1-عموميات على الدوال

تعريف

الدالة ذات المتغير الحقيقي f هي عبارة عن علاقة تربط عناصر I و R ونرمز الى مجموعة هذه الدوال بالرمز $F(I,R)$: $f: I \to R$

-نسمي D_f مجموعة تعريف الدالة والمعرفة كمايلي: $D_f = \{x \in R \ / \ f(x) \text{معرفة}\}$

امثلة

1 الدالة كثير حدود معرفة على R دوما

-2

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$$

$$D_f = \{x \in R \setminus \ \sqrt{x-2} \neq 0 \ \text{و} \ \mathrm{x} - 2 \geq 0\}$$

$$D_f = \{x \in R \ \setminus \mathrm{x} - 2 > 0\} =]2 \ \ , +\infty[$$

-3

$$g(x) = \sqrt{x^2 - 3x - 4}$$

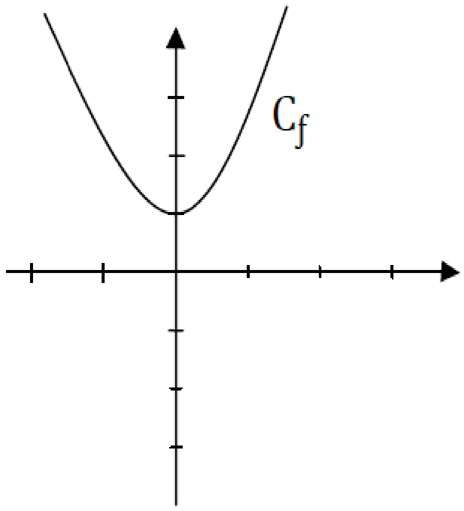
$$D_g = \{x \in R \ \setminus x^2 - 3\mathrm{x} - 4 \geq 0\}$$

$$D_g =]-\infty \ \ , -1[\cup]4 \ \ , +\infty[$$

- التمثيل البياني للدالةهي المجموعة المعرفة كمايلي : $C_f = \{(x, f(x)) \ \setminus x \in \ D_f\}$

مثال:

$$f(x) = x^2 + 1$$



علاقة الترتيب:

لتكن الدالتين $f,g \in F(I,R)$

لدينا $f \leq g$ اذاكان $\forall x \in I : f(x) \leq g(x)$

الدوال الزوجية والدوال الفردية

لتكن $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ نقول أن :

- f دالة زوجية هذا يعني أن: $\forall x \in Df,\ f(x) = f(-x)$

ومنه بيان f متناظر بالنسبة للمستقيم (oy)

- f دالة فردية وهذا يعني أن: $\forall x \in Df,\ f(x) = -f(-x)$

ومنه بيان الدالة f متناظر بالنسبة لنقطة المبدأ 0

الدوال الدورية

نقول عن دالة f انها دالة دورية ذات الدور $T > 0$ اذاكان $\forall x \in I : f(x) = f(x+T)$

مثال

الدالة $\cos(x), \sin(x)$ هي عبارة عن دوال دورية ذات الدور $T = 2\pi$ ، $\cos(x+2\pi) = \cos(x)$

الدوال المحدودة

لتكن $f \in F(I,R)$

- نقول أن f محدودة من الأعلى على I إذا كان : $\exists M \in \mathbb{R} / \forall x \in I,\ f(x) \leq M$
- نقول أن f محدودة من الأسفل على I إذا كان : $\exists m \in \mathbb{R} / \forall x \in I,\ f(x) \geq m$
- نقول عن f أنها محدودة على I إذا كان: $\exists m, M \in \mathbb{R}, \forall x \in I,\ m \leq f(x) \leq M$

العمليات على الدوال

لتكن $g \in \mathcal{F}(I',\mathbb{R}), f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ لدينا:

a) $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

b) $(f.g)(x) = f(x).g(x)$

c) $\frac{1}{f}(x) = \frac{1}{f(x)}$ إذا كان : $f(x) \neq 0$

d) إذا كان لدينا $f(I) \subseteq I' \subseteq \mathbb{R}$ فإن: $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$

الدوال الرتيبة

نقول عن الدالة f انها رتيبة اذا وفقط اذا كانت متزايدة او متناقصة

*الدالة f متزايدة على R من I اذاكان $\forall x, y \in I, x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$

*الدالة f متناقصة على R من I اذاكان $\forall x, y \in I, x \leq y \Rightarrow f(y) \leq f(x)$

ملاحظة

*الدالة المتزايدة هى دالة تحافظ على الترتيب

*الدالة المتناقصة هى دالة تعكس الترتيب

النهايات والاستمرار

النهايات

تعريف: نقول ان الدالة f تقبل نهاية l عند a ونكتب $\lim_{x \to a} f(x) = l$

يعني اذاكان من اجل كل $x \in I$ من اجل كل عدد $\varepsilon > 0$ يوجد عدد حقيقي $\delta > 0$ يحقق $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

اي $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I: \ |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

ملاحظة

النهاية ان وجدت فهي وحيدة

النهاية عن اليمين و عن اليسار

*نقول ان الدالة f تقبل نهاية عن يسار a يعني $\lim_{x \to^< a} f(x) = l_g$

*نقول ان الدالة f تقبل نهاية عن يمين a يعني $\lim_{x \to^> a} f(x) = l_d$

ملاحظة

تقبل الدالة نهاية عند a اذاكانت النهاية عن يسار a تساوي النهاية عن اليمين a

مثال

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & ; \ x < 0 \\ \sqrt{x + 2} & ; x \geq 0 \end{cases}$$

لحساب النهاية عند 0 لابد من حسابها عن يمين 0 وعن يساره

$$D_f = R$$

$$\lim_{x \to^{>} 0} f(x) = \lim_{x \to^{>} 0} \sqrt{x+2} = \sqrt{2}$$

$$\lim_{x \to^{<} 0} f(x) = \lim_{x \to^{<} 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

اذن النهاية غير موجودة عند 0

حالات عدم التعين

- في حساب النهايات نعرف حالة عدم التعيين (التي نرمز لها بالرمز ح.ع.ت) وكل وضعية تقودنا إلى حالة أين نستخدم كل العمليات على النهايات ولا نجد النهاية.
- بعض حالات عدم التعيين المتداولة والمهمة هي :

$$\frac{0}{0}, \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, 0 \times \infty, -\infty + \infty, 1^{\infty}, 0^{0}, 0^{\infty}, \infty^{0}, \ldots$$

قاعدة

لازالة حالة عدم التعين نقوم بتغير شكل الدالة بحيث يمكن حسابها

*نقوم بتحليل الدالة بأكبر قوة في جوار $+\infty$

مثال:

$$\lim_{x \to -\infty} x^2 + x = \lim_{x \to -\infty} x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right) = +\infty$$

*نقوم بتحليل الدالة باستخدام $(x-a)$ عندما $x \to a$

مثال:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - x + 2}{x^2 - 1} = \frac{0}{0} = \text{ح ع ت}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x-2)(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \to 1} \frac{x-2}{x+1} = \frac{1}{2}$$

*نستخدم الضرب في المرافق اذا كانت دالة جذر تربيعي

مثال:

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-x = \text{ح ع ت}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{(\sqrt{x^2+1}+x)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{(\sqrt{x^2+1}+x)}=0$$

الاستمرار

تعريف:

لتكن الدالة f دالة معرفة على مجال $I\subseteq R$ و $x_0\in I$

نقول عن f مستمرة عند x_0 اذا وفقط اذاتحقق مايلي $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

*نقول انها مستمرة على يمين x_0 اذاكان $\lim_{x\to^> x_0} f(x)=f(x_0)$

*نقول انها مستمرة على يسار x_0 اذاكان $\lim_{x\to^< x_0} f(x)=f(x_0)$

ملاحظات

*نقول ان f مستمرة على مجال $[a,b]$ اذا كانت مستمرة عند كل نقطة من هذا المجال $]a,b[$ وتكون مستمرة على يمين a ويسار b

*تكون f مستمرة عند a اذا كانت مستمرة على يمين ويسار

$$\lim_{x\to^> a} f(x)=\lim_{x\to^< a} f(x)=f(a)$$

امثلة

-ادرس استمرارية الدالة f على R

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x-2}{x-2} & ,x\neq 2\\ 3 & ,x=2\end{cases}$$

الدالة معرفة ومستمرة على المجال $;x\in R/\{2\}$ $f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{x-2}$ اذن فهي مستمرة عند كل نقطة من هذا المجال

يتبقى دراسة الاستمرارية عند 2

$$\lim_{x\to^{>}2}\frac{x^2-x-2}{x-2}=\lim_{x\to^{>}2}\frac{(x-2)(x+1)}{x-2}=3=f(2)$$

$$\lim_{x\to^{<}2}\frac{x^2-x-2}{x-2}=\lim_{x\to^{<}2}\frac{(x-2)(x+1)}{x-2}=3=f(2)$$

اذن الدالة مستمرة عند2 اذن هى مستمرة على R

ملاحاظات

*الدوال كثيرات الحدود هى عبارة عن دوال مستمرة على R

*الدوال المثلثية هى عبارة عن دوال مستمرة على مجال تعريفها

التمديد بالاستمرار

لتكن f دالة معرفة على $I-\{x_0\}$ ولدينا $\lim_{x\to x_0} f(x)=l<+\infty$ موجودة

فان الدالة f قابلة للتمديد بالدالة g حيث

$$g(x)=\begin{cases} f(x), & x\in I-\{x_0\} \\ l & ,x=x_0 \end{cases}$$

مثال

لتكن g دالة معرفة كما يلي:

$$g(x)=\begin{cases} \frac{\sin x}{x} & si \quad x\neq 0 \\ 1 & si \quad x=0 \end{cases}$$

g هي تمديد بالاستمرار للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ بـ: $f(x)=\frac{\sin x}{x}$

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسير قسم الجذع المشترك السنة الأولى

جامعة العربي بن مهيدي –أم البواقي مقياس الرياضيات

السلسلة رقم1 (الدوال ذات متغير حقيقي)

التمرين الاول: عين مجموعة التعريف للدوال التالية

$$f(x)=\sqrt{x(x+1)}\,,\qquad g(x)=\frac{x^2+4}{x^3+x^2+2x}\,,\qquad h(x)=\frac{\sqrt{1+x}}{1-x^2}$$

التمرين الثاني: 1/ أحسب نهايات الدوال التالية

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2+2x+8}\ ;\ \lim_{x\to+\infty}x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right);\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-3x+2}{x^2+x-6}\ ;\ \lim_{x\to+\infty}\frac{(a-1)x+1}{(a^2-1)x-3}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1}-\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}-1}\right),\qquad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}\right)$$

2/لتكن الدالة العددية المعرفة كمايلي

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x)}{2x} & si\quad x<0\\ (x+c)^2 & si\quad x>0\end{cases}$$

أ/استنتج مجموعة تعريف الدالة

ب/اوجد c بحيث تكون $\lim_{x\to 0}f(x)$ موجودة ؛ وماهي قيمة النهاية؟

التمرين الثالث :ادرس استمرارية الدوال التالية

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{x^2+1} & si\quad x\geq 1\\ -\frac{1}{2}x^2+1 & si\quad x<1\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{e^{x^2-a^2}} & si\quad |x|<a\\ 0 & si\quad |x|\geq a\end{cases}\quad a\in R_+$$

/أوجد العددين **a,b** حتى تكون الدالة التالية مستمرةعلى **R**

$$h(x)=\begin{cases}-2x & si\quad x\leq\dfrac{\pi}{2}\\ \mathrm{a}\sin(x)+b & si\quad -\dfrac{\pi}{2}<x\leq\dfrac{\pi}{2}\\ \cos(x) & si\quad x>\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

التمرين الرابع: أدرس قابلية التمديد بالاستمرار للدوال التالية

$$\boldsymbol{f(x)=\frac{7}{x-4}} \quad ,\boldsymbol{g(x)=\frac{(1+x)^3-1}{x}} \quad ,\boldsymbol{h(x)=\frac{\sin(2x)}{\sqrt{x+4}-2}}$$