Université d'Oum El Bouaghi — Année universitaire 2023/2024
Introduction à la topologie — Licence 2 - Mathématiques

FEUILLE DE TD N°1

Exercice 1 *On munit $X = \{a, b, c, d\}$ de la topologie $\tau = \{\varnothing, X, \{a\}, \{d\}, \{a, d\}\}$.*

1. *Quels sont les fermés de l'espace topologique (X, τ) ?*
2. *Donner l'ensemble des voisinages de chacun des points a, b et c.*
3. *Déterminer l'adhérence et l'intérieur du sous-ensemble $A = \{a, b, c\}$.*
4. *Préciser les points d'accumulation et les points isolés de A.*

Exercice 2 *On munit $\mathbb{R}$ de la topologie usuelle. Décrire l'intérieur, l'adhérence et la frontière de l'ensemble $A = \left\{\frac{1}{n} \; ; \; n \in \mathbb{N}^*\right\}$.*

Exercice 3 *Dans $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle, considérons la partie*

$$A =]-\infty, -1[\cup \left\{0, \frac{\pi}{4}, \sqrt{3}\right\} \cup \left\{3 - \frac{1}{n} \; ; \; n \in \mathbb{N}^*\right\}.$$

1. *Déterminer $\mathring{A}$, $\overline{A}$ et ∂A.*
2. *Déterminer les points d'accumulation de A.*
3. *Quels sont les points isolés de A ?*

Exercice 4 *Sur l'intervalle $X = [0, 1[$, on introduit la famille τ des ensembles de la forme $[0, a[$ avec $0 \leq a \leq 1$.*

$$\tau = \{[0, a[\; ; \; 0 \leq a \leq 1\}.$$

1. *Montrer que τ est une topologie sur X.*
2. *Quels sont les fermés de (X, τ) ?*
3. *Déterminer l'adhérence et l'intérieur de l'intervalle $I = \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$ dans (X, τ).*
4. *Vérifier que (X, τ) n'est pas séparé.*
5. *Soit $(x_n)_n$ une suite de nombres de X qui converge au sens usuel vers $\frac{1}{2}$, i.e.*

   $$\forall \varepsilon > 0, \; \exists N \in \mathbb{N}, \; \forall n \geq N : \quad \left| x_n - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon.$$

   Montrer que dans (X, τ), $(x_n)_n$ converge vers tout nombre $\ell \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[$.
6. *Montrer que $\mathbb{Q} \cap X$ est dense dans (X, τ). En déduire que (X, τ) est séparable.*

Exercice 5 ***Topologie cofinie.***

1. *Soit X un ensemble non vide.*

   - *Montrer que la famille $\tau = \{\varnothing\} \cup \{\mathcal{O} \in \mathcal{P}(X) \; ; \; X \setminus \mathcal{O} \text{ est fini}\}$ est une topologie sur X (appelée topologie cofinie sur X).*
   - *Montrer que si X est un ensemble infini, alors l'espace topologique (X, τ) n'est pas séparé.*
   - *Montrer que si X est un ensemble infini, alors toute partie infinie de X est partout dense. En déduire que (X, τ) est séparable.*

2. *On munit $\mathbb{R}$ de la topologie cofinie τ.*

   - *Déterminer l'intérieur, l'adhérence et la frontière de chacune des parties suivantes :*

   $$\mathbb{N}, \quad \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\} \quad \text{et} \quad \mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}\,.$$

   - *Montrer que $\mathbb{N}$ n'admet aucun point isolé.*
   - *Comparer la topologie τ avec la topologie usuelle τ_u de $\mathbb{R}$.*

3. *Soit f l'application de $(\mathbb{R}, \tau)$ dans $(\mathbb{R}, \tau_u)$ définie par*

   $$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x^2 + 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

   - *Tracer la courbe représentative de f.*
   - *Montrer que f n'est continue en aucun point de $\mathbb{R}$.*

Exercice 6 *Montrer que dans un espace séparé X, un point $x \in X$ est un point d'accumulation d'une partie A si et seulement si tout voisinage de x coupe A en un nombre infini de points.*

Exercice 7 *On se propose de montrer qu'un sous-espace d'un espace topologique séparable n'est pas nécessairement séparable.*

Soit X un ensemble non dénombrable et a un point fixé de X.

1. *Considérons la famille $\tau = \{\varnothing\} \cup \{B \in \mathcal{P}(X) \; ; \; a \in B\}$.*

   a) *Montrer que τ est une topologie sur X.*

   b) *Décrire les fermés de l'espace (X, τ).*

   c) *En déduire que l'espace (X, τ) est séparable.*

2. *Soit la partie $A = X \setminus \{a\}$. Montrer que la topologie τ_A induite sur A par τ est la topologie discrète sur A et expliquer pourquoi (A, τ_A) n'est pas séparable.*

Exercice 8 *Soit (X, τ) un espace topologique, A un sous-espace topologique de X et B une partie de A.*

i) *Montrer que l'adhérence de B dans A est égale $A \cap \overline{B}$;*

ii) *Montrer que l'ensemble des points d'accumulation de B dans A est égal à $A \cap B'$;*

iii) *Montrer que l'intérieur de B dans A contient l'intérieur de B dans X (pas d'égalité en général).*

iv) *Montrer que si A est ouvert dans X, alors l'intérieur de B dans A coïncide avec l'intérieur de B dans X.*

Exercice 9 *Soit X un espace topologique. Montrer qu'une application f de X dans $\mathbb{R}$ (muni de la topologie usuelle) est continue si et seulement si $f^{-1}(]a, +\infty[)$ et $f^{-1}(]-\infty, a[)$ sont ouverts quel que soit $a \in \mathbb{R}$.*

Exercice 10 *Soit f, g deux applications continues de X dans Y, espaces topologiques, Y étant séparé.*

1. *Montrer que l'ensemble $\{x \in X \ ; \ f(x) = g(x)\}$ est fermé dans X.*
2. *En déduire que si f et g coïncident sur une partie partout dense de X, alors $f = g$.*

Exercice 11 *Soient X, Y des espaces topologiques et A, B des parties non vides de X telles que $X = A \cup B$. Soient $f_1 : A \to Y$ et $f_2 : B \to Y$ deux applications continues telles que pour tout $x \in A \cap B$, on ait $f_1(x) = f_2(x)$. On pose :*

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si } x \in A, \\ f_2(x) & \text{si } x \in B. \end{cases}$$

1. *Soit U un ouvert de Y. Déterminer $f^{-1}(U)$ en fonction de $f_1^{-1}(U)$ et $f_2^{-1}(U)$.*
2. *En déduire que si A et B sont ouvertes (resp. fermées), alors f est continue.*

Exercice 12 *On prend $X =]0, 1[\cup \{2\}$, $Y =]0, 1]$ (chacun muni de la topologie induite par la topologie usuelle de $\mathbb{R}$) et on considère l'application $f : X \to Y$ donnée par*

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 < x < 1, \\ 1 & \text{si } x = 2. \end{cases}$$

1. *Vérifier que f est une bijection est déterminer sa réciproque f^{-1}.*
2. *Vérifier que f est continue sur X.*
3. *Montrer que f^{-1} n'est pas continue en 1 (On pourra considérer la suite réelle de terme général $x_n = 1 - \frac{1}{n}$). Conclure.*

Exercice 13 *Soient X et Y deus espaces topologiques homéomorphes.*

1. *Montrer que X est séparé si et seulement si Y est séparé.*
2. *Montrer que X est séparable si et seulement si Y est séparable.*