1-المتتاليات العددية

1-1) تعريف : هي كل تطبيق u من IN نحو IR يرفق بكل عدد n طبيعي الصورة $u(n)$

$$u: IN \to IR$$
$$n \to u(n)$$

2-1) متتالية تراجعية :هي متتالية تعرف بقيمة الحد الاول و علاقة تراجعية تربط بين حدين متتابعين :

$$u: IN \to IR$$
$$n \to u_{n+1} = f(u_n)$$

مثال : $u_0 = 2; u_{n+1} = 3u_n - 2$

3-1) اتجاه تغير متتالية

متتالية متزايدة: تكون متتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة إذا وفقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} \geq u_n$.

متتالية متناقصة: تكون متتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة إذا وفقط إذا كان من أجل كلعدد طبيعي n : $u_{n+1} \leq u_n$.

متتالية رتيبة: إذا كانت متتالية متناقصة أو متزايدة نقول أن المتتالية رتيبة.

حالات خاصة

1) اذا كانت المتتالية $(u_n)_{n\in I}$ معطاة بعلاقة تراجعية $u_{n+1} = f(u_n)$ بحيث f معرفة على D و $I \in D$ فانه:

اذا كانت f دالة متزايدة فان $(u_n)_{n\in I}$ و رتيبة.

مثال :نعرف المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$: $u_0 = 2; u_{n+1} = 3u_n - 2$

لدينا $f(x) = 3x - 2$: هي دالة متزايدة ومنه $(u_n)_{n\geq 0}$ رتيبة.

2) اذا كانت $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية موجبة قطعا يعني $\forall n \geq 0; u_n > 0$: فان

- $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة اذا كان : $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1; \forall n \in IN$
- $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة اذا كان : $0 \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1; \forall n \in IN$.

مثال :لدينا المتتالية $u_n = \frac{2^n}{n}; \forall n \in IN^*$ متزايدة لان

$$\forall n \in IN^* : \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{n+1} \times \frac{n}{2^n} = \frac{2n}{n+1} = \frac{n+n}{n+1} \geq 1$$

4-1)متتالية محدودة

1) نقول أن المتتالية $(u_n)_{n\in IN}$ محدودة من الأعلى اذا وجد عدد حقيقي M حيث: $\forall n \in IN: u_n \leq M$

2) نقول أن المتتالية $(u_n)_{n\in IN}$ محدودة من الأسفل اذا وجد عدد حقيقي m حيث: $\forall n \in IN : u_n \geq m$

3) نقول أن المتتالية $(u_n)_{n\in IN}$ محدودة اذا كانت محدودة من الأعلى و محدودة من الأسفل.

5-1)مفهوم التقارب و النهايات

تعريف : نقول عن العدد l انه نهاية المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq 0}$ و نكتب $lim_{n\to+\infty} u_n = l$ عندما و فقط عندما يتحقق ما يلي : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in IN \; ; \; \forall n \geq n_0 : |u_n - l| \leq \varepsilon$

نقول عن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$أنها متقاربة من العدد الحقيقي l إذا وفقط إذا كان $lim_{n\to+\infty} u_n = l$
ونقول عن المتتالية أنها متباعدة إذا لم تكن متقاربة.

مبرهنة : اذا كانت المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة من العدد الحقيقي l فان هذه النهاية وحيدة.

تقارب الدوال الرتيبة

- إذا كانت (u_n) متتالية متزايدة و محدودة من الأعلى فإنها متقاربة .
- إذا كانت (u_n) متتالية متناقصة و محدودة من الأسفل فإنها متقاربة .

مثال: المتتالية $u_n = \frac{1}{n^2}$ معرفة و متناقصة على IN^* و محدودة من الاسفل بالصفر ومنه فان المتتالية متقاربة نحو 0.

متتاليتان متجاورتان: تكون متتاليتان عدديتان $(u_n)_{n\geq 0}$ و $(v_n)_{n\geq 0}$ متجاورتين إذا كانت و فقط إذا كانت إحداهما متزايدة و الأخرى متناقصة و$\lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$.

مثال: $v_n = 1 + \frac{1}{n^2}; \;\; u_n = 1 - \frac{1}{n^2}$

مبرهنة: إذا كانت$(u_n)_{n\geq 0}$ و $(v_n)_{n\geq 0}$ متتاليتين عدديتين متجاورتين فإنهما متقاربتان و لهما نفس النهاية.

الخصائص الجبرية: لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ و $(v_n)_{n\geq 0}$ متتاليتين عدديتين بحيث

$\lim_{n\to+\infty} u_n = l_1$ و $\lim_{n\to+\infty} v_n = l_2$

فان : $\lim_{n\to+\infty}(u_n+v_n) = l_1 + l_2$ و $\lim_{n\to+\infty}(u_n \times v_n) = l_1 \times l_2$

نظرية الحصر: لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$; $(v_n)_{n\geq 0}$ و $(w_n)_{n\geq 0}$ ثلاث متتاليات عددية اذا كان

$\forall n \geq n_0 : w_n \leq u_n \leq v_v$ (حيث n_0 عدد طبيعي معلوم) و $\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l$

فان : $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$:

مثال: لتكن $\forall n \in IN^*: u_n = 1 - \frac{sin(n)}{n^2}$

لدينا : $\forall n \in IN^*: -1 \leq sin(n) \leq 1$ ومنه $\forall n \in IN^*: 1 - \frac{1}{n^2} \leq u_n \leq 1 + \frac{1}{n^2}$

بما ان : $lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{n^2} = lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{n^2} = 1$ فان : $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$

6-1) تعريف المتتاليات المستخرجة:

لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية عددية نقول عن $(v_n)_{n\geq 0}$ انها مستخرجة من $(u_n)_{n\geq 0}$ اذا وجد تطبيق $Q: IN \to IN$ متزايد تماما بحيث: $\forall n \in IN: v_n = u_{Q(n)}$

مثال: $u_n = \frac{n+1}{2n-1}$ يوجد $Q_1(n) = 2n$ و $Q_2(n) = 1 + n$ حيث:

$v_n = u_{Q_1(n)} = \frac{2n+1}{4n-1}$ و $w_n = u_{Q_2(n)} = \frac{2n+1}{4n+1}$

مبرهنة : اذا كانت المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة من العدد الحقيقي l فان كل المتتاليات المستخرجة منها متقاربة نحو نفس النهاية.

ملاحظة: لإثبات ان متتالية متباعدة يكفي ان نبرهن ان بعض المتتاليات المستخرجة منها تؤول الى نهايات مختلفة.

مثال: لتكن $\forall n \in IN^*: u_n = (-1)^n$ لدينا $u_{2n+1} = -1$ و $u_{2n} = 1$ ومنه المتتالية متباعدة.

7-1) المتتاليات الحسابية.

تعريف: نقول أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية حدها الأول u_0 و أساسها r (r عدد حقيقي) إذا و فقط إذا كان من
أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = u_n + r$.

الحد العام و مجموع حدود متتابعة من متتالية حسابية :

$S = u_0 + u_1 + ... + u_{n-1} + u_n = (n+1)\left(\frac{u_0 + u_n}{2}\right)$ و $u_n = u_0 + nr$

8-1) المتتاليات الهندسية

تعريف: نقول أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية حدها الأول u_0 و أساسها q (q عدد حقيقي غير معدوم)

إذا و فقط إذا كان أن من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = u_n \times q$.

الحد العام و مجموع حدود متتابعة من متتالية هندسية:

$$S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} + u_n = u_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right) \text{ و } u_n = u_0 \times q^n$$

نهاية متتالية هندسية.

- إذا كان $q > 1$ و $u_0 > 0$ فإن $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$; المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متباعدة .
- إذا كان $q > 1$ و $u_0 < 0$ فإن $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$; المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متباعدة .
- إذا كان $-1 < q < 1$ فإن $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$; المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة .
- إذا كان $q \leq -1$ فإن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متباعدة (النهاية غير موجودة).

مثال: لتكن المتتالية (v_n) المعرفة ب: $v_0 = -1$ و $v_n = -5n - 1$

لدينا : $v_{n+1} - v_n = -5(n+1) - 1 - (-5n - 1) = -5$. إذن من أجل كل عدد طبيعي n: $v_{n+1} - v_n = -5$

و منه المتتالية (v_n) متتالية حسابية أساسها $r = -5$ و حدها الأول $v_0 = -1$.

من أجل كل عدد طبيعي n: $S = v_0 + v_1 + ... + v_{n-1} = \frac{n}{2}(5 + 5 - 5n) = \frac{n}{2}(-2 - 5n)$.