REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

Université Larbi Ben M'Hidi Oum El Bouaghi

Faculté des sciences exactes et science de la nature et de la vie

Département d'informatique et de mathématique

Cours : modélisation géométrique

Chapitre 3 Transformées (Hough, Fourrier, DCT, Hadamard)

Proposé par Dr. Kenza Belhouchette

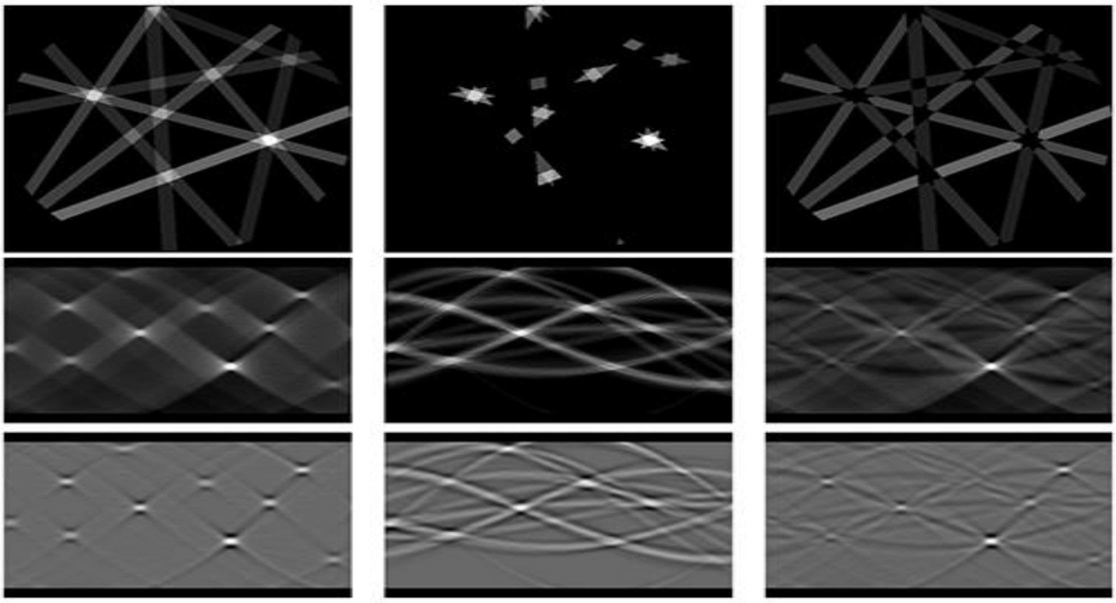
Edition 1.0

2020/ 2021

Sommaire

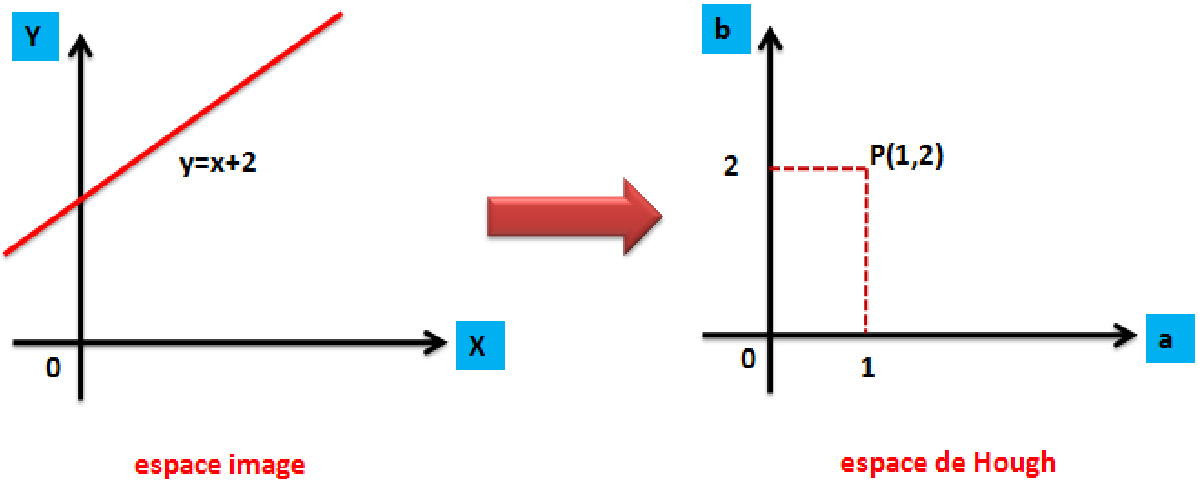
La transformée de Hough

La transformée de **Hough** est une technique de reconnaissance de formes inventée en 1962 par Paul Hough. Récemment elle est devenue un outil standard dans le domaine de la vision artificielle.Cette technique permet de détecter des objets bien précis dans les images: des droites ; des cercles, des ellipses...Etc, on se basant sur une transformation d'image.

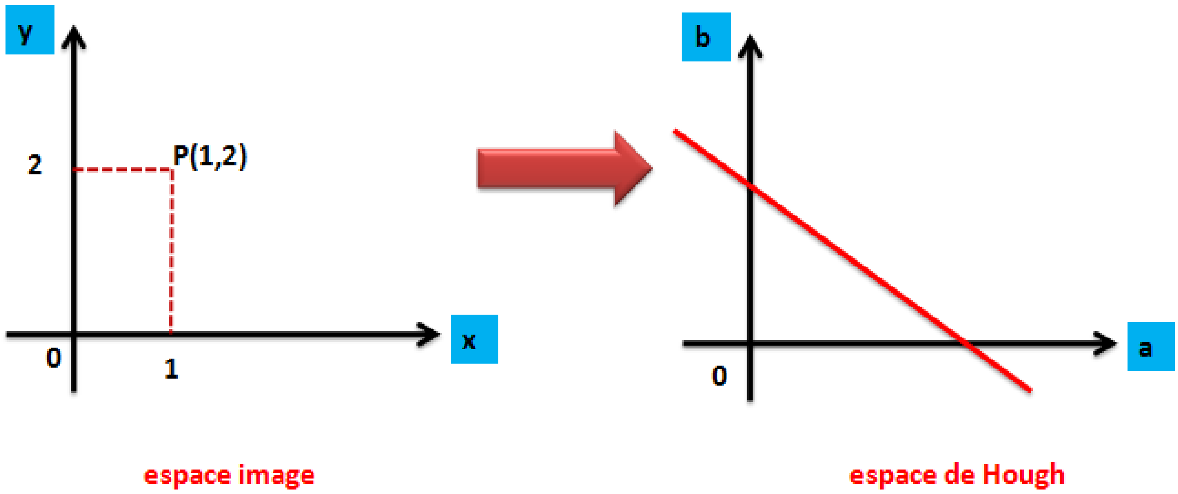


Principe de la méthode pour la recherche de ligne droite

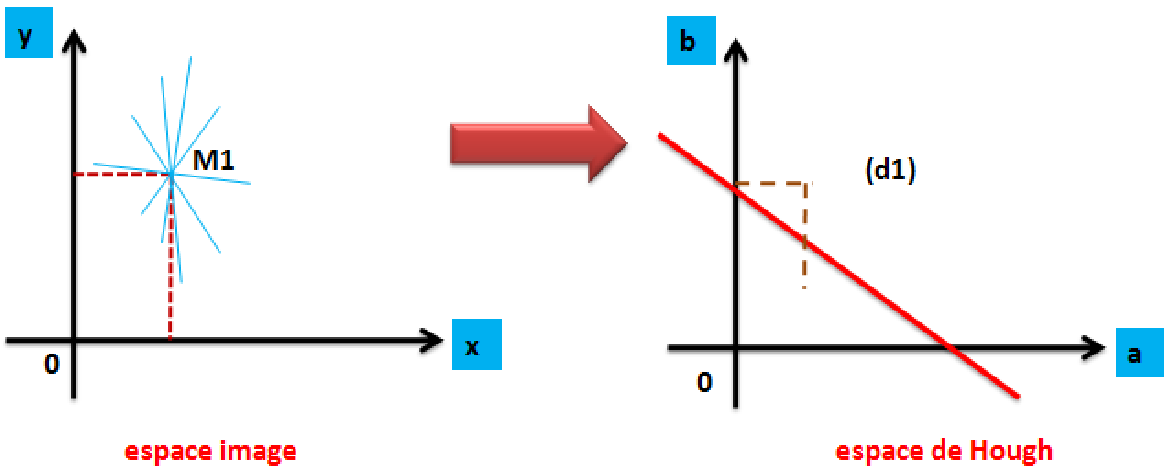
Chaque droite (D)dans l'espace (x,y), espace image, sera transformée en un point dans l'espace de (a,b), espace de Hough (espace des paramètres).



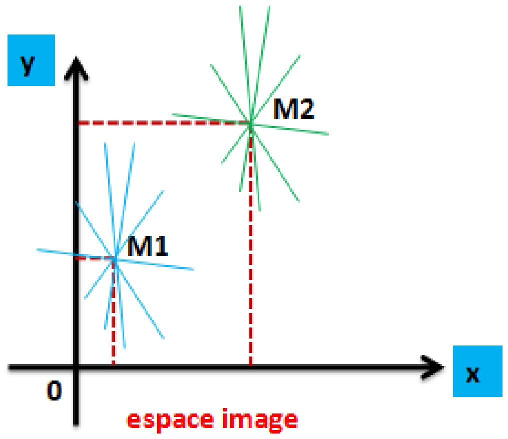
Chaque point dans l'espace (x,y) sera transformée en une droite d'équation b = -a x + y dans l'espace de Hough. Comme montre la figure suivante

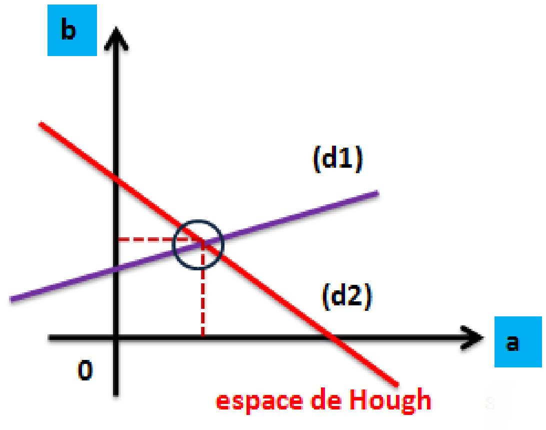


Pour chaque point M1, toutes les droites passant par ce point correspondent à une seule droite (d1) dans l’espace (a,b).

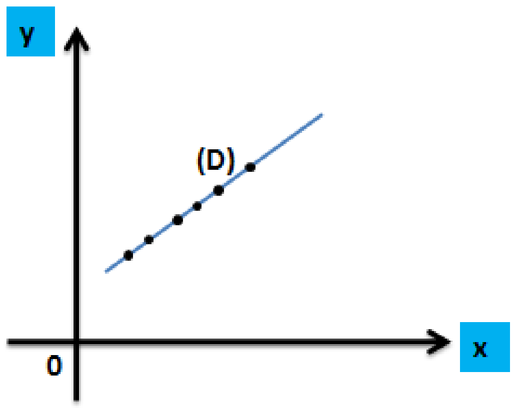


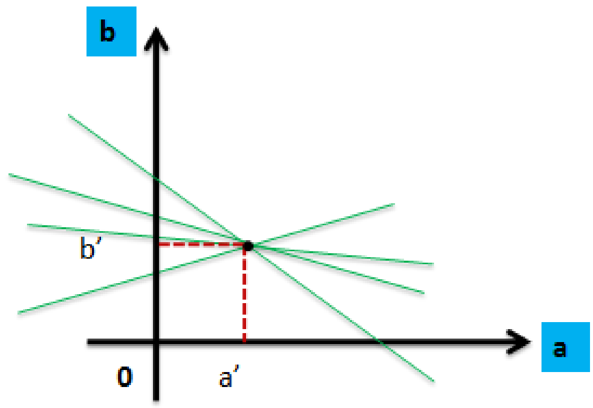
Aussi pour chaque point M2, toutes les droites passant par ce point correspondent à une seule droite (d2) dans l’espace (a,b). Ces deux faisceaux de droites dans l’espace (x, y) ont en commun la droite qui relie les points M1et M2. L'intersection de deux droites d1 et d2 donne le point contenant les paramètres de la droite recherchée





Tous les points situés sur la même droite (D) sont représentés par des droites qui passent toutes par le même point dans l'espace (a,b).

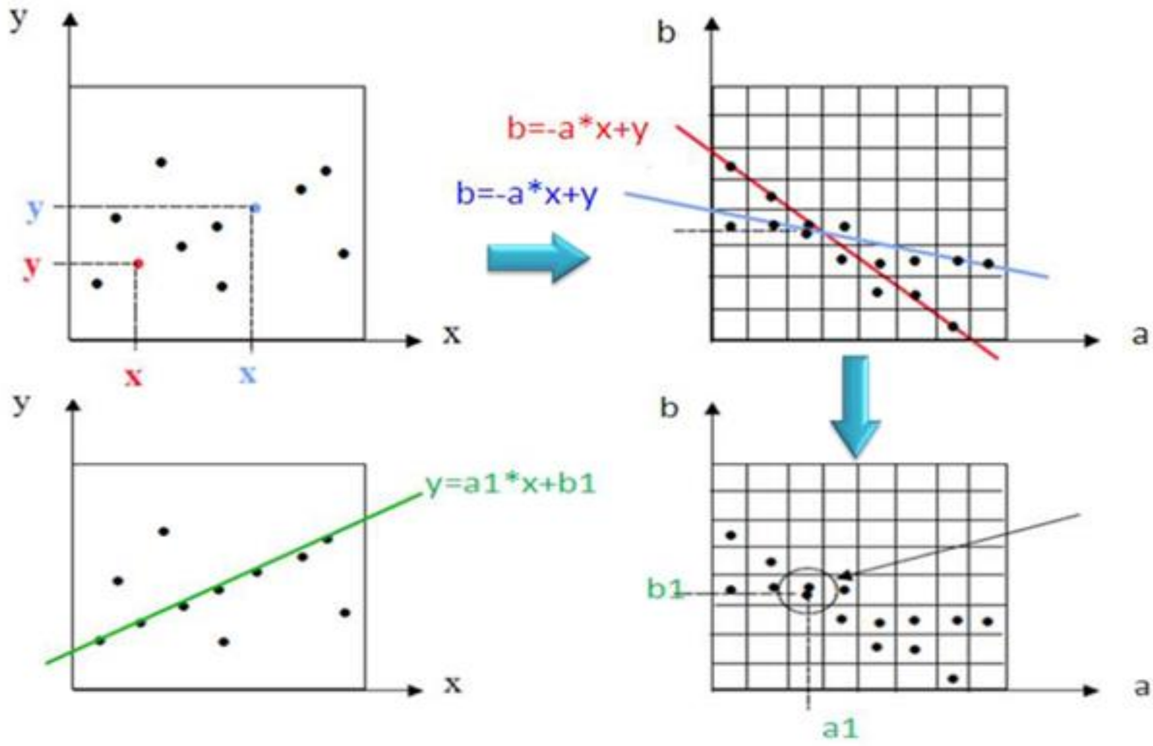




Ce point (a', b') donne les paramètres recherchés de l'équation de la droite (D) : y = a'x+b'

Principe de vote

Pour détecter la droite qui traverse deux points , on utilise un accumulateur appelé aussi Matrice (a,b).On construit une image des votes où chaque point permet de voter pour une droite particulière et les droites recevant le plus de votes sont conservées.



Principe de vote remplissage de l’accumulateur

Pour le remplissage de l’accumulateur

- Chaque ligne correspond à une valeur possible du paramètre a
- Chaque colonne correspond à une valeur possible du paramètre b
- Chaque «case» du tableau représente une droite de paramètres a et b

a \ b	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tableau 1 Accumulateur

La valeur d'une «case» va s'incrémenter lorsque la droite correspondante traversera le point concerné.

a \ b	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
2	0	0	0	0	0	0	1	0	0
3	0	0	0	0	1	0	0	0	0
4	0	0	1	0	0	0	0	0	0
5	1	0	0	0	0	0	0	0	0

Tableau 1 Accumulation après calcule pour le point A(2,4)

À la fin du processus (d'accumulation), la «case» ayant obtenu la valeur la plus élevée correspond à la droite qui traverse le plus nombres grand nombre de point.

a \ b	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
1	0	0	0	0	0	1	0	0	1
2	0	0	0	0	1	0	1	0	0
3	0	0	0	1	1	0	0	0	0
4	0	0	2	0	0	0	0	0	0
5	1	1	0	0	0	0	0	0	0

Tableau 1 Accumulation après calcule pour le point A(2,4) et le point B(1,1)

Détection d'autres structures

Il est possible d'utiliser la procédure précédente pour détecter d'autres structures. Par exemple, pour le cas de cercles, l'équation paramétrique est :

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

Où a et b sont les coordonnées du centre du cercle et r son rayon.

Dans ce cas, la complexité de l'algorithme augmente puisqu'il existe trois coordonnées dans l'espace des paramètres et un accumulateur 3D.

En général, le calcul et la taille du tableau accumulateur augmente de manière polynomiale avec le nombre de paramètres. C'est pourquoi, la technique de Hough décrite est seulement pratique pour les formes simples.

Pour appliquer la transformée de Hough à une image de largeur L et de hauteur H, il faut créer un espace de Hough. Pour de faire : il faut

- discrétiser l'espace, on abscisse de $-\pi \div 2$ à $\pi \div 2$, en ordonnée de $-d$ à $+d$ (avec d est la taille de la diagonale de l'image)
- En suite , créer un accumulateur, et initialiser tous ses cases à 0
- Puis on parcours les pixels des images comme suit :
- Fixer ɵ et calculer $r = x.cos(\theta) + y.sin(\theta)$
- Ajouter le vote pour $[r][\theta]$
- Incrémenter la valeur de la case correspondante

L'algorithme selon le système polaire est le suivant :

(1) Début

(2) Quantifier l'espace des paramètres avec un maximum et un minimum pour les 2 paramètres.

(3) Initialiser un accumulateur (dim (r), dim (θ)) à 0.

(4) Pour chaque point (x , y) de l'image

(5) Pour chaque valeur de θ (-π/2 à π/2)

(6) Calcul de p=x*cos(θ)+y*sin(θ)

(7) Ajout d'un vote pour (p , θ)

(8) Vote[p][θ]++;

(9) Fin

A la fin de l'exécution, les valeurs des cases de l'accumulateur correspondent au nombre de points : les votes

La case ayant obtenu la valeur la plus élevée correspond à la droite qui traverse le plus grand nombre des points.

Transformée de fourrier

La transformée de Fourrier est un outil important en traitement d'image qui est utilisée pour décomposer une image en ses composantes sinus et cosinus. Elle transforme la représentation d'une image du domaine spatial au domaine fréquentiel (ou de Fourrier) équivalent. Dans ce dernier, chaque point représente une fréquence particulière contenue dans le domaine spatial.

La transformée de Fourrier est utilisée dans beaucoup d'applications, telles que l'analyse, le filtrage, la reconstruction et la compression d'image.

Définition de la Transformée de Fourier (TF)

Soit f(x,y) une fonction à deux variables représentant l'intensité d'une image au point d'abscisse x et d'ordonnée y. La transformée de Fourier de cette image permet de passer d'une représentation spatiale à la représentation de l'image dans le domaine fréquentiel. Elle est donnée par :

$$\mathcal{F}(u,v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) e^{-j(xu+yv)} dxdy$$

Où F(u,v) est la transformée de fourrier de la matrice f(x,y). Les deux variables u et v représentent les fréquences spatiales de l'image selon les directions x et y respectivement.

Or, l'image ayant un nombre de pixels fini, l'intensité lumineuse des pixels est donc un signal à support borné. D'où l'utilisation de la TF discrète donnée par :

$$\mathcal{F}(p,q) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m,n) e^{-j2\pi(\frac{m}{M}p+\frac{n}{N}q)}$$

L'équation peut être interprétée comme : la valeur de chaque point $\mathcal{F}(\mathrm{p,q})$ est obtenue par la multiplication de l'image spatiale avec la fonction de base $e^{-j2\pi(\frac{m}{M}p+\frac{n}{N}q)}$ et en sommant le résultat.

À partir de la transformée de FOURIER, il est possible de reconstituer la transformée inverse :

$$f(x,y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(u,v) e^{j(xu+yv)} du dv$$

Et pour une image bornée:

$$f(p,q) = \frac{1}{M.N} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \mathcal{F}(m,n) e^{j2\pi(\frac{m}{M}p+\frac{n}{N}q)}$$

Nous voyons d'après l'expression de la TF que, $\mathcal{F}(\mathrm{u},\mathrm{v})$ est une fonction de u et de v à valeurs complexes. Possède donc une amplitude et une phase. Nous pouvons l'exprimer sous la forme:

$$\mathcal{F}(u,v) = \|\mathcal{F}(u,v)\| e^{j\theta(u,v)}$$

où $\|\mathcal{F}(\mathrm{u},\mathrm{v})\|$ est appelé module de $\mathcal{F}(\mathrm{u},\mathrm{v})$ ou spectre fréquentiel de l'image $\mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y})$ et $\theta(\mathrm{u},\mathrm{v})$ est la phase ou spectre de phase de $\mathcal{F}(\mathrm{u},\mathrm{v})$.

Dans l'image du domaine de Fourrier, chaque point représente une fréquence particulière contenue dans l'image du domaine spatial. Ainsi, le nombre de fréquences correspond au nombre de pixels.

Propriétés

1. La transformée de Fourier produit un résultat complexe qui peut être affiché avec deux images, soit en utilisant les parties réelles et imaginaires, soit en utilisant le module (aussi appelé spectre d'énergie) et phase de chaque nombre. En traitement d'image, le module de la TF est souvent le seul utilisé puisqu'il contient la plupart de l'information de la structure géométrique du domaine spatial de l'image. Cependant, si l'on désire reconstituer l'image dans le domaine spatial, il faut préserver la phase et le module.

2.En permutant l'ordre d'intégration, nous avons :

$$\mathcal{F}(u,v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) e^{-2\pi jxu} dx \right] e^{-2\pi jyv} dy$$

La transformée de FOURIER d'une image peut se réaliser en deux étapes : (i) transformée de FOURIER unidimensionnelle de la fonction $\mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y})$ pour tout y fixé, transformant la variable x en la variable u et (ii) transformée de FOURIER unidimensionnelle de la fonction obtenue pour tout u fixé, transformant la variable y en la variable v.

3. Si $f(x,y) \rightleftharpoons \mathcal{F}(u,v)$alors $f(ax,by) \rightleftharpoons \frac{1}{ab}\mathcal{F}\left(\frac{u}{a},\frac{v}{b}\right)$. Il est à noter que l'image $f(ax,by)$ correspond à l'image $\mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y})$ compressée dans l'espace par un facteur a dans la direction x et par un facteur b dans la direction y. Une compression dans le domaine spatial équivaut donc à une extension dans le domaine fréquentiel et vice-versa.

Exemple

Considérons l'image $\mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y})$ définie par la fonction rectangle suivante :

$$f(x,y) = A\, rect_{[a,b]}(x,y)$$

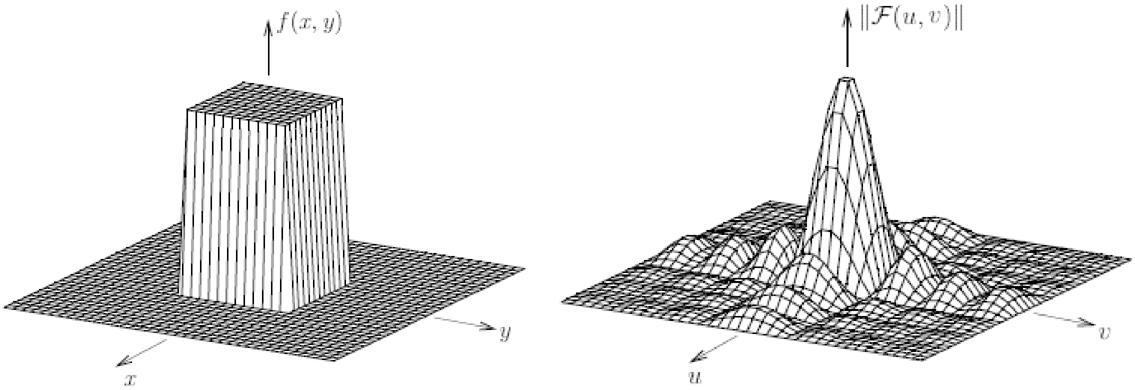
Où

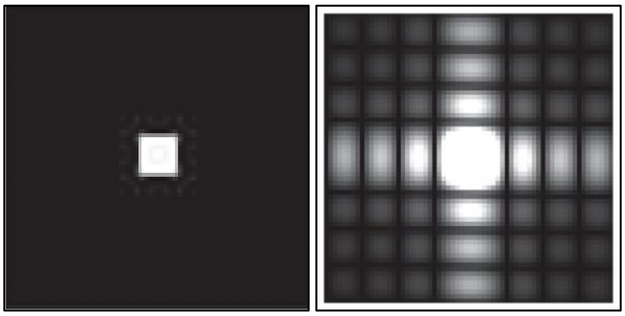
$$rect_{[a,b]}(x,y) = \begin{cases} 1 & |x| < \frac{a}{2}, |y| < \frac{b}{2} \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

La transformée de FOURIER de l'image est donnée par :

$$\mathcal{F}(u,v) = \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} dx \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} dy A e^{-2\pi j(xu+yv)}$$

$$\mathcal{F}(u,v) = Aab \left(\frac{\sin(\pi au)}{\pi au}\right)\left(\frac{\sin(\pi bv)}{\pi bv}\right)$$

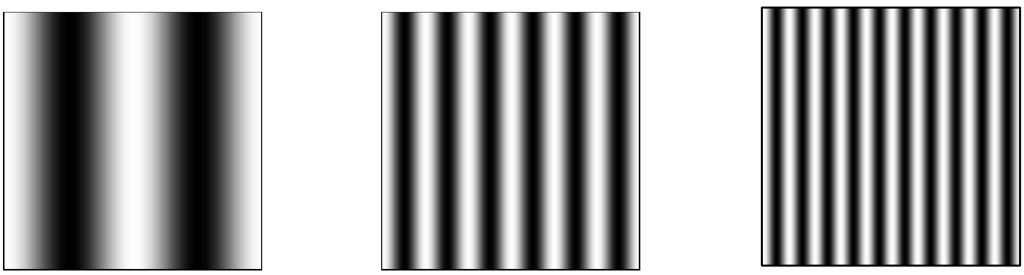




Explication de la TF

La TF est relativement compliquée mathématiquement. Il existe cependant quelques concepts relativement simples à expliquer.

Dans le cas de la TFD, elle stipule que des variations sinusoïdales dans l'intensité existent le long de l'image. Par exemple, les images suivantes peuvent être représentées par un seul terme de Fourier qui contient :



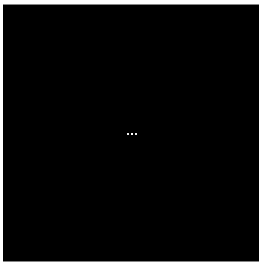
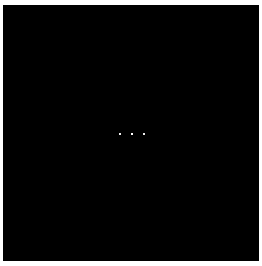
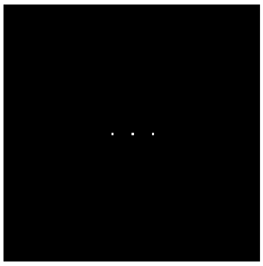
La fréquence spatiale : c'est la fréquence dans les directions spatiales (axe des x dans ce cas) avec laquelle se fait la modulation de l'éclairage. Par exemple, l'image de droite présente une fréquence élevée par rapport à celle de gauche.

Le module : représente la différence entre les parties la plus sombre et la plus clair de l'image (ou contraste). Un module négatif indique une inversion de contraste (sombre vers clair ou l'inverse)

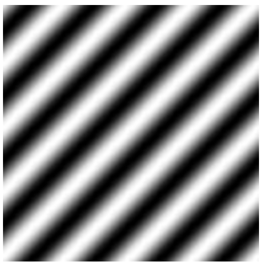
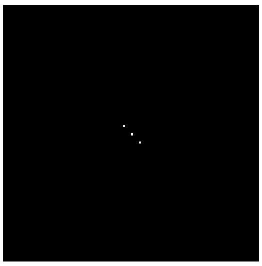
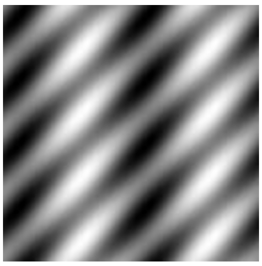
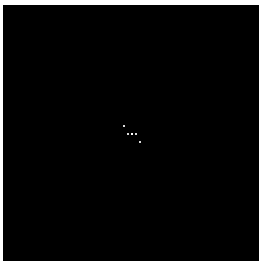
Et la phase : indique comment la sinusoïde est décalée par rapport à l'origine.

Une TF ne codifie pas une simple sinusoïde, mais une série de sinusoïdes à travers un ensemble de fréquences spatiales allant de 0 (Terme DC : pas de modulation, i.e. la luminance moyenne de l'image), jusqu'à la plus haute fréquence existante dans l'image. Ainsi, une fréquence de valeur f est représentée par un point le long des axes des fréquences spatiales, où sa valeur est l'amplitude du signal. Ceci se généralise à un signal 2-D en considérant que chaque ligne et colonne est un signal 1-D.

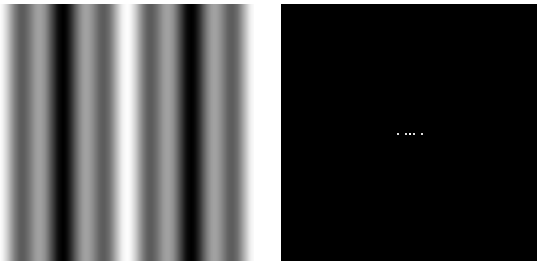
Une DTF est également représentée par une image (images suivantes). Chaque pixel est une valeur de fréquence spatiale, où son module représente son intensité. Dans ce cas, il y a un pixel brillant au centre (terme DC) entouré par 2 pixels brillants sur les côtés qui codent le motif de la sinusoïde. Plus les pixels sont brillants, plus le contraste est élevé dans l'image initiale.

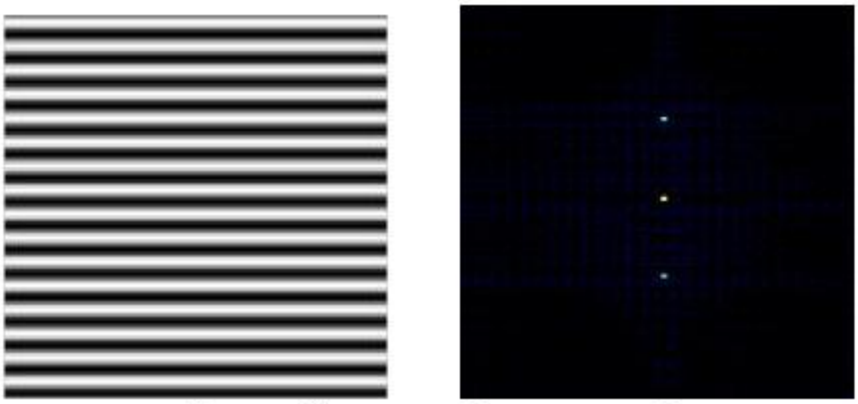
L'image Fourier reflète la même information que l'image d'intensité, à l'exception qu'elle exprime l'amplitude en fonction de la fréquence spatiale au lieu de l'intensité en fonction du déplacement spatial. L'orientation même de l'image de Fourier suit celle de l'image originale relativement au point central DC (images suivantes).

Remarquons comment est la TF de la somme des images précédentes.



L'image qui représente un sinus horizontal. On voit donc un motif de direction verticale qui se répète dans l'image. Sa transformée de Fourier présente des points alignés horizontalement, c'est à dire dans la direction perpendiculaire à celle du motif.



Spectre d'une image de sinus vertical

L'autre image de sinus vertical. Sa transformée de Fourier présente aussi des points alignés, mais verticalement, c'est à dire dans la direction perpendiculaire à celle du motif.

La transformée de Hadamard

La transformée de Hadamard consiste en une projection sur un ensemble d'ondes carrées appelée fonction de Walsh. Les fonctions de Walch sont réelles et prennent uniquement des valeurs +1 ou -1 et donc la matrice de Hadamard H_nn est une matrice unitaire symétrique nxn où les éléments +1 ou -1. Elle est définie (d'ordre n) par :

$$H_n = H_1 \otimes H_{n-1}$$

Où $\otimes$dénote le produit de Kronecker de deux matrices :

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} A(1,1)B & A(1,2)B & \dots & A(1,N)B \\ \vdots & \vdots & & \vdots \quad \vdots \\ A(n,1)B & A(n,2)B & \dots & A(n,n)B \end{bmatrix}$$

avec :

$$H_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Donc :

$$H_2 = H_1 \otimes H_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Et

$$H_3 = H_1 \otimes H_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{bmatrix} H_2 & H_2 \\ H_2 & -H_2 \end{bmatrix}$$

Une des propriétés importantes de H_n est son orthogonalité :

$$H_n^{-1} = H_n^T = H_n \ et \ H_n . H_n^T = n . I$$

Aussi pour un vecteur x de dimension N=2n :

$$y = H_n x \ et \ x = H_n y$$

La transformée de Hadamard est données par:

$$y = H_n x H_n \ et \ x = H_n y H_n$$