Exercice 01 : Soit la fonction u une fonction de classe $C^{(2)}(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$.

Et $\begin{cases} s = x + 2y \\ t = x - y \end{cases}$ Exprimer $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, et $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ en fonction de s et t.

Exercice 02 : Résoudre les problèmes donnés

a) Par les caractéristiques : $(E_1) : \begin{cases} y\, u_x - x\, u_y - 2u = 0 \\ u(0,y) = y \end{cases}$, $(E_2) : \begin{cases} u_x - x^2\, u_y = 0 \\ u(x,0) = x^3 \end{cases}$

b) Par séparation des variables : $(E_1) : \begin{cases} 2x\, u_x + u_y = 0 \\ u(1,0) = 1 \end{cases}$, $(E_2) : \begin{cases} u_x + \sin(x)\, u_y = 0 \\ u\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = -2 \end{cases}$

c) Par le changement des coordonnées : $(E_1) : \begin{cases} u_x + u_y = 1 \\ u(2x,x) = x \end{cases}$, $(E_2) : \begin{cases} u_x - 3\, u_y = 0 \\ u(0,y) = \sin(y) \end{cases}$

Exercice 03 :

Résoudre : $(E_1) : \begin{cases} u_{xy} = xe^y \\ u(x,0) = 3x^2 + 5 \\ u(0,y) = -y^3 + 5 \end{cases}$, $(E_2) :$ $u_{xx} + \frac{1}{x}\, u_x = 0$

Exercice 04 : 1) Donner la forme canonique des EDP suivantes :

$(E_1) :$ $u_{xx} - u_{yy} = 0$, $(E_2) :$ $u_{xx} - 6\, u_{xy} + 9\, u_{yy} = xy^2$

2) Résoudre : $u_{xx} - 4\, u_{yy} = 0$, $\begin{cases} u_{xx} - 6\, u_{xy} + 9\, u_{yy} = xy^2 \\ u(0,y) = 0 \\ u(x,0) = 0 \end{cases}$

Exercice 05 : Etudier la nature des séries suivantes :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{n^n}{2^n n!} \qquad \sum_{n\geq 1} n\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \qquad \sum_{n\geq 0} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} \qquad \sum_{n\geq 1} \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$

$$\sum_{n\geq 0} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n \qquad \sum_{n\geq 0} \left(\sqrt{n^3 - 1} - \sqrt{n^3}\right) \qquad \sum_{n\geq 1} \frac{2n^2}{n(n+2)}$$

Exercice 06 : Etudier la nature des séries suivantes :

$$\sum_{n\geq 1} cos\left(\frac{1}{n}\right) \qquad \sum_{n\geq 0} sin\left(\frac{4}{3^n}\right) \qquad \sum_{n\geq 1} \left(1 - cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) \qquad \sum_{n\geq 1} (-1)^n sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$$