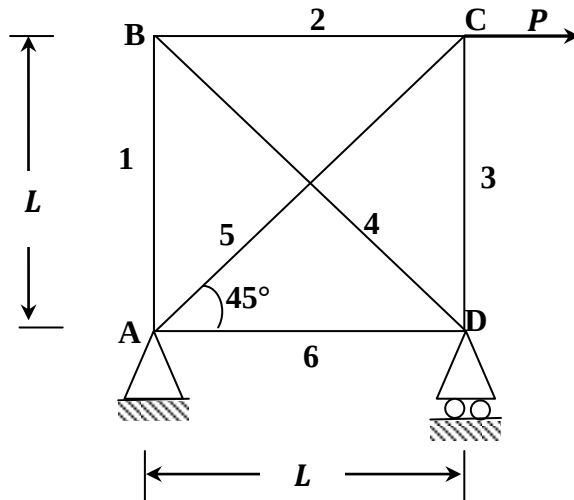


5.6. Exercices :

5.6.1. Exercice N°5.1 :

Pour le treillis hyperstatique suivant, on demande :

- de déterminer le degré d'hyperstaticité;
- de déterminer les efforts dans toutes les barres.



- Le degré d'hyperstaticité :

$$d = b + l - 2n = 6 + 3 - 2 \cdot 4 = 1 \text{ fois hyperstatique intérieurement}$$

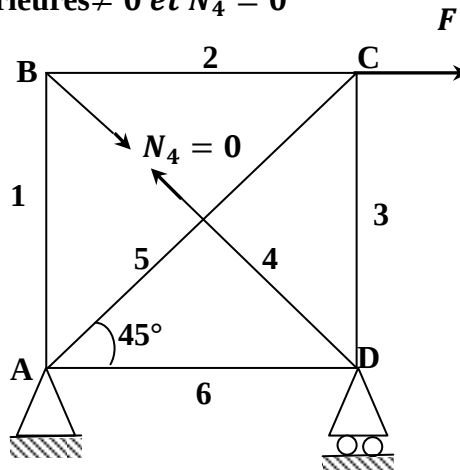
- Le système de base :

Le degré d'hyperstaticité valant 1, on choisit l'effort normal inconnu de la barre 4 (N_4).

Résolution des systèmes isostatiques : Calcul des efforts normaux

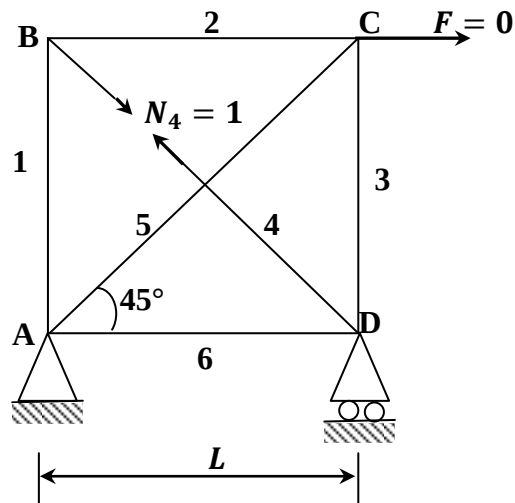
Le calcul des efforts internes des barres se fait par l'une des méthodes ; soit la méthode des sections ou la méthode des nœuds. Les tableaux ci-dessous reprennent les valeurs de ces efforts normaux pour les deux états (**Etat0** et **Etat 1**).

- **Etat 0 : Charges extérieures $\neq 0$ et $N_4 = 0$**



N° de la barre	Longueur de la barre	Effort normal $N_{\Sigma F}^0$
1	L	0
2	L	0
3	L	$-F$
4	$1.41L$	$-F$
5	$1.41L$	$1.41F$
6	L	0

- Etat 1 : Charges extérieures = 0 et $N_4 = 1$



N° de la barre	Longueur de la barre	Effort normal n_1^0
1	L	-0.71
2	L	-0.71
3	L	-0.71
4	$1.41L$	1
5	$1.41L$	1
6	L	-0.71

- Calculer des déplacements δ_{ij} .

$$\delta_{11} = \frac{4.82L}{EA} \quad \text{et} \quad \delta_{10} = \frac{2.71FL}{EA}$$

- On écrit le système d'équation canonique :

$$\frac{4.82L}{EA} N_4 + \frac{2.71FL}{EA} = 0 \quad \Rightarrow \quad N_4 = -0.56F$$

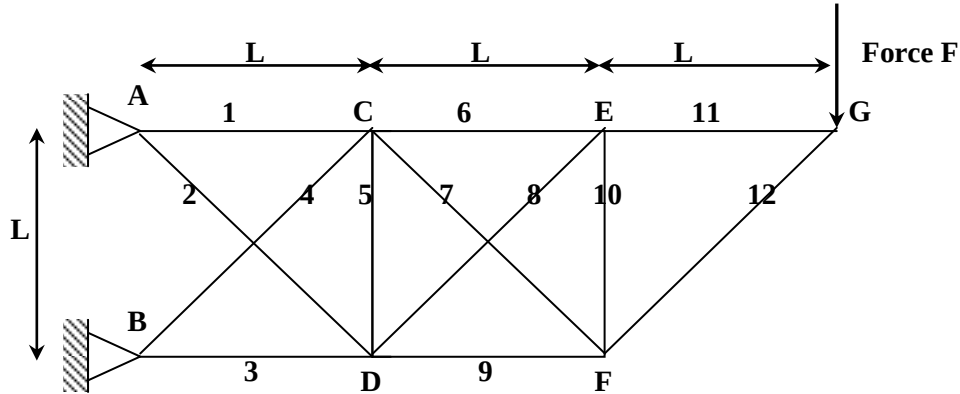
- Les efforts normaux dans les barres des systèmes réels (treillis hyperstatique)

N° de la barre	Longueur de la barre	Effort normal $N_{\Sigma F}^0$	Effort normal n_1^0	$N_{\Sigma F}^0 + N_4 n_1^0$
1	L	0	-0.71	$0.398F$
2	L	0	-0.71	$0.398F$
3	L	$-F$	-0.71	$-0.602F$
4	$1.41L$	0	1	$-0.56F$
5	$1.41L$	$1.41F$	1	$0.85F$
6	L	0	-0.71	$0.398F$

5.6.2. Exercice N° 5.2 :

Pour le treillis hyperstatique suivant, on demande :

- de déterminer le degré d'hyperstaticité;
- de déterminer les efforts dans toutes les barres.



Module d'élasticité E et section A identiques pour toutes les barres

- **Le degré d'hyperstaticité :**

$$d = b + l - 2n$$

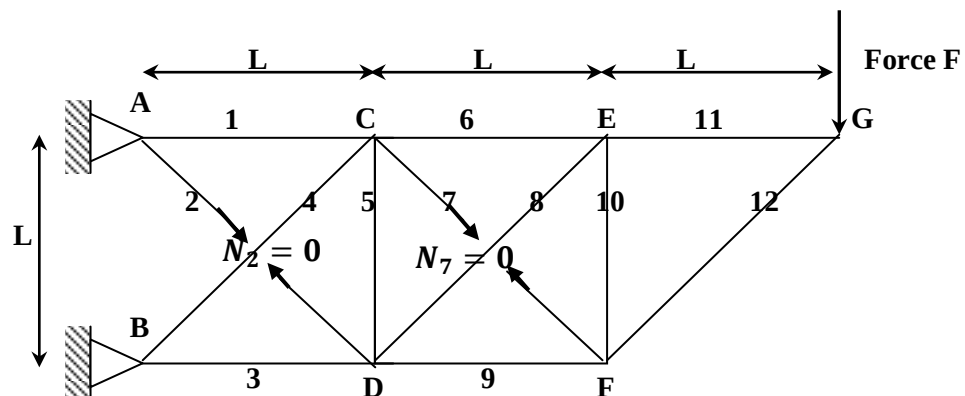
- le nombre de barres $b = 12$
 - le nombre de nœuds $n = 7$
 - le nombre de liaisons $l = 4$
- $$\left. \begin{array}{l} \text{le nombre de barres } b = 12 \\ \text{le nombre de nœuds } n = 7 \\ \text{le nombre de liaisons } l = 4 \end{array} \right\} d = b + l - 2n = 12 + 4 - 2 \cdot 7 = 2$$

- **Système de base :**

On choisit les efforts normaux des barres 2 et 7 (N_2 et N_7) comme inconnus.

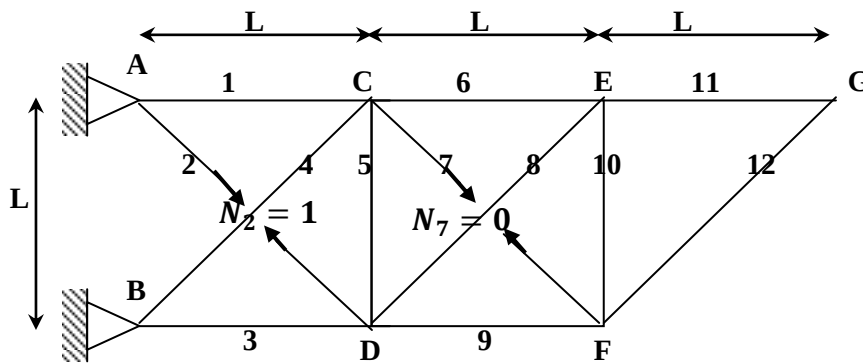
- **Calcul des efforts normaux pour les états 0, 1 et 2 :**

Etat 0 : Charges extérieures $\neq 0$, $N_2 = 0$ et $N_7 = 0$



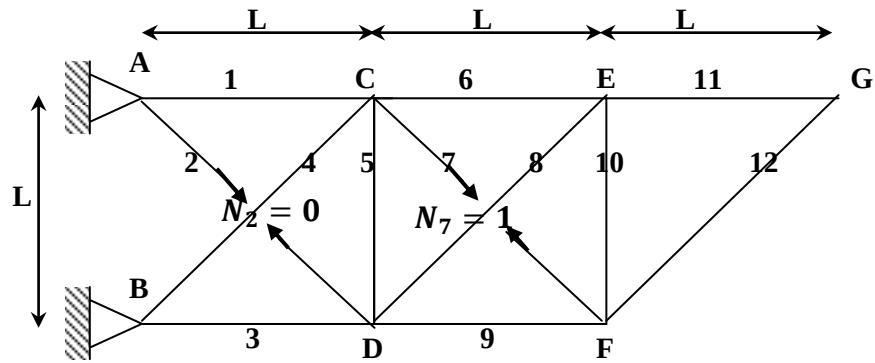
N° de la barre	Longueur de la barre	Effort normal $N_{\Sigma F}^0$
1	L	$3F$
2	$\sqrt{2}L$	0
3	L	$-2F$
4	$\sqrt{2}L$	$-\sqrt{2}F$
5	L	F
6	L	$2F$
7	$\sqrt{2}L$	0
8	$\sqrt{2}L$	$-\sqrt{2}F$
9	L	$-F$
10	L	F
11	L	F
12	$\sqrt{2}L$	$-\sqrt{2}F$

Etat 1 : Charges extérieures= 0, $N_2 = 1$ et $N_7 = 0$



N° de la barre	Longueur de la barre	Effort normal n_1^0
1	L	$-1/\sqrt{2}$
2	$\sqrt{2}L$	1
3	L	$-1/\sqrt{2}$
4	$\sqrt{2}L$	1
5	L	$-1/\sqrt{2}$
6	L	0
7	$\sqrt{2}L$	0
8	$\sqrt{2}L$	0
9	L	0
10	L	0
11	L	0
12	$\sqrt{2}L$	0

Etat 2 : Charges extérieures = 0, $N_2 = 0$ et $N_7 = 1$



N° de la barre	Longueur de la barre	Effort normal n_2^0
1	L	0
2	$\sqrt{2}L$	0
3	L	0
4	$\sqrt{2}L$	0
5	L	$-1/\sqrt{2}$
6	L	$-1/\sqrt{2}$
7	$\sqrt{2}l$	1
8	$\sqrt{2}l$	1
9	L	$-1/\sqrt{2}$
10	L	$-1/\sqrt{2}$
11	L	0
12	$\sqrt{2}L$	0

- Calculer des déplacements δ_{ij} .

$$\delta_{11} = \frac{(3/2 + 2\sqrt{2})L}{EA}, \quad \delta_{12} = \delta_{21} = \frac{L}{2EA}, \quad \delta_{22} = \frac{2(1 + \sqrt{2})L}{EA}$$

$$\delta_{10} = -\frac{(2 + \sqrt{2})FL}{EA} \quad \text{et} \quad \delta_{20} = -\frac{(2 + \sqrt{2} + 1/\sqrt{2})FL}{EA}$$

- On écrit le système d'équations canoniques :

$$\begin{cases} \frac{(3/2 + 2\sqrt{2})L}{EA}N_2 + \frac{L}{2EA}N_7 - \frac{(2 + \sqrt{2})FL}{EA} = 0 \\ \frac{L}{2EA}N_2 + \frac{2(1 + \sqrt{2})L}{EA}N_7 - \frac{(2 + \sqrt{2} + 1/\sqrt{2})FL}{EA} = 0 \end{cases}$$

A partir du système, on trouve :

$$\begin{cases} N_2 = 0.699F \\ N_7 = 0.781F \end{cases}$$

- Valeurs des efforts normaux du treillis hyperstatique réel

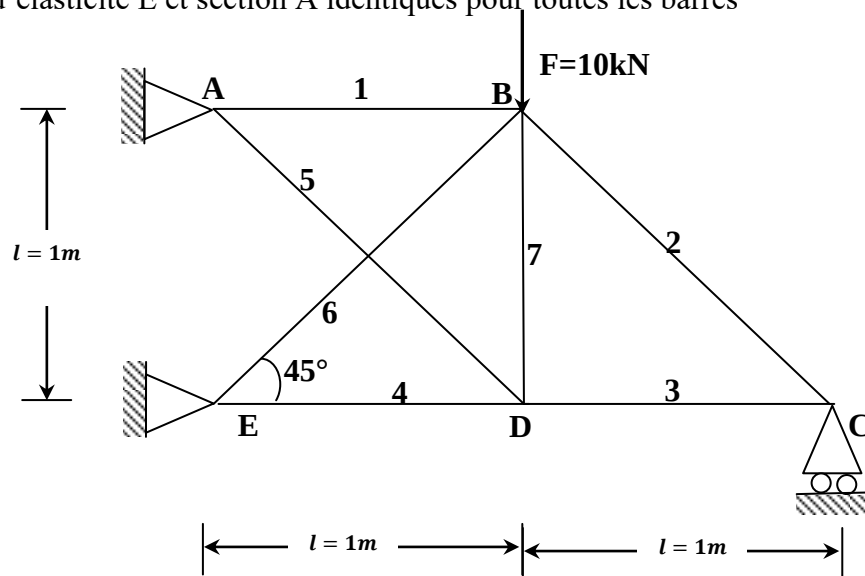
N° de la barre	Longueur de la barre	Effort normal $N_{\Sigma F}^0$	Effort normal n_1^0	Effort normal n_2^0	$N_{\Sigma F}^0 + N_2 n_1^0 + N_7 n_2^0$
1	L	$3F$	$-1/\sqrt{2}$	0	$2.506F$
2	$\sqrt{2}L$	0	1	0	$0.699F$
3	L	$-2F$	$-1/\sqrt{2}$	0	$-2.494F$
4	$\sqrt{2}L$	$-\sqrt{2}F$	1	0	$-0.716F$
5	L	F	$-1/\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$	$-0.047F$
6	L	$2F$	0	$-1/\sqrt{2}$	$1.448F$
7	$\sqrt{2}L$	0	0	1	$0.781F$
8	$\sqrt{2}L$	$-\sqrt{2}F$	0	1	$-0.633F$
9	L	$-F$	0	$-1/\sqrt{2}$	$-1.552F$
10	L	F	0	$-1/\sqrt{2}$	$0.448F$
11	L	F	0	0	F
12	$\sqrt{2}L$	$-\sqrt{2}F$	0	0	$-1.414F$

5.6.3. Exercice N° 5.3 :

Pour le treillis hyperstatique suivant, on demande :

- de déterminer le degré d'hyperstaticité;
- de déterminer les efforts dans toutes les barres.

Module d'élasticité E et section A identiques pour toutes les barres



- **Le degré d'hyperstaticité :**

$$d = b + l - 2n = 7 + 5 - 2.5 = 2$$

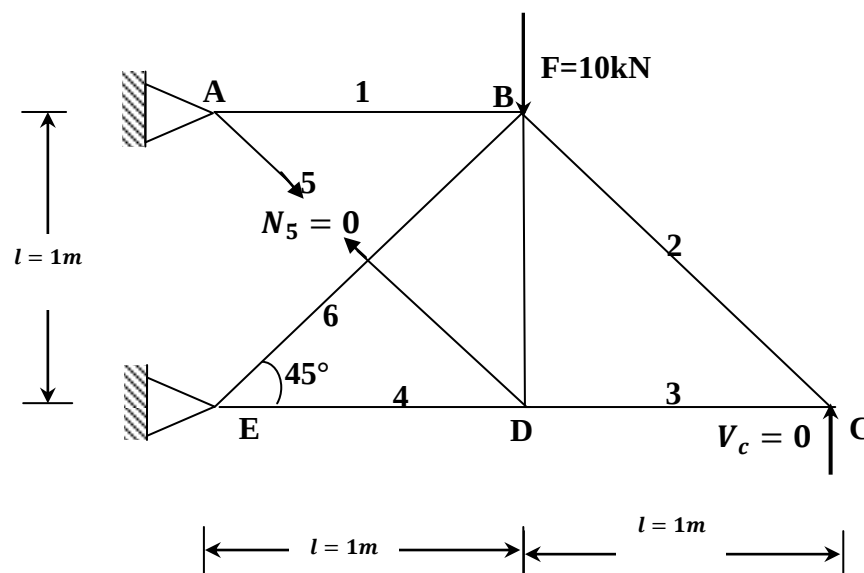
- **Système de base :**

On choisit comme inconnus la réaction verticale à l'appui C (V_C) et l'effort normal (N_5) de barre 5.

- **Calcul des efforts normaux pour les états 0, 1 et 2 :**

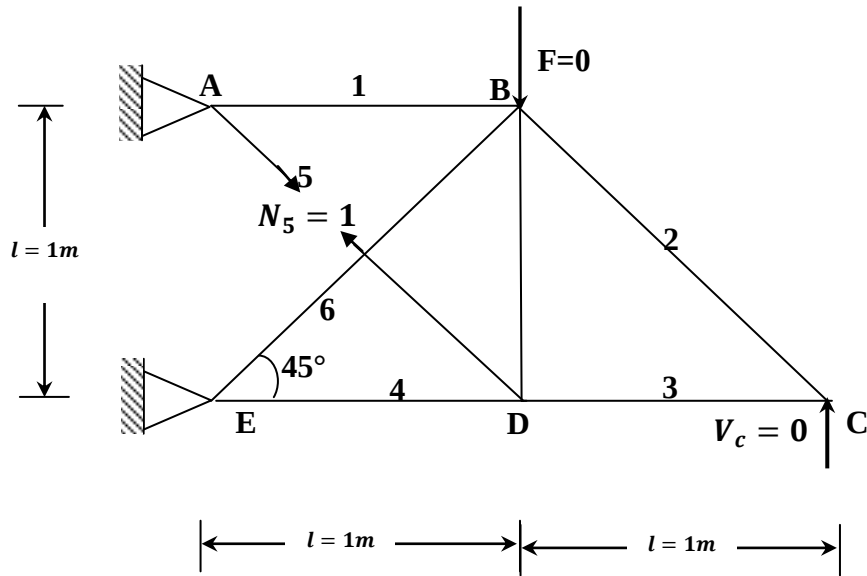
Les tableaux ci-dessous reprennent la valeur des efforts normaux dans les barres pour chacune des structures isostatiques (**Etat0, Etat 1 et Etat 2**).

- **Etat 0 : Charges extérieures $\neq 0$, $N_5 = 0$ et $V_C = 0$**



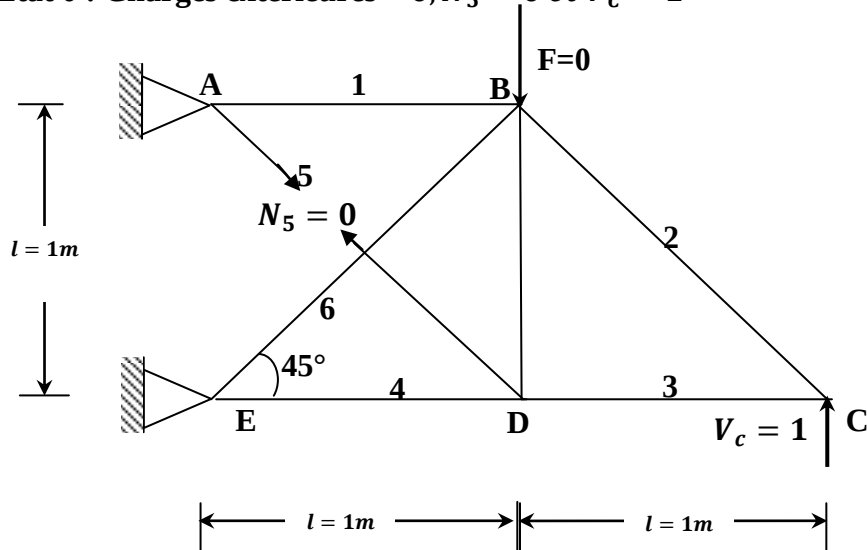
N° de la barre	Longueur de la barre	Effort normal $N_{\Sigma F}^0$
1	1	10
2	1.41	0
3	1	0
4	1	0
5	1.41	0
6	1.41	-14.14
7	1	0

- Etat 1 : Charges extérieures = 0, $N_5 = 1$ et $V_C = 0$



N° de la barre	Longueur de la barre	Effort normal n_7^0
1	1	-0.71
2	1.41	0
3	1	0
4	1	-0.71
5	1.41	1
6	1.41	1
7	1	-0.71

- Etat 0 : Charges extérieures = 0, $N_5 = 0$ et $V_C = 1$



N° de la barre	Longueur de la barre	Effort normal $n_i(V_c = 1)$
1	1	-2
2	1.41	-1.41
3	1	1
4	1	1
5	1.41	0
6	1.41	1.41
7	1	0

- Calculer des déplacements δ_{ij} .

$$\delta_{11} = \frac{4.32}{EA}, \quad \delta_{12} = \delta_{21} = \frac{2.7}{EA}, \quad \delta_{22} = \frac{11.62}{EA}$$

$$\delta_{10} = -\frac{27.1}{EA} \quad \text{et} \quad \delta_{20} = -\frac{48.11}{EA}$$

- On écrit le système d'équations canoniques :

$$\begin{cases} \frac{4.32}{EA} N_5 + \frac{2.7}{EA} V_c - \frac{27.1}{EA} = 0 \\ \frac{2.7}{EA} N_5 + \frac{11.62}{EA} V_c - \frac{48.11}{EA} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N_5 = 4.28 kN \\ V_c = 3.15 kN \end{cases}$$

- Valeurs des efforts normaux du treillis hyperstatique réel

N° de la barre	Longueur de la barre	Effort normal $N_{\Sigma F}^0$	Effort normal n_5^0	Effort normal $n_i(V_c = 1)$	$N_{\Sigma F}^0 + N_5 n_5^0 + V_c n_i$
1	1	10	-0.71	-2	0.67
2	1.41	0	0	-1.41	-4.45
3	1	0	0	1	3.15
4	1	0	-0.71	1	0.12
5	1.41	0	1	0	4.28
6	1.41	-14.14	1	1.41	-5.4
7	1	0	-0.71	0	-3.03