100 \times 0{,}1 = 1210$ ، حيث سيتم جمع هذه الفوائد مع المبلغ الأصلي في السنة الثالثة:

$12100 + 1210 = 13310$DA، هذا المجموع يمثل قيمة المبلغ الذي سيدفعه المقترض للمقرض بعد ثلاث سنوات، وهو يتضمن بالإضافة إلى قيمة القرض، مجموع الفوائد خلال ثلاث سنوات، وذلك بمعدل فائدة 10%.

في حالة تطبيق علاقة الفائدة البسيطة لحساب مجموع ما يدفعه المقترض للمقرض في نهاية السنة الثالثة، يمكن استعمال علاقة الجملة وذلك كما يلي:

$$Ct = 10000\ (1+ t \times n)$$

$$Ct = 1000\ (1+ 0.1\times 3)$$

$$Ct = 13000\ \text{DA}.$$

رسملة (تعني إضافة الفوائد إلى رأس المال) الفوائد في نهاية المدة المتفق عليها (في مثالنا السابق سنوية) من خصائص الفائدة المركبة.

1.1. **العلاقة الأساسية للفائدة المركبة**: باعتبار أن المودع أو المقرض لأمواله يهدف إلى تحصيل مبالغ جديدة، فإن العملية في نهاية الفترة تعطي ما يسمى بالجملة، وهي القيمة الناتجة عن جمع المبلغ الأصلي مع الفائدة البسيطة المحصل عليها للفترة، وعلاقة الجملة هي العلاقة الأساسية المستعملة في هذا الموضوع.

تتحدد قيمة الفائدة المركبة بنفس محددات الفائدة البسيطة وهي:

C: المبلغ الأصلي (مبلغ رأس المال)، وهو أصل القرض أو المبلغ الموظف.

t: معدل الفائدة، وهو نسبة مئوية تعطى في الغالب على أساس سنوي.

n: تمثل عدد الفترات الزمنية لإقتراض أو توظيف المبلغ الأصلي، وعادة ما تكون سنوية.

وبالتالي يمكننا أن نستنتج علاقة الفائدة المركبة (الرسملة سنوية) ابتداء من احتساب فائدة السنة الأولى والسنوات التي تليها، إلى غاية السنة n، كما هو موضح في الجدول الموالي:

السنوات	رأس المال في بداية السنة	فوائد السنة	القيمة المحصلة في نهاية السنة بعد رسملة الفوائد السنوية
1	C	$C \times t$	$C + C \times t = C(1+t)$.
2	$C(1+t)$	$C(1+t) \times t$	$C(1+t) + C(1+t)\times t = C(1+t)(1+t) = C(1+t)^2$.
3	$C(1+t)^2$	$C(1+t)^2 \times t$	$C(1+t)^2 + C(1+t)^2 \times t = C(1+t)^2(1+t) = C(1+t)^3$.
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
n-1	$C(1+t)^{n-2}$	$C(1+t)^{n-2} \times t$	$C(1+t)^{n-2} + C(1+t)^{n-2} \times t = C(1+t)^{n-2}(1+t) = C(1+t)^{n-2}$.
n	$C(1+t)^{n-1}$	$C(1+t)^{n-1} \times t$	$C(1+t)^{n-1} + C(1+t)^{n-1} \times t = C(1+t)^{n-1}(1+t) = C(1+t)$.

من خلال الجدول نجد أن الجملة المكتسبة C_n عن توظيف مبلغ C بعد عدد من الفترات الزمنية n، بمعدل فائدة مركبة t عن كل وحدة زمنية تحسب وفق العلاقة التالية:

$$\boxed{C_n = C(1+t)^n}$$

مثال 01: وظف شخص مبلغ 1000 دج لمدة 3 سنوات بمعدل فائدة 5%، احسب قيمة الجملة المحصلة.

الحل:

$t=5\%$ ، $n= 3$ سنوات

$$C_n = C(1+t)^n$$

$$C_3 = 1000(1+0,05)^3 = 1157,63 \text{ DA}.$$

مثال 02: مبلغ قدره 10000دج وظف بفائدة مركبة لمدة 6 سنوات، وذلك بمعدل فائدة ثلاثي قدره 2.5%، وبرسملة ثلاثية.

- احسب القيمة المحصلة في نهاية مدة التوظيف.

الحل:

بما أن الرسملة ثلاثية ومعدل الفائدة ثلاثي، فمدة التوظيف يجب أن تكون ثلاثية كذلك.

إذن: $n = 6 \times 4 = 24$ ثلاثي.

$$C_{24} = 10000(1{,}025)^{24}$$

$$C_{24} = 18087{,}26 \text{ DA.}$$

ملاحظات:

1- إن العلاقة السابقة لحساب الجملة تقتضي تطابق معدل الفائدة مع مدة الرسملة، فإذا كانت الرسملة سنوية لابد أن يكون معدل الفائدة المركبة سنويا، وإذا تم الاتفاق على رسملة الفوائد شهريا أو فصليا أو سداسيا وجب أن يكون معدل الفائدة المركبة متطابقا مع مدة الرسملة.

2- من خلال الجدول السابق يتضح أن فوائد السنوات المتتالية، وأيضا الجملة المحصلة في نهاية السنوات المتتالية تشكل متوالية هندسية أساسها $(1+t)$.

3- على عكس علاقة حساب الفائدة البسيطة التي تمدنا مباشرة بقيمة الفائدة البسيطة، فالعلاقة الأساسية للفائدة المركبة تمدنا بالقيمة (الجملة) المحصلة، ويتعين لمعرفة قيمة الفائدة المركبة طرح أصل القرض (أو المبلغ الموظف) في جملته المحصلة كما يلي:

$$I = C_n - C = C\,(1+t)^n - C$$

$$\boxed{I = C\,[(1+t)^n - 1]}$$

مثال: أودع شخص مبلغ 781250دج في أحد البنوك بمعدل 6 % سنويا، ولمدة 5 سنوات.

- أوجد الفائدة المحققة خلال مدة التوظيف.

الحل:

$$I = C\,[(1+t)^n - 1]$$

$$I = 781250\,[(1+0{,}06)^5 - 1]$$

$$I = 264238{,}7325 \text{ DA.}$$

2.1. عمليات على علاقة الفائدة المركبة: العلاقة الأساسية لحساب القيمة (الجملة) المحصلة لمبلغ وظف بفائدة مركبة $C_n=C(1+t)^n$، يمكن حسابها باستخدام الآلة الحاسبة، كما يمكن استخدام الجداول المالية، حيث يمكن إيجاد القيمة $(1+t)^n$ من الجدول المالي رقم 01.

كما تمكننا العلاقة السابقة من حساب C، t، n.

أ. **حساب المبلغ الأصلي**: إذا كانت لدينا الجملة المحصلة، مدة التوظيف أو الاقتراض، ومعدل الفائدة المركبة، يمكن إيجاد قيمة المبلغ الأصلي كما يلي:

$$C_n= C(1+t)^n$$

$$\boxed{C=\frac{C_n}{(1+t)^n}=C(1+t)^{-n}}$$

وهذه العلاقة هي نفسها علاقة القيمة الحالية لمبلغ مستقبلي في الوقت الحاضر.

مثال: وظف شخص مبلغ مالي في أحد البنوك، بمعدل فائدة سنوي 7.5% وبرسملة سنوية، فأعطى بعد 10 سنوات جملة قدرها 123661.92دج.

أحسب قيمة المبلغ الموظف.

الحل:

لدينا: $n=10$سنوات، $t=7,5\%$

$C=?$ ، $C_{10}= 123661,92$ DA

- الطريقة 01:

$$C=\frac{C_{10}}{(1+t)^n}=\frac{123661,92}{(1+0,075)^{10}}$$

$$C=\frac{123661.92}{2.061032}= 60000 \text{ DA.}$$

كما يمكن استخدام الجدول المالي رقم 01 لإيجاد القيمة $(1+0.075)^{10}$ وذلك بأخذ العمود الذي يمثل $t = 7.5\%$ ، والسطر رقم 10.

- الطريقة 02:

يمكن إيجاد قيمة المبلغ الأصلي باستخدام العلاقة:

$$C = C_n(1+t)^{-n}$$

$$C = 123661{,}92\ (1+0.075)^{-10}$$

$$C = 123661{,}92 \times 0.485194$$

$$C = 60000\ \text{DA}.$$

ويمكن كذلك إيجاد القيمة $(1+0{,}075)^{-10} = 0{,}485194$ باستخدام الجدول المالي لرقم 02، عند العمود الذي يشير إلى $t = 7{,}5\%$، والسطر رقم 10.

ب. حساب المعدل: إذا توفر لدينا المبلغ الأصلي، الجملة المحصلة عن توظيف هذا المبلغ، ومدة التوظيف، بالإمكان إيجاد معدل الفائدة باستخدام العلاقة الأساسية للفائدة المركبة كما يلي:

$$C_n = C(1+t)^n$$

يمكننا أن نكتب:

$$(1+t)^n = \frac{C_n}{C} \Longrightarrow 1+t = \left(\frac{C_n}{C}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\boxed{t = \left(\frac{C_n}{C}\right)^{\frac{1}{n}} - 1}$$

مثال: اقترض شخص من البنك مبلغ 30000دج، لمدة 11 سنة، فدفع في نهاية مدة القرض مبلغ 89971,77دج.

- إذا علمت أن الرسملة سنوية، أحسب معدل الفائدة.

الحل:

لدينا: $C = 30000$ DA ، $n = 11$ سنة

$t = ?$ ، $C_{11} = 89971,77$ DA

- الطريقة 01:

$$t = \left(\frac{C_n}{C}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 = \left(\frac{89971.77}{30000}\right)^{\frac{1}{n}} - 1$$

$$t = 0,105$$

$$t = 10,5\%$$

- الطريقة 02:

تعتمد هذه الطريقة على الجدول المالي رقم 01:

$$C_n = C(1+t)^n$$

$$(1+t)^n = \frac{C_n}{C}$$

$$(1+t)^{11} = \frac{89971.77}{30000} = 2,999059$$

لإيجاد قيمة t، نبحث عن القيمة 2,999059 في السطر رقم 11 من الجدول المالي رقم 01، ثم نقوم بالبحث عن قيمة t التي تقابلها.

ومن الجدول المالي رقم 01 نجد أن $t=10.5\ \%$.

ج. **حساب المدة**: إذا توفر لدينا المبلغ الأصلي، الجملة المحصلة، ومعدل الفائدة، بإمكاننا إيجاد المدة n كما يلي:

$$C_n = C(1+t)^n$$

$$(1+t)^n = \frac{C_n}{C}$$

باستخدام اللوغاريتم العشري تصبح العلاقة من الشكل:

$$\text{Log}\ (1+t)^n = \log\left(\frac{C_n}{C}\right)$$

ونكتب: $n \log(1+t) = \log(\frac{C_n}{C})$

$$\boxed{n = \frac{\log(\frac{C_n}{C})}{\log(1+t)}}$$

مثال: ما هي المدة الزمنية اللازمة للحصول على جملة قدرها 1215,51دج، إذا علمت أن قيمة المبلغ الأصلي 1000دج، ومعدل الفائدة المركبة السنوي 5% ؟

الحل:

لدينا: $t = 5\%$ ، $C_n = 1215{,}51$ ، $C = 1000$ DA ، $n = ?$

$$n = \frac{\log(\frac{C_n}{C})}{\log(1+t)} = \frac{\log(\frac{1215{,}51}{1000})}{\log(1{,}05)}$$

$n = 4$ سنوات

3.1. حساب الجملة في حالة عدد الفترات غير الكاملة:

للوصول إلى العلاقة الأساسية للجملة في الفائدة المركبة $C_n = C(1+t)^n$، اعتبرنا أن المدة n عبارة عن رقم صحيح، يبدأ من 1، 2، 3 إلى غاية فترة محدودة، أي لفترات زمنية كاملة، إلا أنه في الواقع يمكن أن نجد n عبارة عن كسر أو عدد غير صحيح، أي عندما تكون الفترة جزء من السنة (مثلا: 5 سنوات و4 أشهر، أي $n = 5 + \frac{4}{12}$)، في هذه الحالة يمكن استعمال عدة طرق لإيجاد الجملة المحصلة:

مثال: مبلغ قدره 2000دج، وظف في بنك بفائدة مركبة، وبرسملة سنوية للفوائد، معدل الفائدة السنوي 11%، وذلك لمدة 7 سنوات و3 أشهر.

- أحسب الجملة المكتسبة من توظيف هذا المبلغ في نهاية المدة.

يمكن إيجاد قيمة الجملة بثلاث طرق:

أ. **الطريقة العقلانية (باستخدام الفائدة البسيطة):** مفاد هذه الطريقة أن نحسب جملة المبلغ الموظف للفترات الزمنية الكاملة (7 سنوات هي عدد الفترات الكاملة أو الصحيحة الأصغر من مدة توظيف المبلغ)، ثم نضيف

إليها فائدة هذه الجملة المحسوبة للفترة الأقل من سنة (3 أشهر أو $\frac{3}{12}$ سنة) بتطبيق علاقة الفائدة البسيطة، وذلك كما يلي:

$$C_n = C(1+t)^n + C(1+t)^n \times t \times \frac{m}{12}$$

$$\boxed{C_n = C(1+t)^n\ [1+t \times \frac{m}{12}]}$$

حيث m تمثل عدد أشهر التوظيف بعد نهاية السنوات الصحيحة.

$$C_{7+\frac{3}{12}} = 2000\ (1+0,11)^7\ [1+0,11 \times \frac{3}{12}]$$

$$C_{7+\frac{3}{12}} = 42665,09 \text{ DA.}$$

ملاحظة: في حالة الفترات الزمنية غير الكاملة بالأيام نكتب $\frac{m}{360}$ بدلا من $\frac{m}{12}$.

ب. الطريقة التجارية: يمكن في هذه الطريقة إيجاد الجملة المحصلة باستخدام الجدول المالي رقم 01، أو باستخدام الآلة الحاسبة، بالإعتماد على خواص الأسس وذلك كما يلي:

$$C_{n+\frac{m}{12}} = C\ (1+t)^{n+\frac{m}{12}}$$

$$\boxed{= C\ (1+t)^n\ (1+t)^{\frac{m}{12}}}$$

يمكن إيجاد القيمة $(1+t)^n$ من الجدول المالي رقم 01، والقيمة $(1+t)^{\frac{m}{12}}$ من الجدول المالي رقم 06.

$$C_{7+\frac{3}{12}} = 20000\ (1,11)^7\ (1,11)^{\frac{3}{12}}$$

$$C_{7+\frac{3}{12}} = 20000 \times 2,07616 \times 1,026433 = 42620,66 \text{ DA.}$$

ج. باستخدام طريقة التناسب: تقوم هذه الطريقة على إيجاد الجملة المقابلة لمعدل الفائدة المعطى للفترتين الزمنيتين التي تقع في نطاقها مدة التوظيف الفعلية (n وn+1)، وذلك باستخدام الجدول المالي رقم 01، ثم يتم حساب الفرق بينهما وضرب الحاصل في قيمة الكسر الذي يمثل مدة التوظيف بعد السنة n أي $\frac{m}{12}$ إذا كانت المدة بالأشهر أو $\frac{m}{360}$ إذا كانت بالأيام، ثم تضاف النتيجة إلى الجملة الخاصة بالسنة n:

$$\boxed{C_{n+\frac{m}{12}} = C_n + \frac{m}{12}\ (C_{n+1} - C_n)}$$