1- L’espace vectoriel

Définition 1 : K désigne un corps commutatif. On appelle espace vectoriel sur k tout ensemble E muni de deux lois :

Une loi interne : noté ‘’+’’ est une application de E×E dans E vérifiant :

- + est commutatif : ∀ u, v ∈ E → u+v=v+u
- + est associatif : ∀ u,v,w ∈ E →(u+v)+w=u+(v+w)
- + admet un élément neutre : ∀ u∈ E, ∃ O_E ∈ E → u+O_E= u ($O_E$est un vecteur nul)
- + admet un élément symétrique : ∀ u ∈ E, ∃ u’∈E → u+u’ = O_E

Une loi externe : notée “ **.** ” est une application de k × E dans E vérifiant :

- ∀ λ, β ∈ K , ∀ u ∈ E → (λ+ β). u = λ . u + β .u
- ∀ λ ∈ K , ∀ u ,v ∈ E → λ . (u+v) = λ . u + v= λ. u +λ. V
- ∀ λ, β ∈ K , ∀ u ∈ E → (λ .β) . u= λ .(β . u)
- ∀ u ∈ E → 1_K × u = u (1_Kvecteur neutre)

2- Sous espace vectoriel

Définition 2 : soit E un K- espace vectoriel**,** et F une partie de E. on dit que F est un sous espace vectoriel de E si et seulement si :

- F ≠ ∅ ↔ O_E ∈ F
- ∀ u , v ∈ F → u+v ∈ F
- ∀ λ ∈ K , u ∈ F → λ . u ∈ F

Exemple

F = { (x, y, z) ∈ $R^3, x - 2y + z = 0$ } de R^3

Vérifier que F est une partie de R^3

3- La combinaison linéaire

Définition 3 : soit {V1 , V2, V3 ………Vn} une famille des vecteurs d’un K-espace vectoriel E . On dit qu’un vecteur u de E est combinaison linéaire de {V1 , V2, V3 ………Vn} si il existe des scalaires λ1 ,λ2….λn ∈ R tel que u= λ1 .V1 +λ2 .V2 ………λn .Vn .

Exemple

V1 = (1,0,1), V2 = (0,1,1), V3 = (1,1,0)

U= (5,2,1)

Est-ce que U c’est une combinaison linéaire ?

4- Famille libre

On dit que la famille {V1 , V2, V3 ………Vn} une famille des vecteurs d’un K-espace vectoriel E. une famille libre ou linéairement indépendante si la combinaison linéaire nulle .

c.-à-d., ∀ λ1 ,λ2….λn ∈ R , λ1 .V1 +λ2 .V2 ………λn .Vn = O_E (λ1 =λ2….λn = 0)

Exemple

{ V1= (1,0,1) , V2=(0,2,2) , V3=(3,7,1) } de R^3

Est-ce que c'est une famille libre ?

5- Famille génératrice

On dit que la famille {V1 , V2, V3 ………Vn} une famille des vecteurs d'un K-espace vectoriel E. une famille génératrice de E si tout vecteurs de E est combinaison linéaire des vecteurs {V1 , V2, V3 ………Vn} , c-a-d : ∀ u ∈ E , ∃ λ1 ,λ2….λn ∈ R → u= λ1 .V1 +λ2 .V2 ………λn .Vn .

Exemple

{V1= (2,1), V2 =(0,1)} de R^2

Est-ce que c'est une famille libre ?

6- Base d'un espace vectoriel

Définition 6 : on dit que la famille {V1 , V2, V3 ………Vn} une famille des vecteurs d'un K-espace vectoriel E est une base de E si {V1 , V2, V3 ………Vn} une famille libre et génératrice .

Exemple

{V1= (2,1) , V2 =(1,1)} de R^2

Est-ce que c'est une base de R^2?

7- Dimension

La dimension d'un espace vectoriel de dimension fini E, noté '' dim E'' est par définition le nombre d'éléments dune base de E .

Dim $K^n = n$ et Dim $K_{n[X]=n+1}$

8- La base d'un sous espace vectoriel

Exemple :

A={ (x, y, z) ∈ $R^3, x - 2y + z = 0$ } de R^3

Comment calculer la base ?

Théorèmes

Soit E un K- espace vectoriel de dimension finie

- Alors tous sous espace vectoriel F de E est de dimension finie
- Dim F ≤ Dim E

- Soit F et G deux sous espace vectoriel de E et $G \subset F$ on a donc : dim F =dim G

9- L'intersection

Soit E un K-espace vectoriel, E et G deux sous espace vectoriel de E . L'intersection de F et G est un sous espace vectoriel de E tel que :

$F \cap G = \{ u \in E / u \in F \text{ et } u \in G\}$

10- La somme

Soient E un K-espace vectoriel, F et G deus s.e.v de E. La somme de F et G est un sous espace vectoriel de E tel que : $F+G = \{u + v / u \in F \text{ et } v \in G\}$

11- Somme direct (supplémentaire)

Soit F et G deux s.e.v de E. On dit que la somme de F et G est direct si et seulement si :

1- $F \cap G = \{ 0_E\}$
2- F+G = E
3- On note alors F+G =E, et on dit que aussi F et G sont supplémentaire dans E

Théoréme

Dim (F+G)=dim F+ dim G -dim ($F \cap G$), si E= F+G donc dim E= dim F + dim G

Exemple

$E = R^3$, $F = \{(x,y,z) \in R^3, x - y - z = 0 \}$

$G = \{(x,y,z) \in R^3, y = z = 0\}$