الجمهوريّة الجزائريّة الدّيمقراطيّة الشّعبيّة

وزارة التّعليم العالي والبحث العلميّ

Université Ferhat Abbas - Setif

جامعة فرحات عبّاس سطيف-1-

كلّيّة العلوم الاقتصاديّة والتّجاريّة وعلوم التّسيير

قسم علوم التسيير

محاضرات في الرياضيات المالية

مطبوعة موجهة لطلبة السنة الثانية

من إعداد:

د/مرزوقي رفيق

السنة الجامعية: 2019/2018

فهرس المحتويات

مقدمة:

تتضمن هذه المطبوعة مجموعة محاضرات مقياس الرياضيات المالية، والتي تدخل ضمن الرياضيات المستخدمة في عمليات التمويل والإستثمار، لحل المسائل المتعلقة بالفائدة البسيطة والمركبة، وفقا لبرنامج وزارة التعليم العالي والبحث العلمي.

ومن أجل تغطية هذا البرنامج، تم تقسيم هاته المحاضرات إلى جزأين رئيسيين:

الجزء الأول: ويخص العمليات المالية في الأجل القصير، ويشمل كل من مفهوم الفائدة البسيطة وأهم القوانين الأساسية المتعلقة بها، ثم القيمة الحالية والخصم، كما يتناول قضايا تكافؤ الأوراق التجارية.

الجزء الثاني: ويخص العمليات المالية في الأجل الطويل، وفيه نتناول القوانين الأساسية لحساب لفائدة المركبة والرصيد وبعض المسائل المتعلقة بها، وقوانين القيمة الحالية والخصم، فدراسة تكافؤ الديون على المدى الطويل، وقوانين الجملة والقيمة الحالية للدفعات المتساوية والدفعات المتغيرة، وأخيرا استهلاك القروض بدفعات ثابتة، واستهلاك القروض باستهلاكات ثابتة.

وفي الختام نتمنى أن نكون قد وفقنا في تقديم هذه المحاضرات، بأسلوب سهل وميسر يخدم الطلبة وجميع المهتمين بالرياضيات المالية.

الدكتور: مرزوقي رفيق

الجزء الأول

العمليات المالية في الأجل القصير

الفصل الأول: الفائدة البسطة l'intérêt simple

أولا: مفاهيم أساسية

قبل التطرق إلى طرق حساب الفائدة والرصيد، يجب علينا أولا التعرف على ماهية الفائدة و أنواعها.

1- تعريف الفائدة: تعرف الفائدة على أنها العائد أو التعويض المادي، الناتج عن استثمار أو اقتراض أموال الغير[1].

2- أنواع الفائدة: تنقسم الفائدة إلى نوعان هما[2]:

ا- الفائدة البسيطة: هي الفائدة التي تحسب على الأصل (المبلغ المستثمر، المبلغ المودع، المبلغ المقترض) في نهاية كل فترة زمنية، دون أن تضاف إلى المبلغ الأصلي.

ب- الفائدة المركبة: هي الفائدة التي تحسب على الأصل (المبلغ المستثمر، المبلغ المودع، المبلغ المقترض) في نهاية كل فترة زمنية، أي أنه بعد نهاية كل فترة زمنية يكون لدينا أصل جديد، هذا الأخير يتكون من الأصل السابق مضافا إليه فائدة الفترة السابقة، وسنتطرق اليها في الجزء الثاني.

ثالثا: عناصر حساب الفائدة

إن العائد الذي يتحصل عليه صاحب رأس المال، والذي قام باستثمار أو إقراض ماله للغير مرتبط بثلاث عناصر أساسية هي[3]:

1- رأس المال: أو المبلغ الأصلي ويرمز له بالرمز C_0.

2- مدة إقراض أو استثمار راس المال: وتكون قصيرالأجل إما سنوية، أو شهرية، أو يومية، وتمثل المدة الفاصلة بين يوم الإيداع ويوم السحب، حيث لا يحسب يوم الإيداع ضمن المدة الزمنية وهو اليوم الأول، وإنما يحسب يوم السحب، وهو اليوم الأخير ويرمز لها بالرمز n.

3- معدل الفائدة: هو عبارة عن معدل توظيف المبلغ الأصلي، وهو يمثل نسبة مئوية يتم الإتفاق عليها، وقد تكون سنوية، أو شهرية، أو يومية، وهو يتناسب طرديا مع الفائدة ويرمز له بالرمز t.

وعليه فإن قانون حساب الفائدة يكون كما يلي:

1- الفائدة السنوية: $I = \dfrac{C_0.t.n}{100}$

2- الفائدة الشهرية: $I = \dfrac{C_0.t.n}{1200}$

---

[1] عمر عبد الجواد عبد العزيز، **الرياضيات المالية (فائدة بسيطة وفائدة مركبة)**، دار الصفاء للنشر والتوزيع، الطبعة الأولى، عمان، 1999، ص17.

[2] كتاب **الرياضيات المالية والإقتصادية** ، متوفر على الموقع https://www.alfreed-ph.com/2018/02/Financial-and-Economic-Mathematics-pdf7.html

[3] بن طلحة صليحة، **الرياضيات المالية**، منشورات الدار الجزائرية، الطبعة الأولى، الجزائر، 2015، ص06.

3- الفائدة اليومية: $I = \frac{C_0.t.n}{36000}$

مثال:

قام شخص بتوظيف مبلغ قدره $20000\ DA$ في بنك معين لمدة سنتين، وبمعدل فائدة قدر ب 9% ،كما وظف مبلغ $30000\ DA$ لمدة 08 أشهربمعدل فائدة 8%، ووظف مبلغ آخر بلغ $10000DA$ لمدة 200يوم، وبمعدل فائدة قدره 7.50%، أحسب الفائدة الإجمالية التي سيتحصل عليها هذا الشخص؟

الحل:

$C_1 = 20000DA$ $C_2 = 30000\ DA$ $C_3 = 10000\ DA$ $n_1 = 2\ ans$ $n_2 = 8\ mois$ $n_3 = 200\ jours$ $I = ?$

نلاحظ أن فترات التوظيف مختلفة وكذا معدلات الفائدة، وعليه تكون أبسط طريقة لحساب الفائدة الإجمالية، هي حساب الفوائد الجزئية لكل فترة، ثم جمعها للحصول على الفائدة الإجمالية.

1- المدة سنتين (فائدة سنوية)

$$I_1 = \frac{C_1.t_1.n_1}{100}$$

$$I_1 = \frac{20000.9.2}{100} = 3600DA$$

2- المدة 08 أشهر(فائدة شهرية)

$$I_2 = \frac{C_2.t_2.n_2}{1200}$$

$$I_2 = \frac{30000.8.8}{1200} = 1600DA$$

3- المدة 200 يوم (فائدة يومية)

$$I_3 = \frac{C_3.t_3.n_3}{36000}$$

$$I_3 = \frac{10000.7.5.200}{36000} = 416.67DA$$

ومنه تكون الفائدة الإجمالية تساوي:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = 3600 + 1600 + 416.67$$
$$I = 5616.67\ DA$$

رابعا: الفائدة التجارية والفائدة الصحيحة

العدد الصحيح لأيام السنة هو 365 يوم وتدعى السنة البسيطة، أو 366 يوم وتدعى بالسنة الكبيسة (فيفري 29 يوم)، ولمعرفة هل السنة بسيطة أم كبيسة، نقسم السنة على 4 فإذا كان حاصل القسمة عددا تاما فالسنة كبيسة، أما إذا كان الحاصل بوجود باقي فالسنة بسيطة، ولكن تجاريا وعلى مستوى البنوك والمؤسسات المالية، يتم اعتبار عدد أيام السنة هو 360 يوم، ومنه فهناك فائدة تجارية ويرمز لها بالرمز I_c وفائدة صحيحة ويرمز لها بالرمز I_r.

1- الفائدة التجارية: $I_c = \dfrac{C_0.t.n}{36000}$

2- الفائدة الصحيحة: ونميز بين حالتين:

ا- حالة الفائدة الصحيحة والسنة بسيطة: $I_r = \dfrac{C_0.t.n}{36500}$

ب- حالة الفائدة الصحيحة والسنة كبيسة: $I_r = \dfrac{C_0.t.n}{36600}$

مثال:

أودع شخص مبلغا قدره $11000\ DA$ في أحد البنوك بتاريخ 2016/01/31 وقد تحصل على فائدة مقدارها $DA120$ بتاريخ 2016/04/30 على أساس الفائدة الصحيحة، أحسب معدل التوظيف؟

الحل:

إن سنة 2016 هي سنة كبيسة لأن: 2016/4=504

ولحساب المدة الزمنية الفاصلة بين تاريخ الإيداع وتاريخ السحب نتبع ما يلي:

29 فيفري+ 31 مارس +30 أفريل=90 يوم

وعليه تحسب الفائدة الصحيحة كما يلي:

$$I_r = \frac{C_0.t.n}{36600}$$
$$t = \frac{I_r \times 36600}{C_0.n} = \frac{120 \times 36600}{11000 \times 90}$$
$$t \simeq 4.44\%$$

خامسا: العلاقة بين الفائدة التجارية والفائدة الصحيحة

1- النسبة بين الفائدتين

تكون النسبة بين الصنفين من الفائدة كما يلي:

$$\frac{I_r}{I_c}=\frac{\frac{C_0.t.n}{36500}}{\frac{C_0.t.n}{36000}}=\frac{72}{73}$$

$$I_r=I_c.\frac{72}{73}$$

تستخدم هذه العلاقة لإيجاد الفائدة التجارية إذا كان معلوما لدينا قيمة الفائدة الصحيحة.

مثال:

قام شخص بتوظيف مبلغ قدره $50000\ DA$ لمدة 40 يوم، وذلك بمعدل فائدة 9.5%، أحسب الفائدة التجارية ثم الفائدة الصحيحة ؟

الحل:

$C_0= 50000DA$ $n=40$ *jours* $i=9.5\%$ $I_c= ?$ $I_r= ?$

- حساب الفائدة التجارية

$$I_c=\frac{C.t.n}{36000}=\frac{50000\times 9.5\times 40}{36000}$$
$$I_c\simeq 527.78DA$$

- حساب الفائدة الصحيحة

$$I_r=I_c.\frac{72}{73}=527.78.\frac{72}{73}$$
$$I_r=520.55DA$$

2- الفرق بين الفائدتين

يمكن استنتاج الفرق بين الفائدتين التجارية والصحيحة انطلاقا من العلاقة بينهما:

$$I_c-I_r=\frac{1}{72}I_r$$

$$I_c - I_r = \frac{1}{73} I_c$$

مثال:

إذا كان الفرق بيت الفائدتين التجارية والصحيحة لمبلغ موظف لعدد من الأيام وبمعدل معين هو $100\ DA$ ، أحسب كلا من الفائدتين؟

الحل:

$I_c - I_r = 100$ $\quad$ $I_c = ?$ $\quad$ $I_r = ?$

- حساب الفائدة الصحيحة

$$\frac{1}{72} I_r = 100$$
$$I_r = 7200DA$$

- حساب الفائدة التجارية

$$\frac{1}{73} I_c = 100$$
$$I_c = 7300DA$$

سادسا: حساب الرصيد

يقصد بالرصيد ذلك المبلغ الذي يتحصل عليه صاحب رأس المال، مضافا إليه الفائدة المحصل عليها خلال مدة التوظيف أو الاستثمار، ويرمز له بالرمز ***C***، ويعطى وفق العلاقة أدناه:

$$C = C_0 + I$$
$$C = C_0 + \frac{C_0 . t . n}{100}$$

$$C = C_0 \left(1 + \frac{t . n}{100} \right)$$

ملاحظة: عند حساب الرصيد يجب مراعاة فترة التوظيف(سنوية، شهرية، يومية)

مثال:

استثمر شخص مبلغ قدره $2000\ DA$ لمدة 4 أشهر، وبفائدة بسيطة معدلها السنوي 5%،والمطلوب حساب رصيد هذا الشخص بنهاية مدة الإستثمار؟

الحل:

- حساب الرصيد بعد 4 أشهر

الطريقة الأولى:

$$I = \frac{C_0.t.n}{1200} = \frac{2000.5.4}{1200}$$
$$I = 33.33DA$$

$$C = C_0 + I = 2000 + 33.33$$
$$C = 2033.33DA$$

الطريقة الثانية:

$$C = C_0\left(1 + \frac{t.n}{100}\right) = 2000\left(1 + \frac{5.4}{1200}\right)$$
$$C = 2033.33DA$$

سابعا: المعدل المتوسط لمجموعة أصول موظفة بمعدلات مختلفة

إذا كان لدينا مجموعة رؤوس أموال موظفة بمعدلات مختلفة ولفترات مختلفة كما يلي:

$$\begin{array}{ccccc}
n_1 & \longleftarrow & t_1 & \longleftarrow & C_1 \\
n_2 & \longleftarrow & t_2 & \longleftarrow & C_2 \\
n_3 & \longleftarrow & t_3 & \longleftarrow & C_3 \\
. & & . & & . \\
. & & . & & . \\
n_k & \longleftarrow & t_k & \longleftarrow & C_k
\end{array}$$

فالفائدة الإجمالية تحسب كما يلي:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + ...I_k$$

إذا رمزنا للمعدل المتوسط للفائدة $t`$ حيث :

$t`$: متوسط معدل الفائدة الذي ينتج عنه نفس الفائدة الإجمالية المحسوبة، على أساس معدلات فائدة مختلفة ومنه يكون:

$$I = \frac{C_1.t_1.n_1}{36000} + \frac{C_2.t_2.n_2}{36000} + \frac{C_3.t_3.n_3}{36000} + ...\frac{C_k.t_k.n_k}{36000}$$

$$I = \frac{C_1.t_1.n_1 + C_2.t_2.n_2 + C_3.t_3.n_3 + ...C_k.t_k.n_k}{36000} ....(1)$$

وباستخدام المعدل المتوسط للفائدة $t`$ فإن:

$$I = \frac{C_1.t`.n_1 + C_2.t`.n_2 + C_3.t`.n_3 + ......C_k.t`.n_k}{36000} ....(2)$$

من المعادلتين (1) و (2) يكون:

$$C_1.t_1.n_1 + C_2.t_2.n_2 + C_3.t_3.n_3 + ...C_k.t_k.n_k = C_1.t`.n_1 + C_2.t`.n_2 + C_3.t`.n_3 + .....C_k.t`.n_k$$

$$t` = \frac{C_1.t_1.n_1 + C_2.t_2.n_2 + C_3.t_3.n_3 + ...C_k.t_k.n_k}{C_1.n_1 + C_2.n_2 + C_3.n_3 + ...C_k.n_k}$$

$$t` = \frac{\sum_{i=1}^{k} C_i.t_i.n_i}{\sum_{i=1}^{k} C_I.n_i}$$

مثال:

بتاريخ 20 أفريل 2017 وظف شخص 3 مبالغ قيمتها على الترتيب $5600\ DA$ ، $7800\ DA$ ، $9000\ DA$ بمعدلات فائدة 5.25%، 6%، 7.5% على التوالي وذلك إلى غاية 15 ماي، 30 ماي، 20 جوان على الترتيب.

المطلوب: أحسب المعدل المتوسط للتوظيف؟

الحل:

$C_1 = 5600DA$ $C_2 = 7800DA$ $C_3 = 9000DA$ $t_1 = 5.25\%$ $t_2 = 6\%$ $t_3 = 7.5\%$ $n_1 = ?$ $n_2 = ?$ $n_3 = ?$ $t` = ?$

لنحسب الفترات الفاصلة بين تاريخ التوظيف وتواريخ السحب:

$n_1 \longrightarrow$ 20/04/2017 $\longrightarrow$ 15/05/2017 $\Rightarrow n_1$=25 *jours*

$n_2 \longrightarrow$ 20/04/2017 $\longrightarrow$ 30/05/2017 $\Rightarrow n_2$=40 *jours*

$n_3 \longrightarrow$ 20/04/2017 $\longrightarrow$ 20/06/2017 $\Rightarrow n_3$=61 *jours*

$$t` = \frac{\sum_{i=1}^{k} C_i.t_i.n_i}{\sum_{i=1}^{k} C_I.n_i}$$

$$t` = \frac{5600\times5.25\times25+7800\times6\times40+9000.7.5\times61}{5600\times25+7800\times40+9000\times61}$$

$$t` = \frac{735000+1872000+4117500}{140000+312000+549000} = \frac{6724500}{1001000}$$

$$t` \simeq 6.72\%$$

ثامنا: طريقة النمر القاسم: méthodes des nombres et des diviseurs

تعتبر هذه الطريقة من أهم الطرق المختصرة لحساب الفوائد البسيطة، عندما يكون لدينا أكثر من مبلغ موظف لأكثر من مدة زمنية ، ولكن بنفس معدل الفائدة.

نعلم أن :

$$I = \frac{C.t.n}{36000}$$

بقسمة كل من البسط والمقام على المعدل t نجد:

$$I = \frac{C.t.n/t}{36000/t}$$

$$I = \frac{(C.n)}{36000/t}$$

$$I = \frac{N}{D}$$

حيث: D يمثل القاسم وN يمثل النمر.

استنتاج: في حالة مجموعة من الفوائد:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + ...I_K$$

$$I = \frac{N_1}{D} + \frac{N_2}{D} + \frac{N_3}{D} + ... + \frac{N_K}{D}$$

لاحظ أن D ثابت لأن $D = 36000/t$ و t ثابت.

$$I = \frac{\sum_{i=1}^{k} N_i}{D}$$

مثال1:

استثمر شخص في أحد البنوك المبالغ التالية:

المبالغ بالدينار	مدة الإستثمار
1500	40 يوم
2000	30 يوم
5000	52 يوم

فإذا كان معدل الفائدة السنوي هو8 % ، أوجد مجموع الفوائد التي سيتحصل عليها هذا الشخص ؟

الحل:

$C_1 = 1500DA$ $C_2 = 2000$DA $C_3 = 5000DA$ $n_1 = 40$ *jours* $n_2 = 30$ *jours* $n_3 = 52$ *jours*

$t = 8\%$ $D = 36000/t = 36000/8 = 4500$ $I = ?$

ـ حساب مجموع الفوائد

الطريقة الأولى:

$$I_1 = \frac{1500 \times 8 \times 40}{36000} = 13.33DA$$

$$I_2 = \frac{2000 \times 8 \times 30}{36000} = 13.33DA$$

$$I_3 = \frac{5000 \times 8 \times 52}{36000} = 57.78DA$$

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = 13.33 + 13.33 + 57.78 \simeq 84.44DA$$

الطريقة الثانية:

$$I=\frac{\sum_{i=1}^{k} N_i}{D}$$

$$I=\frac{1500\times 40+2000\times 30+5000\times 52}{4500}$$

$$I=84.44DA$$

مثال2:

احسب بطريقة القاسم والنمر مجموع الفوائد المستحقة على المبالغ الآتية، إذا كان معدل التوظيف 6 % سنويا؟

مدة الإستثمار	المبالغ بالدينار
4 أشهر	20000
6 أشهر	30000
8 أشهر	40000

الحل:

C_1= 20000*DA* C_2= 30000DA C_3= 40000*DA* n_1= 4*mois* n_2= 6 *mois* n_3= 8 *mois*

t=6% D =1200/*t* =1200/6= 200 I = ?

- حساب مجموع الفوائد المستحقة

$$I=\frac{20000\times 4+30000\times 6+40000\times 8}{200}$$

$$I=2900DA$$

الفصل الثاني: القيمة الحالية والخصم la valeur actuelle et l'escompte

تمهيد:

يترتب عن إجراء المعاملات التجارية ديونا، قد تسدد نقدا أوعن شيك بنكي أو بريدي أو عن طريق الأوراق التجارية (الكمبيالات والسندات الإذنية....)، فإذا اتفق المدين مع الدائن على تسديد الدين قبل ميعاد استحقاقه، فتسمى هذه العملية **بخصم الأوراق التجارية،** وفي هذه الحالة فإن ما يقوم المدين بتسديده هو مبلغ أقل يدعى **القيمة الحالية،** وليس الدين الأصلي الواجب دفعه بتاريخ الإستحقاق (القيمة الإسمية) وأن الفرق بينهما هو **الخصم،** يحسب كفائدة بين تاريخ استحقاق الدين وتاريخ الإتفاق.

أولا: مفاهيم أساسية

قبل التطرق إلى طرق حساب القيمة الحالية والخصم ارتأينا أن نسلط الضوء على بعض المفاهيم والتي نراها ضرورية لذلك وهي[1]:

1- **الخصم:** هو المقابل المادي الذي يحصل عليه البنك في مقابل سداد الدين قبل حلول موعد استحقاقه بمعدل يحدده يدعى معدل الخصم.

2- **القيمة الحالية:** هي قيمة رأس المال أو الدين (قيمة الورقة التجارية) بعدما يتم خصم الفوائد.

3- **القيمة الإسمية:** هي قيمة الورقة التجارية بما فيها فائدة الدين.

4- **تاريخ الاستحقاق:** هو التاريخ الذي يتم الاتفاق عليه بين المدين والدائن لتسديد قيمة الدين.

5- **تاريخ الخصم:** هو التاريخ الذي يتم فيه خصم الورقة التجارية قبل تاريخ استحقاقها.

6- **مدة الخصم:** المدة الفاصلة بين تاريخ الخصم وتاريخ الإستحقاق (الفرق بين تاريخ الإستحقاق وتاريخ الخصم).

ثانيا: حساب القيمة الحالية

إذا أعطينا الرموز التالية ل :

A:القيمة الحالية.

V: القيمة الإسمية.

e: قيمة الخصم.

فيمكن حساب القيمة الحالية كما يلي:

القيمة الحالية = القيمة الإسمية- قيمة الخصم

$A = V - e$

[1] شقيري موسى وآخرون، **الرياضيات المالية**، دار المسيرة للنشر والتوزيع، الطبعة الثانية، عمان، 2011، ص ص 110-111.

مع العلم أن قيمة الخصم **e** يتم حسابها كما يلي:

$$e = \frac{Vt.n}{36000} = \frac{Vn}{D}$$

ومنه:

$$A = V - \frac{Vn}{D}$$

$$A = V.\left(\frac{D-n}{D}\right)$$

مثال:

ورقة تجارية قيمتها الإسمية 8000 DA وتاريخ استحقاقها هو 20 فيفري 2019، تم خصمها بتاريخ 5 جانفي من نفس السنة لدى إحدى البنوك التجارية مع العلم أن معدل الخصم المحدد كان يقدر ب 12%.

- أحسب قيمة عمولة البنك (الخصم)؟.
- أحسب القيمة التي تم تحصيلها نقدا بعد عملية الخصم (القيمة الحالية)؟

الحل:

V=80 00DA t=12% n= ? e =? A= ?

- حساب قيمة الخصم

إن مدة الخصم والتي تمثل الفترة الفاصلة بين تاريخ الخصم وتاريخ الإستحقاق هي:

جانفي:31-5=26 يوم

فيفري:20 يوم

وعليه فإن مدة الخصم: يوم 46 =26+20 = n

$$e = \frac{V.t.n}{36000}$$

$$e = \frac{8000.12.46}{36000} = 122.66DA$$

- حساب القيمة الحالية للورقة

لدينا:

$$A = V - e$$

$$A = 8000 - 122.66 = 7877.34DA$$

أو:

$$A = V\left(\frac{D-n}{D}\right) \qquad D = \frac{36000}{t} = \frac{36000}{12} = 3000$$

$$A = 8000\left(\frac{3000-46}{3000}\right) = 7877.33DA$$

ثالثا: الخصم التجاري والخصم الحقيقي

في الواقع العملي يوجد نوعين من الخصم هما[1]:

1- الخصم التجاري: يرمز له بالرمز E_c ويتم حسابه على أساس القيمة الإسمية للورقة التجارية V ويعد هذا النوع من الخصم الأكثر استخداما في الممارسات الميدانية للبنوك وذلك لسببين هما:

- مبلغ الخصم التجاري أكبر من مبلغ الخصم الحقيقي (الربح)؛
- البساطة في العمليات الحسابية للخصم التجاري.

وتعطى علاقة الخصم التجاري كالآتي:

$$E_c = \frac{V.t.n}{36000} = \frac{V.n}{D}$$

وتكون القيمة الحالية في هذه الحالة معطاة كما يلي:

$$A = V - e = V\left(\frac{D-n}{D}\right)$$

مثال:

طلب وليد من أحد البنوك أن يخصم له شيكا قيمته الإسمية $DA7000$، يستحق الدفع بعد 30 يوما، فقام البنك بخصم الشيك بمعدل خصم قدره 10%، أحسب مقدار الخصم والمبلغ المستلم من قبل البنك؟

الحل:

$V = 7000 \qquad t = 10\% \qquad D = 36000/10 = 3600 \qquad n = 30\ jours \qquad E_c = ? \qquad A = ?$

- حساب مقدار الخصم

$$E_c = \frac{V.t.n}{36000} = \frac{7000.10.30}{36000} = 58.33DA$$

أو

$$E_c = \frac{V.n}{D} = \frac{7000.30}{3600} = 58.33DA$$

- حساب المبلغ المستلم

[1] بودرامة مصطفى، **الرياضيات المالية**، دار البدر للنشر والتوزيع، الجزائر، 2005، ص ص 22- 23.

$$A = V - E_c = 7000 - 58.33 = 6941.67DA$$

2- الخصم الحقيقي: يسمى كذلك بالخصم الصحيح، وهو النوع الثاني من أنواع الخصم، ولكنه أقل استخداما لدى البنوك، وما يميزه أنه يعتمد على القيمة الحالية للورقة في حساب مقدار الخصم وليس على أساس القيمة الإسمية، حيث أن:

القيمة الحالية + الخصم الحقيقي= القيمة الإسمية

هذا ويمكن حساب الخصم الحقيقي والقيمة الحقيقية الحالية كما يلي:

$$E_R = \frac{A.n}{D} \quad \text{أو} \quad E_R = \frac{A.t.n}{36000}$$

$$A = V - E_r$$

$$A = V - \frac{A.n}{D} \longrightarrow V = A\left(1 + \frac{n}{D}\right) \longrightarrow A = \frac{V}{\frac{D+n}{D}}$$

$$A = V\left(\frac{D}{D+n}\right)$$

كما يمكن حساب الخصم الحقيقي E_r بالاعتماد على القيمة الإسمية V كالآتي:

$$E_r = V - A = V - V\left(\frac{D}{D+n}\right) = V\left(\frac{D+n-D}{D+n}\right)$$

$$E_r = \frac{V.n}{D+n}$$

مثال:

سند تجاري قيمته الإسمية $DA74600$ ، تم خصمه 38 يوم قبل تاريخ الاستحقاق بمعدل فائدة سنوي 7.5%، والمطلوب حساب قيمة الخصم الحقيقي والقيمة الحالية الحقيقية؟

الحل:

$$V = 74600DA \qquad n = 38\,jours \qquad t = 7.5\% \qquad D = \frac{36000}{7.5} = 4800 \qquad E_r = ?$$

- حساب الخصم الحقيقي E_r

$$E_r = \frac{V.n}{D+n} = \frac{74600.38}{4800+38} = 585.94DA$$

- حساب القيمة الحالية A

$$A = V\left(\frac{D}{D+n}\right) = 74600\left(\frac{4800}{4800+38}\right) = 74014.05DA$$

رابعا: العلاقة بين الخصم التجاري والحقيقي

1- المقارنة بين الخصمين

$$\left.\begin{array}{l} E_c = \dfrac{V.n}{D} \\ \\ E_r = \dfrac{V.n}{D+n} = \end{array}\right. \Longrightarrow \boxed{E_r < E_C}$$

2- النسبة بين الخصمين

$$\frac{E_C}{E_r} = \frac{\frac{V.n}{D}}{\frac{V.n}{D+n}} = \frac{V.n}{D}.\frac{D+n}{V.n} \Longrightarrow \boxed{\frac{E_C}{E_r} = \frac{D+n}{D}}$$

3- الفرق بين الخصمين

$$E_C - E_r = \frac{V.n}{D} - \frac{V.n}{D+n} = V.n\left[\frac{D+n-D}{D(D+n)}\right]$$

$$\boxed{E_c - E_r = \frac{V.n^2}{D(D+n)}}$$

4- العلاقة بين القيمة الإسمية والخصمين

يمكن إثبات هذه العلاقة كمايلي:

$$\begin{cases} E_c = \dfrac{V.n}{D} \Longrightarrow n = \dfrac{E_c.D}{V} \\ E_r = \dfrac{V.n}{D+n} \Longrightarrow n = \dfrac{D.E_r}{V-E_r} \end{cases}$$

$$\frac{E_c.D}{V} = \frac{D.E_r}{V-E_r} \Longrightarrow E_c.V - E_c.E_r = V.E_r$$

$$\boxed{V = \frac{E_c.E_r}{E_c - E_r}}$$

كما توجد علاقة أخرى تربط بين الخصمين التجاري والحقيقي تعطى كما يلي:

$$\frac{1}{E_c}-\frac{1}{E_r}=\frac{1}{V}$$

مثال:

القيمة الحالية لورقة تجارية قيمتها الإسمية $73260\ DA$ هي $72594\ DA$، أحسب قيمتها الحالية الصحيحة؟

الحل:

$V= 73260DA \qquad A= 72594\ \ DA$

يمكن حساب القيمة الحالية كما يلي:

$$E_c=V-A=73260-72594=666DA$$

$$V=\frac{E_c.E_r}{E_c-E_r}\Longrightarrow E_r=\frac{V.E_c}{V+E_c}=\frac{73260.666}{73260+666}=660$$

$$A=V-E_r=73260-660=72600\,DA$$

الفصل الثالث: تكافؤ الأوراق التجارية équivalence défets

عادة ما يحدث عند إجراء عمليات تجارية وسحب ورقة أو عدة أوراق تجارية، أن يتم الإتفاق على آجال محددة لاستحقاق هذه الأوراق، بحيث تتناسب وظروف كل من المدينين والدائنين، إلا أنه قد يضطر المدين تحت وطأة الظروف المالية المختلفة، إلى تغيير شروط تسديد الديون أو تسويتها بطرق وتواريخ جديدة، تتناسب مع التغيرات الطارئة على ظروفه المالية بموافقة الدائن، مع الأخذ بعين الاعتبار مصلحة طرفي العلاقة، وإن أفضل عملية لذلك هو تقييم الورقة أو الأوراق التجارية القديمة وكذا الجديدة، بالقيمة الحالية والخصم التجاري وهذا ما يسمى **بالتكافؤ**.

أولا: تكافؤ ورقتين تجاريتين

نقول عن ورقتين تجاريتين أنهما متكافئتان، إذا تساوت قيمتهما الحالية بنفس معدل الخصم، ويحدث هذا التساوي بتاريخ معين، يطلق عليه اسم تاريخ التكافؤ[1].

إذا كان لدينا:

V_1: القيمة الإسمية للورقة التجارية الأولى.
V_2: القيمة الإسمية للورقة التجارية الثانية.
n_1: المدة الفاصلة بين تاريخ استحقاق الورقة الأولى وتاريخ التكافؤ.
n_2: المدة الفاصلة بين تاريخ استحقاق الورقة الثانية وتاريخ التكافؤ.
A_1: القيمة الحالية للورقة الأولى.
A_2: القيمة الحالية للورقة الثانية.

$$A_1 = A_2 \longrightarrow V_1\left(\frac{D-n_1}{D}\right)=V_2\left(\frac{D-n_2}{D}\right)$$

من خلال القانون السابق المتعلق بتكافؤ ورقتين تجاريتين، يمكن البحث على مختلف عناصرها والمتمثلة في كل من: تاريخ التكافؤ، القيمة الإسمية للورقة الجديدة، وتاريخ استحقاقها، ومعدل التكافؤ .

1- تحديد تاريخ التكافؤ

مثال1:

ورقة تجارية قيمتها الإسمية $29700\ DA$ تاريخ استحقاقها 2015/08/16، تم تعويضها بورقة جديدة قيمتها الإسمية $29850\ DA$ وتاريخ استحقاقها 2015/09/15، بمعدل خصم قدر ب6%، ما هو تاريخ التكافؤ؟

الحل:

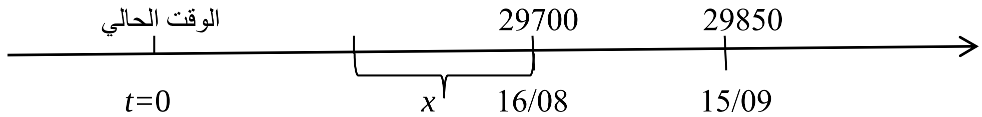
$V_1= 29700DA \qquad V_2= 29850DA \qquad t=6\% \qquad D=\frac{36000}{6}=6000$

- تحديد تاريخ التكافؤ

يمكن تحديد تاريخ التكافؤ وفق المخطط الموالي:

---

[1] لقليطي الأخضر، **محاضرات في الرياضيات المالية**، مطبوعة غير منشورة، جامعة محمد بوضياف بالمسيلة، الجزائر، 2015، ص14.



حسب قانون تكافؤ الأوراق التجارية يكون لدينا:

$$A_1 = A_2 \longrightarrow V_1\left(\frac{D-n_1}{D}\right) = V_2\left(\frac{D-n_2}{D}\right)$$

$$V_1.(D-x) = V_2\left[D-\left(x+(n_2-n_1)\right)\right]$$

$$29700(6000-x) = 29850(6000-x-30)$$

$$x = 30\, jours$$

بناء على ما سبق فإن تاريخ التكافؤ 30 يوم قبل تاريخ استحقاق الورقة الأولى، و60 يوما قبل تاريخ استحقاق الورقة الثانية، وعليه يكون تاريخ التكافؤ هو2015/07/17.

2- حساب القيمة الإسمية

مثال2:

سند تجاري قيمته الإسمية $DA5500$ يستحق الدفع بعد 40 يوم عوض بسند جديد يستحق الدفع بعد 60 يوما، ماهي القيمة الإسمية للسند الثاني إذا كان معدل الخصم 8 %؟

الحل:

$V_1 = 5500\ DA$ $\quad$ $n_1 = 40\ jours$ $\quad$ $n_2 = 60\ jours$ $\quad$ $t=8\%$ $\quad$ $V_2 = ?$

- حساب القيمة الإسمية للسند الثاني

$$A_1 = A_2 \longrightarrow V_1\left(\frac{D-n_1}{D}\right) = V_2\left(\frac{D-n_2}{D}\right)$$

$$V_2 = \frac{V_1(D-n_1)}{(D-n_2)} = \frac{5500(4500-40)}{(4500-60)} = 5524.77DA$$

3- حساب المدة

مثال3:

ورقة تجارية قيمتها الإسمية DA 26250 تاريخ استحقاقها 20 أفريل عوضت بورقة أخرى بتاريخ 01 أفريل مع العلم أن القيمة الإسمية للورقة الجديدة DA 26500 بمعدل خصم 6 %، أحسب تاريخ استحقاق الورقة الجديدة؟

الحل:

$V_1 = 26250\ DA$ $\quad$ $n_1 = 19\ jours$ $\quad$ $V_2 = 26500\ DA$ $\quad$ $t=6\%$ $\quad$ $n_2 = ?$

- حساب تاريخ استحقاق الورقة الجديدة

$$A_1 = A_2 \longrightarrow V_1\left(\frac{D-n_1}{D}\right) = V_2\left(\frac{D-n_2}{D}\right)$$

$$V_1(D-n_1)=V_2(D-n_2)$$

$$n_2=\frac{V_2.D-V_1(D-n_1)}{V_2}$$

$$n_2=\frac{26500.6000-26250(6000-19)}{26500}$$

$$n_2\simeq 75\,jours.$$

وبالتالي تاريخ استحقاق الورقة الجديدة يكون 75 يوم بعد 1 أفريل ويكون 15 جوان.

4- حساب معدل التكافؤ

مثال4:

ورقتان تجاريتان قيمتاهما الإسمية على الترتيب $52500\ DA$ و$53120\ DA$ ، حيث تاريخ استحقاق الورقة الأولى بعد 22 يوم، والثانية بعد 61 يوم، ما هو معدل التكافؤ؟

الحل:

$V_1= 52500DA$ $n_1= 22\ jours$ $V_2= 53120DA$ $t= ?$ $n_2= 61\ jours$

$$A_1=A_2 \longrightarrow V_1\left(\frac{D-n_1}{D}\right)=V_2\left(\frac{D-n_2}{D}\right)$$

$$V_1(D-n_1)=V_2(D-n_2)$$

$$D=\frac{V_1.n_1-V_2.n_2}{V_1-V_2}$$

$$D=\frac{52500.22-53120.61}{52500-53120}\simeq 3363$$

$$t=\frac{36000}{D}=\frac{36000}{3363}\simeq 10.70\%$$

ثانيا: خواص و مبادئ تكافؤ ورقتين تجاريتين

1- تاريخ التكافؤ يكون قبل تواريخ الاستحقاق.

2- تاريخ استحقاق الورقة الجديدة يكون بعد تاريخ استحقاق الورقة القديمة.

3- القيمة الإسمية للورقة الجديدة تكون أكبر من القيمة الإسمية للورقة القُديمة.

4- إذا كان هناك ورقتان تجاريتان متكافئتان بتاريخ معين فلا يمكن أن تتكافآ قبل وبعد هذا التاريخ.

5- لا يمكن لورقتين تجاريتين أن تتكافآ إذا كان لهما نفس القيمة الإسمية حتى ولو كان تاريخ الاستحقاق مختلف.

ثالثا: تكافؤ عدة أوراق تجارية

نقول عن مجموعة من الأوراق التجارية أنها متكافئة مع مجموعة أخرى من الأوراق التجارية بنفس معدل الخصم وبتاريخ معين، إذا كانت القيم الحالية للمجموعة الأولى متساوية مع القيم الحالية للمجموعة الثانية أي يكون:

$$\sum_{i=1}^{k} A_i = \sum_{i=1}^{k} \grave{A}_i$$

$$A_1 + A_2 + ...+ A_k = \grave{A}_1 + \grave{A}_2 + ...\grave{A}_k$$

$$V_1 \frac{(D-n_1)}{D} + V_2 \frac{(D-n_2)}{D} + ...+ V_k \frac{(D-n_k)}{D} = V_1` \frac{(D-n`_1)}{D} + V_2` \frac{(D-n`_2)}{D} + ...+ V_k` \frac{(D-n_k`)}{D}$$

مثال:

تم تعويض السندات الثلاثة التالية:

- السند الأول قيمته DA 2000 يستحق الدفع بعد 3 أشهر.
- السند الثاني قيمته DA 4000 يستحق الدفع بعد 6 أشهر.
- السند الثالث قيمته DA 6000 يستحق الدفع بعد 9 أشهر.

وقد اتفق مع الدائن على أن يعوض هذه السندات بواسطة سندين جديدين قيمتاهما على الترتيب DA 3000 و$V_2`$ يستحقان بعد 4 أشهر و10 أشهر على الترتيب

أحسب القيمة الإسمية للسند الثاني إذا علمت أن معدل الخصم هو %6؟

الحل:

V_1= DA 2000 V_2= DA 4000 V_3= DA 6000 n_1= 3 *mois* n_2= 6 *mois* n_3= 9 *mois*

$t = \%6$ $D = \frac{1200}{6} = 200$ $V`_1 = 3000DA$ $V`_2 = ?$

- حساب قيمة $V_2`$

$$\sum_{i=1}^{k} A_i = \sum_{i=1}^{k} \grave{A}_i$$

$$A_1 + A_2 + ...+ A_k = \grave{A}_1 + \grave{A}_2 + ...\grave{A}_k$$

$$V_1 \frac{(D-n_1)}{D} + V_2 \frac{(D-n_2)}{D} + ...+ V_k \frac{(D-n_k)}{D} = V_1` \frac{(D-n`_1)}{D} + V_2` \frac{(D-n`_2)}{D} + ...+ V_k` \frac{(D-n`_k)}{D}$$

$$2000.\frac{(200-3)}{200} + 4000.\frac{(200-6)}{200} + 6000.\frac{(200-9)}{200} = 3000.\frac{(200-4)}{200} + V`_2.\frac{(200-10)}{200}$$

$$V`_2 = \frac{1776000}{190} = 9347.36DA$$

رابعا: تاريخ الإستحقاق المتوسط

إن تاريخ الإستحقاق المتوسط لمجموعة من الأوراق التجارية، هو ذلك التاريخ المشترك أو الموحد لهذه الأوراق، الذي يضمن تسوية الدين بين الدائن والمدين دون تحقيق ربح ولا خسارة، بحيث أن القيمة الإسمية للورقة الوحيدة المعوضة تساوي مجموع القيم الإسمية للأوراق السابقة ويكون[1]:

[1] بن طلحة صليحة، مرجع سابق، ص ص 80-81.

$$V=\sum_{i=1}^{k}V_i=\left(V_1+V_2+V_3+.....V_k\right)$$

ويحدث التكافؤ باستخدام القيمة الحالية إذا كان:

$$V-\frac{Vn}{D}=V_1-\frac{V_1n_1}{D}+V_2-\frac{V_2n_2}{D}+V_3-\frac{V_3n_3}{D}\;+.....+V_k-\frac{V_kn_k}{D}$$

$$Vn=V_1n_1+V_2n_2+V_3n_3+.....+V_kn_k$$

$$n=\frac{V_1n_1+V_2n_2+V_3n_3+.....+V_kn_k}{V}$$

$$n=\frac{\sum_{i=1}^{k}V_in_i}{V}$$

مثال:

يعزم مدين على تسديد دينه بواسطة 3 أوراق تجارية قيمة كل منها على الترتيب 1000 *DA*، 1500 *DA*، 2000 *DA* بعد 30، 35، 40 يوما بورقة واحدة، ما هو تاريخ الإستحقاق المتوسط؟

الحل:

V_1= *DA* 1000 V_2= *DA* 1500 V_3= *DA* 2000 n_1= 30 *jours* n_2= 35 *jours*
n_3= 40 *jours* n= ?

$$n=\frac{\sum_{i=1}^{k}V_in_i}{V}=\frac{1000.30+1500.35+2000.40}{4500}\simeq 36\,jours$$

وعليه فتاريخ الإستحقاق المتوسط يكون بعد 36 يوم.

الجزء الثاني

العمليات المالية في الأجل الطويل

الفصل الأول: الفائدة المركبة l'intérêt composé

تمهيد:

إذا كانت الفائدة البسيطة تدفع كنسبة على المبلغ الأصلي المستثمر أو المقترض وبصفة دورية، دون أن تضاف إلى المبلغ الأصلي، وعليه نجد أن المبلغ الأصلي لا يتغير خلال فترات الإستثمار أو الإقتراض، ويظل ثابتا إلى نهاية المدة، ويدفع إلى صاحب رأس المال مع فوائده، في حين أن الإستثمار **بالفائدة المركبة** خلال مدة معينة، يعني أن الفائدة المستحقة عن هذا المبلغ تحسب في نهاية كل فترة من فترات الإستثمار، ثم تضاف إلى أصل المبلغ المستثمر في الفترة السابقة (سنة، سداسي، ثلاثي، شهر)، ليشكلا معا رأس مال جديد للفترة الزمنية الموالية، وتسمى هذه العملية **برسملة الفوائد** ويتم تطبيقها عادة عند فترة الإستثمار التي تتجاوز السنة.

أولا: حساب الفائدة المركبة

إذا تم استثمار مبلغ من المال قدره C_0 بمعدل فائدة سنوي قدره i ولعدد من السنوات n فإن جملة المبلغ المستثمر تحسب كما يلي:

الفترة	المبلغ في أول الفترة	الفائدة	المبلغ في نهاية الفترة
1	C_0	$I_1 = C_0.i$	$C_1 = C_0 + C_0 i = C_0(1+i)$
2	$C_0(1+i)$	$I_2 = C_1 i$	$C_2 = C_1 + C_1 i = C_1(1+i) = C_0(1+i)^2$
3	$C_0(1+i)^2$	$I_3 = C_2 i$	$C_3 = C_2 + C_2 i = C_2(1+i) = C_0(1+i)^3$
4 . . .	$C_0(1+i)^3$	$I_4 = C_3 i$	$C_4 = C_3 + C_3 i = C_3(1+i) = C_0(1+i)^4$
n	$C_0(1+i)^{n-1}$	$I_n = C_{n-1} i$	$C_n = C_{n-1} + C_{n-1}.i = C_{n-1}(1+i) = C_0(1+i)^n$

كما يمكن حساب جملة المبلغ مباشرة باستخدام القانون التالي:

$$C_n = C_0(1+i)^n$$

أما مقدار الفائدة المركبة الإجمالية I فيحسب كما يلي:

$$I = C_n - C_0$$

$$I = C_0(1+i)^n - C_0$$

$$I = C_0\left[(1+i)^n - 1\right]$$

ملاحظات:

- قانون الجملة لا يطبق إلا إذا كان معدل الفائدة ومدة التوظيف متجانسان، أي يعبر عنهما في نفس الفترة الزمنية للرسملة، فإذا كان المعدل شهري، فيجب أن تكون فترات الرسملة شهرية.

- يوضح الجدول السابق أن كل من قيم الجملة والفائدة الإجمالية تشكل فيما بينها حدود متتالية هندسية أساسها $(1+i)$.

مثال:

استثمر مصطفى مبلغ $2500\ DA$ بفائدة مركبة وبمعدل سنوي قدر ب4.5% ولمدة 5 سنوات، والمطلوب حساب جملة المبلغ، فائدة السنة الثالثة، ومقدار الفائدة الإجمالية؟

الحل:

$C_0=2500\ DA$ $\quad i=4.50\%$ $\quad n=5\ ans$ $\quad C_n=?$ $\quad I_3=?$ $\quad I=?$

- حساب جملة المبلغ

$$C_n = C_0\left(1+i\right)^n$$
$$C_n = 2500\left(1+0.045\right)^5$$
$$C_n = 3115.45.48 DA$$

حساب فائدة السنة الثالثة:

$$I_n = C_{n-1}.i = C_0\left(1+i\right)^{n-1}.i$$
$$I_3 = 2500\left(1.045\right)^2.0.045$$
$$I_3 = 122.85DA$$

- حساب مقدار الفائدة المركبة

$$I = C_n - C_0$$
$$3115.4548 - 2500 = 615.4548DA$$

ويمكن حساب الفائدة المركبة كما يلي:

$$I = C_0\left[\left(1+i\right)^n - 1\right]$$
$$I = 2500\left[\left(1.045\right)^5 - 1\right]$$
$$I = 615.4548DA$$

ثانيا: حساب عناصر الجملة بفائدة مركبة

من ملاحظتنا للقانون الأساسي لجملة مبلغ ما بفائدة مركبة وهو $C_n = C_0\left(1+i\right)^n$

نجد أنه يتكون من أربع متغيرات هي $(n، i، C، C_n)$ فإذا علم ثلاث متغيرات منها يمكن تطبيق القانون واستخراج المجهول.

1- حساب المبلغ

إذا علمت قيمة الجملة والمعدل والمدة يمكننا حساب المبلغ الموظف كما يلي:

$$C_0 = \frac{C_n}{(1+i)^n}$$

مثال:

أودع شخص مبلغ ما في أحد البنوك ليستثمر بمعدل فائدة مركبة سنوي مقداره 07% فكانت جملته بعد 10 سنوات من الإيداع مبلغ 196000 *DA*، ما هو المبلغ المودع في بداية المدة؟

الحل

C_n=196000 *DA*　　i=07%　　n=10 *ans*　　C_0 = ?

$$C_n = C_0(1+i)^n$$

$$C_0 = \frac{C_n}{(1+i)^n}$$

$$C_0 = \frac{196000}{(1.07)^{10}} = \frac{196000}{1.9671}$$

$$C_0 = 99636.46DA$$

2- حساب المدة

تحسب المدة كما يلي:

$$\frac{C_n}{C_0} = (1+i)^n$$

$$\ln\frac{C_n}{C_0} = n\ln(1+i)$$

$$n = \frac{\ln\frac{C_n}{C_0}}{\ln(1+i)}$$

$$n = \frac{\ln C_n - \ln C_0}{\ln(1+i)}$$

مثال:

استثمرت نور مبلغ DA 10000 في أحد البنوك بمعدل فائدة مركبة سنوي قدر ب 9% فبلغت جماة المبلغ بعد فترة من الزمن DA23673 ،ماهي مدة الإستثمار؟

الحل:

C_0=10000 i= 9% C_n=23673 DA n = ?

$$\frac{C_n}{C_0}=(1+i)^n$$

$$\frac{23673}{10000}=(1.09)^n$$

$$2.3673=(1.09)^n$$

$$n=\frac{\ln 2.3673}{\ln 1.09}$$

$$n\simeq 10ans$$

3- حساب المعدل:

يحسب المعدل كما يلي:

$$\frac{C_n}{C_0}=(1+i)^n$$

$$\ln\frac{C_n}{C_0}=n\ln(1+i)$$

$$\frac{\ln\frac{C_n}{C_0}}{n}=\ln(1+i)$$

$$(1+i)=e^{\frac{\ln\frac{C_n}{C_0}}{n}}$$

$$i=e^{\frac{\ln\frac{C_n}{C_0}}{n}}-1$$

مثال:

تم توظيف مبلغ DA 4000 في أحد البنوك بفائدة مركبة وتحصلنا بعد 12 سنة على رصيد قدره DA10072.68 ، ماهو معدل الفائدة السنوي الذي اعتمد؟

الحل:

C_0=4000 DA n=12ans C_n=10072.68 DA i = ?

$$\frac{C_n}{C_0} = (1+i)^n$$

$$\frac{10072.68}{4000} = (1+i)^{12}$$

$$2.5181701 = (1+i)^{12}$$

$$\ln 2.5181701 = 12\ln(1+i)$$

$$0.401085 = 12\ln(1+i)$$

$$0.0334237 = \ln(1+i)$$

$$e^{0.0334237} = (1+i)$$

$$1.08 = (1+i)$$

$$i = 8\%$$

ثالثا: حساب الجملة في حالة المدة عدد غير صحيح

في كثير من الأحيان تكون مدة التوظيف عدد غير صحيح وللحصول على جملة المبلغ الموظف لدينا حلين:

1- الحل التجاري: ويقوم على أساس حساب الفائدة المركبة خلال الفترة n أي لكل المدة (السنوات والأشهر معا) وهو الحل الذي يستخدم في البنوك التجارية

$$C_{n+\frac{m}{12}} = C_0(1+i)^{n+\frac{m}{12}}$$

مثال:

أودع شخص $100000\ DA$ ببنك بمعدل فائدة مركبة 5% سنويا ولمدة أربع سنوات وثلاثة أشهر، ماهي جملة المبلغ المودع؟

الحل:

$$C_{n+\frac{m}{12}} = C_0(1+i)^{n+\frac{m}{12}}$$

$$C_{4+\frac{3}{12}} = C_0(1+i)^{4+\frac{3}{12}} = 100000(1.05)^{4.25} = 1230.42DA$$

2- الحل العقلاني: تقوم على حساب الفائدة للجزء الصحيح (السنوات) وحساب الفائدة البسيطة للجزء غير الصحيح (الأشهر) كما يلي:

$$C_{n+\frac{m}{12}} = C_0(1+i)^n\left(1+\frac{i.m}{1200}\right)$$

حيث يمثل m عدد الأشهر.

مثال:

من المثال السابق، أحسب جملة المبلغ الموظف باستخدام الحل العقلاني؟

الحل:

$$C_{n+\frac{m}{12}} = C_0 \left(1+i\right)^n \left(1+\frac{i.m}{1200}\right)$$

$$C_{4+\frac{3}{12}} = 100000\left(1.05\right)^4 \left(1+\frac{5.3}{1200}\right) = 1230.7DA$$

رابعا: المعدلات المتكافئة والمعدلات المتناسبة taux équivalents et taux proportionnels

في معظم العمليات المالية يعطى معدل الفائدة السنوي، إذا كانت الوحدة الزمنية تساوي السنة، ويسمى بالمعدل الإسمي، لكن في بعض الأحيان قد يذكر المعدل لجزء من السنة، كأن يقال أن المعدل نصف سنوي، أو ثلاثي، أوشهري .... وفي هذه الحالة يتم احتساب الفوائد على أساس المعدل الجزئي **المكافئ** أو **المتناسب** مع المعدل الإسمي.

1- المعدلات المتكافئة: وهي المعدلات التي تعطي نفس الجملة بالفائدة المركبة خلال نفس فترة التوظيف[1].

إذا كان لدينا i هو المعدل السنوي و i_k هو المعدل المكافئ له فإن:

$$C\left(1+i\right) = C\left(1+i_k\right)^k$$

$$\left(1+i\right) = \left(1+i_k\right)^k$$

$$\left(1+i_k\right) = \left(1+i\right)^{\frac{1}{k}}$$

$$i_k = \left(1+i\right)^{\frac{1}{k}} - 1$$

مثال:

أحسب المعدلات السداسية والثلاثية والشهرية للمعدل السنوي 9%؟

- المعدل السداسي المكافئ للسنوي يحسب كما يلي:

$$i_s = \left[\left(1.09\right)^{\frac{1}{2}} - 1\right] = 4.40\%$$

- المعدل الثلاثي المكافئ للسنوي هو:

$$i_t = \left[\left(1.09\right)^{\frac{1}{4}} - 1\right] = 2.17\%$$

- المعدل الشهري المكافئ للسنوي هو:

$$i_m = \left[\left(1.09\right)^{\frac{1}{12}} - 1\right] = 0.72\%$$

[1] بودرامة مصطفى، مرجع سابق، ص51.

2- المعدلات المتناسبة: هي المعدلات التي تكون النسبة بينها تساوي نسبة المدة المقابلة لها، ولحساب المعدل المتناسب لفترة ما يتم تقسيم المعدل الموافق لتلك الفترة على عدد الفترات الموجودة فيها[1].

مثال:

في المثال السابق، أحسب المعدلات المتناسبة مع المعدل السنوي؟

الحل:

- المعدل السداسي المتناسب للسنوي هو: $\frac{9}{2} = 4.5\%$؛
- المعدل الثلاثي المتناسب للسنوي هو: $\frac{9}{4} = 2.25\%$؛
- المعدل الشهري المتناسب للسنوي هو: $\frac{9}{12} = 0.75\%$؛

[1] بن طلحة صليحة، مرجع سابق، ص 90.

الفصل الثاني : القيمة الحالية والخصم المركب escompte et actualisation

أولا: تعريف القيمة الحالية وطريقة حسابها

كنا قد تطرقنا سابقا إلى قانون حساب جملة مبلغ ما، ويعني ذلك تقييمه بعد مرور مدة زمنية عن توظيفه، وإذا عكسنا المسألة وأردنا أن نعرف المبلغ الواجب استثماره الآن لتصبح جملته بعد فترة زمنية مبلغا محددا سلفا، ففي هذه الحالة يسمى المبلغ الواجب استثماره الآن **بالقيمة الحالية**، وتحسب وفقا للقانون الآتي:

$$A = V\left(1+i\right)^{-n}$$

حيث:

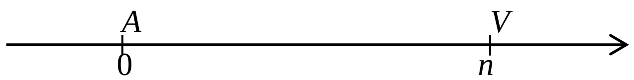
A: القيمة الحالية للأصل.

V: القيمة الإسمية للأصل.

i: معدل الخصم.

n: مدة الخصم بالسنوات.

إن قانون القيمة الحالية الموجود أعلاه يستنتج من قانون الجملة كما هو موضح في الشكل أدناه:



$$V = A\left(1+i\right)^{n} \longrightarrow A = V\left(1+i\right)^{-n}$$

ثانيا: الخصم بفائدة مركبة

يطبق هذا الخصم على الأصول التي تزيد فترة استحقاقها عن سنة، وهو يمثل الفرق بين القيمة الإسمية والحالية للأصل أي أن:

$$e = V - A$$

$$e = V - \left[V\left(1+i\right)^{-n}\right]$$

$$e = V\left[1-\left(1+i\right)^{-n}\right]$$

مثال:

كمبيالة قيمتها الإسمية $DA500000$ تستحق الدفع بعد 4 سنوات من الآن، المطلوب أحسب قيمتها الحالية ومبلغ الخصم إذا كان معدل الخصم السنوي هو6% ؟

الحل:

V=500000DA n=4ans i=6% A= ?

- حساب القيمة الحالية

$$A = V\left(1+i\right)^{-n}$$

$$A = 500000\left(1.06\right)^{-4}$$

$$A = 396046.83DA$$

- حساب مبلغ الخصم

$$e = V - A$$
$$e = 500000 - 396046.83$$
$$e = 103953.17DA$$

ثالثا: تكافؤ الديون أو رؤوس الأموال **équivalence des crédits**

نعتبر مجموعة من رؤوس الأموال متكافئة في تاريخ معين، يسمى تاريخ التكافؤ، إذا تساوت قيمها الحالية[1] .

1- حالة تكافؤ رأسمالان: نقول عن رأسمالين أنهما متكافئان إذا تساوت قيمهما الحالية بتاريخ التكافؤ.

ليكن V_1 ،V_2 القيمتين الإسميتين لرأسمالين.

وليكن n_1،n_2 المدة الفاصلة بين تاريخ التكافؤ وتاريخ الإستحقاق.

يحدث التكافؤ في اللحظة صفر إذا كانت القيم الحالية متساوية أي:

$$A_1 = A_2 \longrightarrow V_1(1+i)^{-n_1} = V_2(1+i)^{-n_2}$$

مثال:

قرر مدين أن يسدد دينا في غضون 4 سنوات، قيمة الدين $DA40000$ من المفروض أن يستحق في 5 سنوات، حدد المبلغ الذي سيدفع إذا كان معدل الخصم 10% .

الحل:

$V_1=40000\ DA$ $n_1=5ans$ $n_2=4ans$ $i=10\%$ $V_2=?$

- حساب المبلغ المدفوع

$$V_1(1+i)^{-n_1} = V_2(1+i)^{-n_2}$$
$$40000(1.1)^{-5} = V_2(1.1)^{-4}$$
$$V_2 = \frac{40000(1.1)^{-5}}{(1.1)^{-4}}$$
$$V_2 = 36363.63DA$$

2- حالة تكافؤ رأسمال مع مجموعة من رِوس الأموال: حيث يحدث التكافؤ إذا كانت القيمة الحالية لرأسمال الوحيد مساوية لمجموع القيم الحالية لرؤوس الأموال الأخرى.

$$A = \sum_{i=1}^{k} A_i$$

$$V(1+i)^{-n} = \sum_{i=1}^{k} V_i(1+i)^{-n_i}$$

[1] منصر إلياس، **محاضرات في الرياضيات المالية**، مطبوعة غير منشورة، جامعة آكلي محمد أولحاج بالبويرة، الجزائر، 2016/2015، ص30.

مثال:

شخص مدين بالديون التالية:

- $DA\ 50000$ تستحق الدفع بعد 2 سنة؛
- $DA70000$ تستحق الدفع بعد 5 سنوات؛
- $DA60000$ تستحق الدفع بعد 7 سنوات؛

اتفق مع دائنه على استبدال هذه الديون بدين وحيد قيمته الإسمية $DA257615.46$ يستحق الدفع بعد n سنة، وبمعدل فائدة مركبة 7% سنوي، فما هو تاريخ استحقاق الدين الجديد؟

الحل:

$V_1=50000DA$ $V_2=70000DA$ $V_3=60000DA$ $n_1=2ans$ $n_2=5ans$ $n_3=7ans$ $i=7\%$ $n=?$

- حساب تاريخ استحقاق الدين الجديدn

$$A=\sum_{i=1}^{k}A_i$$

$$V\left(1+i\right)^{-n}=\sum_{i=1}^{k}V_i\left(1+i\right)^{-n_i}$$

$$50000\left(1.07\right)^{-2}+70000\left(1.07\right)^{-5}+60000\left(1.07\right)^{-7}=257615.46\left(1.07\right)^{-n}$$

$$43671.93+49909.03+37364.98=257615.46\left(1.07\right)^{-n}$$

$$\frac{130945.94}{247615.46}=\left(1.07\right)^{-n}$$

$$0.5083=\left(1.07\right)^{-n}$$

$$\ln 0.5083=-n\ln 1.07$$

$$-n=\frac{\ln 0.5083}{\ln 1.07}$$

$$-n=\frac{-0.676683}{0.0676586}$$

$$n=10ans$$

تاريخ استحقاق الدين الجديد يكون بعد 10 سنوات من تاريخ الإتفاق.

3- حالة تكافؤ مجموعتين من رؤوس الأموال: تكون مجموعة من رؤوس الأموال متكافئة مع مجموعة أخرى من رؤوس الأموال، إذا كان مجموع القيم الحالية للمجموعة الأولى، يساوي مجموع القيم الحالية للمجموعة الثانية بتاريخ التكافؤ.

$$\sum_{i=1}^{k}A_i=\sum_{i=1}^{k}A_i`$$

$$\sum_{i=1}^{k}V_i\left(1+i\right)^{-n_i}=\sum_{i=1}^{k}V_i`\left(1+i\right)^{-n_i`}$$

مثال:

في 2016/01/01 كان عمر مدينا بالمبالغ التالية:

- $DA2000$ تستحق بعد 3 سنوات؛
- $DA4000$ تستحق بعد 5 سنوات؛
- $DA6000$ تستحق بعد 7سنوات؛

وفي 2018/01/01 اتفق عمر مع الدائن على أن يدفع مبلغ $DA5499.63$ نقدا وأن يسدد الباقي على شكل3 سندات اذنية .

ـ أحسب قيمة كل من السندات الثلاثة إذا علمت أن القيمة الإسمية للسند الأول هي ضعف الثاني ونسبة القيمة الإسمية للسند الثاني إلى القيمة الإسمية للسند الثالث هي 3/2 علما أن هذه السندات تستحق بعد 2،3،4 سنوات على التوالي، وأن معدل الفائدة المركبة هو 8% سنويا؟

الحل:

$V_1=2000DA$ $V_2=4000DA$ $V_3=6000DA$ $n_1=3ans$ $n_2=5ans$ $n_3=7ans$

$i=8\ \%$ $V`_1=2\ V`_2$ $\dfrac{V`_2}{V`_3}=\dfrac{2}{3}$ $V`_1=\ ?$ $V`_2=\ ?$ $V`_3=\ ?$

الحل:

ـ حساب قيمة السندات الثلاث

بتكافؤ المبالغ تتساوى القيم الحالية كالآتي:

$$\sum_{i=1}^{k} A_i=\sum_{i=1}^{k} A_i`$$

$$\sum_{i=1}^{k} V_i\left(1+i\right)^{-n_i}=\sum_{i=1}^{k} V_i`\left(1+i\right)^{-n_i`}$$

قيمة الديون بتاريخ 2016/01/01

$$2000\left(1.08\right)^{-1}+4000\left(1.08\right)^{-3}+6000\left(1.08\right)^{-5}=9110.7DA$$

قيمة الديون الجديدة في 2018/01/01

إذا كانت قيمة السند الأول هو $4x$

قيمة السند الثاني هو$2x$

قيمة السند الثالث هو$3x$

فتكون قيمة الديون كمايلي:

$$5499.65+4x\left(1.08\right)^{-2}+2x1.08^{-3}+3x\left(1.08\right)^{-4}=5499.65+7.22211x$$

وبمساواة قيمة الديون القديمة بقيمة الديون الجديدة بتاريخ التسوية 2018/01/01 نجد:

$$9110.7=5499.65+7.22211x$$

$$x=\frac{3611.05}{7.22211}=500$$

وعليه يكون قيمة السند الأول تساوي $DA2000$ والثاني $DA1000$ والثالث $DA1500$.

ملاحظة: عموما تهتم مسائل التكافؤ بالبحث عن القيم الإسمية لرؤوس الأموال والفترات التي تفصل تاريخ التكافؤ عن تواريخ الإستحقاق.

رابعا: تاريخ الإستحقاق المتوسط

يقصد بتاريخ الإستحقاق المتوسط ،تاريخ استحقاق رأس المال أو الدين الوحيد الذي قيمته الإسمية، تساوي مجموع القيم الإسمية لرؤوس الأموال أو الديون المعوضة[1].

ليكن لدينا V_1، V_2، V_3، .... V_k، قيم إسمية لمجموعة من رؤوس الأموال وليكن n_1، n_2، n_3،....... n_k المدة الفاصلة بين تاريخ التكافؤ وتاريخ الإستحقاق.

القيمة الإسمية لرأس المال الوحيد تساوي: $V=\sum_{i=1}^{k}V_i$

عندما يحدث التكافؤ في لحظة الإتفاق يكون:

$$V(1+i)^{-n}=\sum_{i=1}^{k}V_i(1+i)^{-n_i}$$

$$(1+i)^{-n}=\frac{\sum_{i=1}^{k}V_i(1+i)^{-n_i}}{V}$$

$$(1+i)^{-n}=\frac{\sum_{i=1}^{k}V_i(1+i)^{-n_i}}{\sum_{i=1}^{k}V_i}$$

حيث n تاريخ الإستحقاق المتوسط.

مثال:

كانت مؤسسة الصفا مدينة بالمبالغ التالية:

- $DA5000$ تستحق بعد 4 سنوات؛
- $DA7000$ تستحق بعد 6 سنوات؛

فإذا أرادت المؤسسة سداد ديونها بدين واحد قيمته الإسمية هو مجموع القيم الإسمية للدينين، أحسب مدة الدين الجديد، إذا كان معدل الفائدة المركبة 8% سنويا؟

الحل:

$V_1=5000DA$ $V_2=7000DA$ $V_3=6000DA$ $n_1=4ans$ $n_2=6ans$ $i=8\ \%$
$n=?$

- حساب مدة الدين الجديد

الأمر يتعلق بحساب تاريخ الإستحقاق المتوسط لأن القيمة الإسمية للدين الجديد تساوي مجموع القيم الإسمية للدينين القديمين ويكون:

[1] منصر إلياس، مرجع سابق، ص32.

$$(1+i)^{-n} = \frac{\sum_{i=1}^{k} V_i (1+i)^{-n_i}}{\sum_{i=1}^{k} V_i}$$

$$(1.08\ )^{-n} = \frac{5000(1.08)^{-4} + 7000(1.08)^{-6}}{12000}$$

$$(1.08\ )^{-n} = \frac{5000(0.73503) + 7000(0.63017)}{12000}$$

$$(1.08\ )^{-n} = \frac{8086.34}{1200} = 0.673862$$

$$-n = \frac{\ln 0.673862}{\ln 1.08}$$

$$n = 5.13 ans$$

وبتحويل هذه القيمة إلى شهور وأيام نجد تاريخ الإستحقاق المتوسط يساوي 5 سنوات وشهر و18 يوم.

الفصل الثالث: الدفعات (الأقساط) les annuités

أولا: مفاهيم أساسية

قبل أن نتناول أهم القوانين المرتبطة بالدفعات، وجب علينا أن نتعرف على ماهية الدفعات، وأنواعها.

1- تعريف الدفعة: مبلغ يتم دفعه بصفة دورية منتظمة وعلى فترات متساوية، ويطلق على فترة الدفع الثابتة والتي تفصل بين دفعتين متتاليتين بمدة الدفعة، وقد تدفع الدفعة سنويا فتسمى دفعة سنوية، وقد تدفع كل نصف سنة فتسمى دفعة نصف سنوية، كما قد تكون الدفعة ربع سنوية إذا كانت الفترة ثلاث شهور، أو دفعة شهرية إذا كانت الفترة الزمنية شهر[1].

2- أنواع الدفعات: يمكن أن نميز بين أنواع متعددة من الدفعات وذلك وفقا للمعيار المستخدم في التقسيم وفيما يلي أهم التقسيمات لأنواع الدفعات:

ا- دفعات حسب المدة: ونميز بين نوعين[2]:

- **دفعات نهاية المدة:** وهي الدفعات التي تدفع في نهاية الفترات الزمنية وتسمى بدفعات السداد وهي موجهة أساسا لتغطية التزام سابق أو الوفاء بدين.
- **دفعات بداية المدة:** وهي الدفعات التي تدفع في بداية الفترات الزمنية وتسمى بدفعات التوظيف أو الإستثمار وتهدف إلى تكوين رأس المال وتدفع بعد إبرام العقد مباشرة.

ب- دفعات حسب المبلغ: ونميز بين نوعين[3]:

- **دفعات متساوية:** وهي تلك الدفعات التي تكون فيها مبالغ الدفعات متساوية.
- **دفعات متغيرة:** وهي تلك الدفعات التي تكون فيها مبالغ الدفعات غير متساوية.

ثانيا: الدفعات المتساوية

I. دفعات نهاية المدة (دفعات السداد)

1- حساب جملة دفعات نهاية المدة

ويتم ذلك عن طريق حساب مجموع جملة مبالغ الدفعات في نهاية المدة .

لنرمز للجملة ب: A_n

- قيمة الدفعة بa
- عدد الدفعات بn

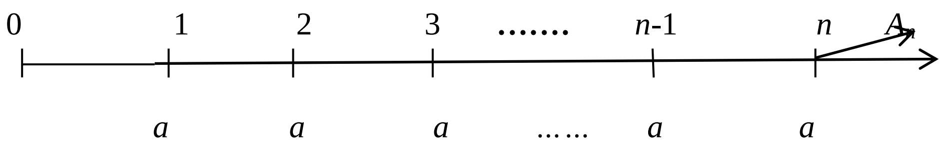
حيث: $a_1=a_2=a_3=\dots a_n$

---

[1] عمر عبد الجواد عبد العزيز، مرجع سابق، ص 277.

[2] خرخاش سامية، **محاضرات في الرياضيات المالية**، مطبوعة غير منشورة، جامعة محمد بوضياف بالمسيلة، الجزائر، 2016/2015، ص14.

[3] بن طلحة صليحة، مرجع سابق، ص 117.



لإيجاد جملة عدد من دفعات نهاية المدة المتساوية نحسب مجموع الدفعات منفصلة كما يوضحه الجدول الموالي:

الدفعات	المدة	الجملة عند اللحظة n
1	n-1	$a(1+i)^{n-1}$
2	n-2	$a(1+i)^{n-2}$
3	n-3	$a(1+i)^{n-3}$
.	.	.
n-1	1	$a(1+i)$
n	0	$a(1+i)^0 = 1$

إن جملة الدفعات كاملة ابتداء من آخر دفعة هي:

$$A_n = a + a(1+i) + a(1+i)^2 + ... + a(1+i)^{n-3} + a(1+i)^{n-2} + a(1+i)^{n-1}$$

هذه القيم تشكل فيما بينها حدود متتالية هندسية متزايدة حدها الأول a وأساسها $(1+i)$ وعدد حدودها n .

ونعلم أن مجموع متتالية هندسية S وأساسها r وعدد حدودها n وحدها الأول a يعطى كمايلي: $S = a\dfrac{(r^n - 1)}{r-1}$

ومنه فإن:

$$A_n = a\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)-1}$$

$$\boxed{A_n = a\frac{(1+i)^n - 1}{i}}$$

مثال:

يودع شخص مبلغا قدره $2000\ DA$ في بنك في نهاية كل سنة ابتداء من سنة 2009، أوجد المبلغ الذي سيتحصل عليه في نهاية 2018 ،إذا كان البنك يستخدم معدل فائدة مركبة 12% سنويا؟

الحل:

$a=2000DA$ $\qquad n=10ans$ $\qquad i=12\%$ $\qquad A_n = ?$

ـ حساب المبلغ المتحصل عليه

$$A_n = a\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$A = 2000\frac{(1.12)^{10} - 1}{0.12}$$

$$A = 35097.47DA$$

2- تحديد عناصر الجملة لدفعات نهاية المدة:

باستعمال قانون الجملة لدفعات نهاية المدة يمكن تحديد عناصرها كما يلي:

ا- حساب مبلغ الدفعة:

يمكن حساب ذلك كالآتي:

$$A_n = a\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$a = A_n\frac{i}{(1+i)^n - 1}$$

مثال:

كون أحد الأشخاص رأس مال قدره $DA268331.52$ بواسطة 12 دفعة ثابتة تدفع في نهاية كل سنة بمعدل فائدة سنوي قدره 7%.

أحسب قيمة الدفعة الثابتة؟

الحل:

A_n=268331.52 *DA* $\quad$ *n*=12 $\quad$ *i*=7% $\quad$ *a*= ?

$$a = A_n\frac{i}{(1+i)^n - 1}$$

$$a = 268331.52\frac{0.07}{(1.07)^{12} - 1}$$

$$a = 268331.52 \times 0.055901 = 15000DA$$

ب- حساب معدل الفائدة:

من خلال القانون:

$$A_n = a\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$\frac{A_n}{a} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

إن ناتج قسمة $\frac{A_n}{a}$ هو المعامل وبمعلومية n وهو موجود في الجدول رقم (3) من جداول الفائدة المركبة .

مثال:

قام شخص بإيداع 30 دفعة سنوية لدى أحد البنوك بنهاية كل عام فإذا كان مقدار الدفعة الواحدة $DA451.5420$ وبنهاية مدة التوظيف بلغ رصيده $DA30000$ ،أوجد معدل الفائدة السنوي المعتمد لدى البنك؟

الحل:

A_n=30000DA a=451.5420 DA n=30 i= ?

من القانون:

$$\frac{A_n}{a}=\frac{(1+i)^n-1}{i}$$

$$\frac{30000}{451.5420}=\frac{(1+i)^{20}-1}{i}$$

$$66.439=\frac{(1+i)^{20}-1}{i}$$

نبحث في الجدول المالي رقم (4) بمعلومية المدة الزمنية 30 سنة عند القيمة 66.439 فنجد أن القيمة الموافقة لها هي المعدل 5%.

ج- حساب عدد الدفعات n

من القانون:

$$A_n=a\frac{(1+i)^n-1}{i}$$

$$\frac{A_n i}{a}=(1+i)^n-1$$

$$(1+i)^n=\frac{(A_n i)+a}{a}$$

$$n\ln(1+i)=\ln\frac{(A_n i)+a}{a}$$

$$n=\frac{\ln\frac{(A_n i)+a}{a}}{\ln(1+i)}$$

مثال1:

احسب عدد الدفعات السنوية في نهاية المدة والتي تعطي جملة مقدارها $DA87999.0144$ إذا كان مقدار الدفعة الواحدة $DA15000$ ومعدل الفائدة السنوي 8% ؟

الحل:

A_n=87999.0144 *DA*　　　a=15000*DA*　　　i=8%　　　n= ?

لدينا:

$$\frac{A_n}{a}=\frac{(1+i)^n-1}{i}$$

$$\frac{(1.08)^n-1}{0.08}=\frac{87999.0144}{15000}$$

$$\frac{(1.08)^n-1}{0.08}=5.86660$$

$$(1.08)^n=1.4693$$

$$n\ln 1.08=\ln 1.4693$$

$$n=\frac{\ln 1.4693}{\ln 1.08}$$

$$n=\frac{0.3848}{0.0770}$$

$$n\simeq 5$$

مثال2:

احسب عدد الدفعات السنوية في نهاية المدة والتي تعطي جملة مقدارها *DA*350000 إذا كان مقدار الدفعة الواحدة *DA*36000 ومعدل الفائدة السنوي 6% ؟

الحل:

A_n= 350000*DA*　　　a=36000*DA*　　　i=6%　　　n= ?

$$n=\frac{\ln\frac{(A_n i)+a}{a}}{\ln(1+i)}$$

$$n=\frac{\ln\frac{(350000\times 0.06)+36000}{36000}}{\ln(1.06)}$$

$$n=\frac{0.4595}{0.0582}$$

$$n=7.89$$

لايمكن أن يكون عدد الدفعات عددا غير تام ولمواجهة هذه المشكلة فإنه يوجد 3 حلول بالنسبة ل***n***

الحل الأول: a>36000 و n=7

$$a = 350000\frac{0.06}{(1.06)^7 - 1}$$

$$a = 41697.25DA$$

الحل الثاني: $a<36000$ و $n=8$

$$a = 350000\frac{0.06}{(1.06)^8 - 1}$$

$$a = 35362.25DA$$

الحل الثالث: $a=36000$ و $n=7$ والدفعة الأخيرة $a=36000+x$

$$A_n = 36000.\frac{(1.06)^7 - 1}{0.06}$$

$$A_n = 302178.13DA$$

x=350000-302178.13=47821.13DA

وتكون قيمة الدفعة الأخيرة a_7=36000+47821.13=83821.87DA

3- حساب جملة دفعات نهاية المدة بعد d فترة من الدفعة الأخيرة

يمكن حساب ذلك من خلال القانون الموالي:

$$A_n = a\frac{(1+i)^n - 1}{i}(1+i)^d$$

مثال:

يودع شخص مبلغ DA100 في نهاية كل سداسي ابتداء من سنة 2012 وحتى نهاية سنة 2014، احسب المبلغ الذي سيتحصل عليه هذا الشخص في نهاية سنة 2015 إذا كان المعدل السداسي المستخدم هو 5%؟

الحل:

a=100 DA n=6 d=2 i=5% A_n= ?

- حساب جملة المبلغ المتحصل عليه نهاية 2015

$$A_n = a\frac{(1+i)^n - 1}{i}(1+i)^d$$

$$A_n = 100\frac{(1.05)^6 - 1}{0.05}(1.05)^2$$

$$A_n = 749.91DA$$

4- حساب جملة دفعات نهاية المدة بعد d فترة من الدفعة الأخيرة إذا كانت المعدلات متغيرة

يمكن حساب ذلك من خلال القانون التالي:

$$A_n = a\frac{(1+i_1)^n}{i_1}(1+i_2)^d$$

مثال:

تودع أمل في نهاية كل شهر مبلغا مقداره $DA600$ لدى أحدى البنوك بمعدل فائدة شهري قدر ب0.5% لمدة سنتين، احسب المبلغ المتحصل عليه سنة بعد آخر دفعة إذا تم تغيير معدل التوظيف ليصبح 0.6% شهريا ؟

الحل:

- حساب جملة المبلغ المتحصل عليه

$a=600DA$ $\quad n_1=24$ $\quad n_2=12$ $\quad i_1=0.5\%$ $\quad i_2=0.6\%$ $\quad A_n=?$

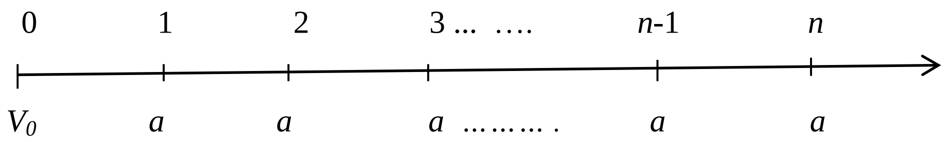
$$A_n = a\frac{(1+i_1)^n}{i_1}(1+i_2)^d$$

$$A_n = 600\frac{(1.005)^{24}}{0.005}(1.006)^{12}$$

$$A_n = 145325.72DA$$

5- القيمة الحالية لدفعات نهاية المدة

لحساب القيمة الحالية لمجموعة من الدفعات المدفوعة في نهاية المدة والتي يرمز لها بالرمز V_0 يكفي أن نحسب مجموع القيم الحالية لكل دفعة وذلك في اللحظة 0



ويلخص الجدول الموالي القيمة الحالية لكل دفعة

الدفعات	المدة	الجملة عند اللحظة 0
1	1	$a(1+i)^{-1}$
2	2	$a(1+i)^{-2}$
3	3	$a(1+i)^{-3}$
. . .	. . .	. . .
n-1	n-1	$a(1+i)^{-(n-1)}$
n	n	$a(1+i)^{-n}$

إن القيمة الحالية للدفعات كاملة ابتداء من آخر دفعة هي:

$$V_0 = a(1+i)^{-n} + a(1+i)^{-(n-1)} + ...+ a(1+i)^{-3} + a(1+i)^{-2} + a(1+i)^{-1}$$

هذه القيم تشكل فيما بينها حدود متتالية هندسية متزايدة حدها الأول $a(1+i)^{-n}$ وأساسها $(1+i)$ وعدد حدودها n .

ونعلم أن مجموع متتالية هندسية S وأساسها r وعدد حدودها n وحدها الأول a يعطى كمايلي: $S = a\dfrac{(r^n-1)}{r-1}$

ومنه فإن:

$$V_0 = a(1+i)^{-n}\frac{(1+i)^n-1}{(1+i)-1}$$

$$\boxed{V_0 = a\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}}$$

كما يمكننا إيجاد القيمة الحالية باستخدام الجملة كمايلي:

$$V_0 = A_n(1+i)^{-n}$$

$$V_0 = a\frac{(1+i)^n-1}{i}(1+i)^{-n}$$

$$\boxed{V_0 = a\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}}$$

مثال:

أقترض شخص مبلغا من المال من أحد البنوك لغرض شراء محل تجاري واتفق مع البنك على أن يقوم بتسديد القرض على دفعات متساوية منتظمة قيمة كل دفعة $15000DA$ تدفع في نهاية كل ستة أشهر فإذا كان البنك يعطي فائدة معدلها السنوي 10% وأن الفوائد تدفع مرتين خلال السنة

المطلوب: ماهو ثمن شراء المحل التجاري إذا علمت أن المقترض استمر على تسديد دفعات لمدة 8 سنوات؟

الحل:

$a=15000DA$ $\quad$ $n=8ans$ $\quad$ $i=10\%$ $\quad$ $V_0= ?$

- حساب ثمن شراء المحل التجاري

إن ثمن شراء المحل التجاري تمثله القيمة الحالية للدفعات وتحسب كمايلي:

$$V_0 = a\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

ولكن قبل ذلك وجب علينا حساب المعدل السداسي المكافئ للسنوي بما أن الفوائد تدفع في نهاية كل سداسي أي مرتين خلال السنة ويكون:

$$i_k=(1+i)^{\frac{1}{k}}-1$$

$$i_s=(1.1)^{\frac{1}{2}}-1$$

$$i_s=0.0488$$

ومنه يكون ثمن شراء المحل التجاري يساوي:

$$V_0=15000\frac{1-(1.0488)^{-16}}{0.0488}$$

$$V_0=163964.03DA$$

6- تحديد عناصر القيمة الحالية لدفعات نهاية المدة:

باستعمال قانون القيمة الحالية لدفعات نهاية المدة يمكن تحديد عناصرها كما يلي:

ا- حساب مبلغ الدفعة الثابتة:

$$V_0=a\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$a=V_0\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$$

مثال:

من أجل اقتناء آلة بمبلغ $DA200000$ يتم الدفع بدفعات متساوية ثابتة وفي نهاية كل سنة على مدار 10 سنوات، بمعدل 10% ، احسب قيمة الدفعة؟

الحل:

$V_0=200000DA$ $n=10$ $i=10\%$ $a=?$

- حساب قيمة الدفعة

$$a=V_0\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$$

$$a=200000\frac{0.1}{1-(1.1)^{-10}}$$

$$a=32549.07DA$$

ب- حساب معدل الفائدة:

$$V_0=a\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$\frac{V_0}{a}=\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

يمكن حساب المعدل عن طريق حساب المقدار $\frac{V_0}{a}$ بمعلومية n وهو موجود في الجدول رقم (4) من جداول الفائدة المركبة .

مثال:

شخص ما مدين بمبلغ قدره $DA7188.3$ اقترح عليه من طرف البنك أن يسدده خلال 10 سداسيات حيث تدفع الأولى بعد 6 أشهر ومبلغها $DA10000$ ، أحسب معدل الفائدة؟

الحل:

$V_0=7188.3DA$ $\quad n=10$ $\quad a=10000DA$ $\quad i=?$

$$\frac{V_0}{a}=\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$\frac{71888.3}{10000}=\frac{1-(1+i)^{-10}}{i}=7.1888.3$$

من الجدول المالي رقم (4) نجد $i=6.5\%$

ج- حساب عدد الدفعات n

$$\frac{V_0}{a}=\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$\frac{V_0\times i}{a}=1-(1+i)^{-n}$$

$$(1+i)^{-n}=1-\frac{V_0\times i}{a}$$

$$(1+i)^{-n}=\frac{a}{a}-\frac{V_0\times i}{a}$$

$$(1+i)^{-n}=\frac{a-V_0\times i}{a}$$

$$-n\ln(1+i)=\ln\frac{a-V_0\times i}{a}$$

$$n=\frac{-\ln\left(\frac{a-V_0 i}{a}\right)}{\ln(1+i)}$$

مثال1:

من أجل شراء مبنى قيمته $DA117274.17$ تم تسديده بواسطة دفعات سنوية تدفع بعد سنة من تاريخ الشراء حيث قدر مبلغ الدفعة الثابتة $DA18000$ ومعدل الفائدة السنوي 7%.

- أحسب عدد الدفعات اللازمة؟

الحل:

$V_0=117274.17\ DA$ $\quad a=18000\ DA$ $\quad i=7\%$ $\quad n=?$

$$\frac{V_0}{a}=\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$n=\frac{-\ln\left(\frac{a-V_0 i}{a}\right)}{\ln(1+i)}$$

$$n=\frac{-\ln\left(\frac{18000-117274.17\times 0.07}{18000}\right)}{\ln(1.07)}$$

$$n=\frac{-\ln(0.5439)}{\ln(1.07)}$$

$$n=\frac{0.6089}{0.0676}$$

$$n=9$$

مثال2:

نفس السؤال السابق إذا كان ثمن الشراء *DA*80000 ،ومبلغ الدفعة *DA*20000، ومعدل الفائدة السنوي 10%.

الحل:

$V_0=80000\,DA$ $\quad a=20000\,DA$ $\quad i=10\%$ $\quad n=?$

$$\frac{V_0}{a}=\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$n=\frac{-\ln\left(\frac{a-V_0 i}{a}\right)}{\ln(1+i)}$$

$$n=\frac{-\ln\left(\frac{20000-80000\times 0.1}{20000}\right)}{\ln(1.1)}$$

$$n=\frac{-\ln(0.6)}{\ln(1.1)}$$

$$n=\frac{0.5108}{0.0953}$$

$$n=5.36$$

لايمكن أن يكون عدد الدفعات عددا غير تام، ولمواجهة هذه المشكلة فإنه يوجد 3 حلول بالنسبة ل***n***.

الحل الأول: $n=5$ و $a>20000$

$$a = 80000\frac{1-(1.1)^{-5}}{0.1}$$
$$a = 21103.80DA$$

الحل الثاني: $a<20000$ و $n=6$

$$a = 80000\frac{1-(1.1)^{-6}}{0.1}$$
$$a = 18368.59DA$$

الحل الثالث: $a=20000$ و $n=5$ والدفعة الأخيرة $a_5=20000+x$

$$80000 = 20000.\frac{1-(1.1)^{-5}}{0.1} + x(1.1)^{-5}$$
$$80000 = 75815.73 + x(1.1)^{-5}$$
$$x(1.1)^{-5} = 80000 - 75815.73$$
$$0.6209x = 4184.27$$
$$x = 6738.81$$

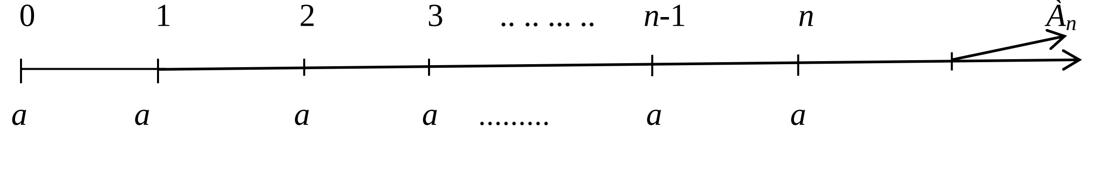
وتكون قيمة الدفعة الأخيرة $a_5=20000+6738.81=26738.81DA$

II. دفعات بداية المدة (دفعات الإستثمار)

إذا كانت دفعات نهاية المدة تدفع في نهاية كل فترة، فإن دفعات **بداية المدة** تدفع في بداية الفترة الزمنية، ويكمن الفرق الوحيد بين النوعين من الدفعات، في أن الدفعة الأولى لدفعات بداية المدة تستثمر من بداية الفترة الأولى وحتى نهاية المدة، أي لمدة n وليس n-1 كما هو الحال في دفعات نهاية المدة، كما أن الدفعة الأخيرة تستثمر لفترة واحدة وليس 0 فترة بالنسبة دفعات نهاية المدة.

1- حساب جملة دفعات بداية المدة

يبين الشكل الموالي توزيع دفعات بداية المدة وعددها n على محور الزمن، حيث تبدأ الفترة الأولى في اللحظة 0 وعندها تدفع أول دفعة، وهكذا يتوالى تسديد الدفعات مع بداية الفترات حتى آخر دفعة والتي تسدد في بداية الفترة الأخيرة.



لإيجاد جملة عدد من دفعات بداية المدة المتساوية نحسب مجموع الدفعات منفصلة، كما يوضحه الجدول الموالي:

الدفعات	المدة	الجملة عند اللحظة n
1	n	$a(1+i)^n$
2	n-1	$a(1+i)^{n-1}$
3	n-2	$a(1+i)^{n-2}$
. . .	. . .	. . .
n-1	2	$a(1+i)^2$
n	1	$a(1+i)$

إن جملة دفعات بداية المدة كاملة ابتداء من آخر دفعة هي:

$$\grave{A}_n = a(1+i)^1 + a(1+i)^2 + ... + a(1+i)^{n-2} + a(1+i)^{n-1} + a(1+i)^n$$

هذه القيم تشكل فيما بينها حدود متتالية هندسية متزايدة حدها الأول $a(1+i)$ وأساسها $(1+i)$ وعدد حدودها n .

$$\grave{A}_n = a(1+i)\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)-1}$$

$$\grave{A}_n = a(1+i)\frac{(1+i)^n - 1}{i} \quad ....(1)$$

وبالتالي فإن جملة دفعات بداية المدة تساوي جملة دفعات نهاية المدة مضروب في المقدار $(1 + i)$ ويكون:

$$\grave{A}_n = A_n(1+i)$$

من العلاقة (1) يمكننا استنتاج علاقة أخرى لجملة دفعات بداية المدة وذلك بنشر الجداء كمايلي:

$$\grave{A}_n = a\frac{(1+i)^{n+1} - (1+i)}{i}$$

$$\grave{A}_n = a\left[\frac{(1+i)^{n+1} - 1}{i} - 1\right]$$

مثال:

قام شخص بإيداع 9 دفعات سنوية متساوية في بداية كل سنة في بنك على مدار 9 سنوات، بمعدل فائدة 8% سنوي، فإذا كان مقدار الدفعة الواحدة يساوي $DA1250$ ،أوجد رصيده بنهاية تلك المدة؟

الحل:

a=1250DA n=9ans i=8% $\grave{A}_n$= ?

-حساب رصيد الشخص

$$\grave{A}_n = a(1+i)\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$\grave{A}_n = 1250(1.08)\frac{(1.08)^9 - 1}{0.08}$$

$$\grave{A}_n = DA16858.20$$

2- تحديد عناصر الجملة لدفعات بداية المدة:

باستعمال قانون الجملة لدفعات بداية المدة يمكن تحديد عناصرها كمايلي:

ا- حساب مبلغ الدفعة:

يمكن حساب ذلك كالآتي:

$$\grave{A}_n = a(1+i)\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$a = \grave{A}_n \frac{i}{(1+i)^n - 1}(1+i)^{-1}$$

$$a = \grave{A}_n (1+i)^{-1}\left[\frac{i}{1-(1+i)^{-n}} - i\right]$$

ب- حساب معدل الفائدة:

من خلال القانون:

$$\grave{A}_n = a\left[\frac{(1+i)^{n+1} - 1}{i} - 1\right]$$

$$\frac{\grave{A}_n}{a} + 1 = \frac{(1+i)^{n+1} - 1}{i}$$

إن ناتج قسمة $\frac{\grave{A}_n}{a}+1$ هو المعامل بمعلومية n وهو موجود في الجدول رقم (3) من جداول الفائدة المركبة .

ج- حساب عدد الدفعات n

من القانون:

$$\grave{A}_n = a\left[\frac{(1+i)^{n+1}-1}{i}-1\right]$$

$$\frac{\grave{A}_n}{a}+1=\frac{(1+i)^{n+1}-1}{i}$$

$$\left(\frac{\grave{A}_n}{a}+1\right)i=(1+i)^{n+1}-1$$

$$\left(\frac{\grave{A}_n}{a}+1\right)i+1=(1+i)^{n+1}$$

$$\ln\left[\left(\frac{\grave{A}_n}{a}+1\right)i+1\right]=\ln(1+i)^{n+1}$$

$$\ln\left[\left(\frac{\grave{A}_n}{a}+1\right)i+1\right]=(n+1)\ln(1+i)$$

$$n+1=\frac{\ln\left[\left(\frac{\grave{A}_n}{a}+1\right)i+1\right]}{\ln(1+i)}$$

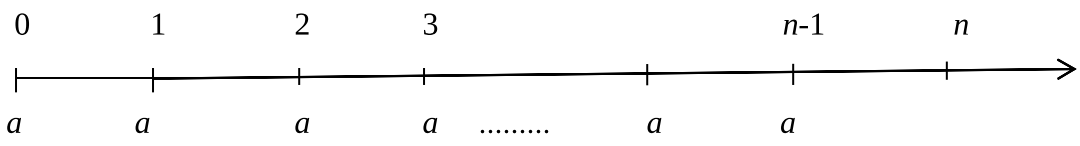
$$n=\frac{\ln\left[\left(\frac{\grave{A}_n}{a}+1\right)i+1\right]}{\ln(1+i)}-1$$

أما في حالة ما إذا كان عدد الدفعات عددا غير تام، فلمواجهة هذه الإشكالية فهناك 3 حلول نذكرها كالآتي:

- تحديد الحد الأدنى للدفعات مع حساب مبلغ الدفعة الجديدة والذي يكون أكبر من الدفعة النظرية؛
- تحديد الحد الأقصى للدفعات مع حساب مبلغ الدفعة الجديدة والذي يكون أقل من الدفعة النظرية؛
- تحديد الحد الأدنى للدفعات مع الابقاء على الدفعة النظرية ودفع مبلغ مكمل يضاف للدفعة الأخيرة للحصول على نفس الجملة؛

3- حساب القيمة الحالية لدفعات بداية المدة

لحساب القيمة الحالية لمجموعة من الدفعات المدفوعة في بداية المدة والتي يرمز لها بالرمز V_0`، يكفي أن نحسب مجموع القيم الحالية لكل دفعة وذلك في اللحظة **0**، والتي توافق تسديد أول دفعة من دفعات بداية المدة.



ويلخص الجدول الموالي القيمة الحالية لكل دفعة.

الدفعات	المدة	الجملة عند اللحظة 0
1	0	$a(1+i)^0 = a$
2	1	$a(1+i)^{-1}$
3	2	$a(1+i)^{-2}$
. . .	. . .	. . .
n-1	n-2	$a(1+i)^{-(n-2)}$
n	n-1	$a(1+i)^{-(n-1)}$

إن مجموع القيم الحالية لدفعات بداية المدة كاملة ابتداء من آخر دفعة هي:

$$V_0` = a\ (1+i)^{-(n-1)} + a\ (1+i)^{-(n-2)} + ... + a(1+i)^{-2} + a(1+i)^{-1} + a$$

هذه القيم تشكل فيما بينها حدود متتالية هندسية متزايدة حدها الأول $a(1+i)^{-(n-1)}$ وأساسها $(1+i)$ وعدد حدودها n .

$$V_0` = a(1+i)^{-(n-1)} \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1}$$

$$V_0` = a(1+i)(1+i)^{-n} \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$V_0` = a(1+i)\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

يلاحظ من العلاقة الأخيرة أن : $V_0` = V_0(1+i)$

كما يمكننا استخلاص قانون القيمة الحالية بالإعتماد على قانون الجملة كمايلي:

$$V_0` = \grave{A}_n (1+i)^{-n}$$

$$V_0` = a(1+i)\frac{(1+i)^n - 1}{i}(1+i)^{-n}$$

$$V_0` = a(1+i)\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

مثال:

احسب القيمة الحالية لمجموعة من الدفعات السنوية مدفوعة في بداية المدة قيمة كل منها يساوي $DA650$ وعددها 20 على أساس فائدة مركبة %7.5 عن السنة؟

الحل:

a=650DA n=20 i=7.5% V_0`= ?

- حساب القيمة الحالية

$$V_0` = a(1+i)\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$V_0` = 650(1.075)\frac{1-(1.075)^{-20}}{0.075}$$

$$V_0` = 7123.40DA$$

4- تحديد عناصر القيمة الحالية لدفعات بداية المدة:

باستعمال قانون القيمة الحالية لدفعات بداية المدة يمكن تحديد عناصرها كمايلي:

ا- حساب مبلغ الدفعة الثابتة:

يمكن حساب ذلك كالآتي:

$$V_0` = a(1+i)\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$a = V_0`(1+i)^{-1}\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$$

ب- حساب معدل الفائدة

من خلال القانون:

$$V_0` = a(1+i)\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$V_0` = a\frac{1+i-(1+i)^{-(n-1)}}{i}$$

$$V_0` = a\left[1+\frac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i}\right]$$

$$\frac{V_0`}{a}-1 = \frac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i}$$

لإيجاد قيمة المعامل $\frac{V_0`}{a}-1$ وبمعلومية n نستعين بالجدول المالي رقم (4).

ج- حساب عدد الدفعاتn

من القانون :

$$V_0` = a(1+i)\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$\frac{a}{V_0`}(1+i)=\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$$

لإيجاد قيمة المعامل $\frac{a}{V_0`}(1+i)$ وبمعلومية i نستعين بالجدول المالي رقم (5).

وباستخدام اللوغاريتم نجد:

$$a\frac{(1+i)}{V_0`i}=\frac{1}{1-(1+i)^{-n}}$$

$$\left[1-(1+i)^{-n}\right]\left[a(1+i)\right]=V_0`i$$

$$\left[1-(1+i)^{-n}\right]=\frac{V_0`i}{a(1+i)}$$

$$(1+i)^{-n}=1-\frac{V_0`i}{a(1+i)}$$

$$-n\ln(1+i)=\ln\left[1-\frac{V_0`i}{a(1+i)}\right]$$

$$n=\frac{-\ln\left[1-\frac{V_0`i}{a(1+i)}\right]}{\ln(1+i)}$$

أما في حالة ما إذا كان عدد الدفعات عددا غير تام، فلمواجهة هذه الإشكالية فهناك 3 حلول نذكرها كالآتي:

- تحديد الحد الأدنى للدفعات مع حساب مبلغ الدفعة الجديدة والذي يكون أكبر من الدفعة النظرية؛
- تحديد الحد الأقصى للدفعات مع حساب مبلغ الدفعة الجديدة والذي يكون أقل من الدفعة النظرية؛
- تحديد الحد الأدنى للدفعات مع الابقاء على الدفعة النظرية ودفع مبلغ مكمل يضاف للدفعة الأخيرة للحصول على نفس الجملة؛

5- تاريخ الإستحقاق المتوسط للدفعات

يمكن تحديد تاريخ الإستحقاق لمجموعة من الدفعات، وهو التاريخ الذي تتحقق فيه المساواة بين القيمة الحالية لمجموع الدفعات، ومجموع الدفعات (مبلغ وحيد) أي تحقق العلاقة:

$$n.a(1+i)^{-n`}=a\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

علما أ ن **$n`$:** هو تاريخ الإستحقاق المتوسط للدفعات

na :هو مجموع الدفعات (المبلغ الوحيد)

وبالتالي يكون:

$$n.a\left(1+i\right)^{-n`}=a\frac{1-\left(1+i\right)^{-n}}{i}$$

$$n.\left(1+i\right)^{-n`}=\frac{1-\left(1+i\right)^{-n}}{i}$$

$$\left(1+i\right)^{-n`}=\frac{1-\left(1+i\right)^{-n}}{ni}$$

$$\left(1+i\right)^{n`}=n\left[\frac{i}{1-\left(1+i\right)^{-n}}\right]$$

مثال:

شخص مطالب بتسديد 10 دفعات سنوية متساوية قيمة كل منها $DA8000$ يتم دفعها إما عن طريق:

- دفع 12 دفعة ثلاثية ثابتة؛
- دفعة واحدة قيمتها $DA80000$؛

إذا كان معدل الفائدة المركبة 10% احسب:

- مبلغ الدفعة الثلاثية؟
- تاريخ استحقاق الدفعة الوحيدة (تاريخ الإستحقاق المتوسط)؟

الحل:

na=80000DA n=12 i=10% $a`$=8000 a = ?

- حساب المبلغ الثابت للدفعة الثلاثية

نبحث أولا عن المعدل الثلاثي المكافئ للسنوي

$$i=\left(1+i\right)^{\frac{1}{4}}-1=\left(1.1\right)^{\frac{1}{4}}-1$$
$$i=0.0241137$$

عند التكافؤ يحدث أن تتساوى القيم الحالية كالآتي:

$$a\frac{1-\left(1.0241137\right)^{-12}}{0.0241137}=8000\frac{1-\left(1.1\right)^{-10}}{0.1}$$
$$1.0313029a=49156.5368456$$
$$a=4766.45DA$$

- حساب تاريخ الإستحقاق المتوسط

$$\left(1+i\right)^{n`}=n\left[\frac{i}{1-\left(1+i\right)^{-n}}\right]$$

$$(1.1)^{n`} = 10\left[\frac{0.1}{1-(1.1)^{-10}}\right]$$

$$n` = \frac{\ln 1.627454}{\ln 1.1}$$

$$n` = 5.11$$

على هذا الشخص أن يدفع مبلغا وحيد يقدر ب$DA80000$ بعد 5 سنوات و1 شهر و10 أيام والذي يوافق تاريخ الإستحقاق المتوسط لمجموعة 10 دفعات الأولية.

ثالثا: الدفعات المتغيرة

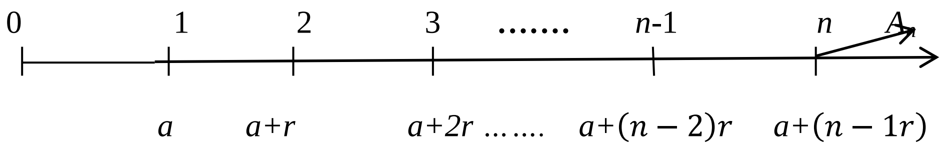
لقد تطرقنا في ما سبق إلى الدفعات المتساوية، وقلنا أنها لا تتغير من فترة إلى أخرى، غير أنه يمكن أن تتغير هذه الدفعات سواء بالزيادة أو النقصان، ومن أكثر **الدفعات المتغيرة** تلك التي تتغير وفق قانون معين ومن أهمها:

- دفعات ذات متتالية حسابية؛
- دفعات ذات متتالية هندسية؛

I. الدفعات ذات متتالية حسابية

1- حساب الجملة لدفعات ذات متتالية حسابية

يمكن الحصول على جملة A_n لدفعات ذات متتالية حسابية مسددة في نهاية المدة، عن طريق حساب جملة كل دفعة من الدفعات بعد تسديد الدفعة الأخيرة مباشرة.



$$A_n = a(1+i)^{n-1} + (a+r)(1+i)^{n-2} + (a+2r)(1+i)^{n-3} + ... + \left[a+(n-2)r\right](1+i) + \left[a+(n-1)r\right]$$

$$A_n = a\left[(1+i)^{n-1}(1+i)^{n-2}(1+i)^{n-3}+..+(1+i)+1\right] + r\left[(1+i)^{n-2}+2(1+i)^{n-3}+..+(n-2)(1+i)+(n-2)\right]$$

الجزء الأول من العبارة يمثل مجموع حدود متتالية هندسية حدها الأول 1 وأساسها $(1+i)$ وعدد حدودها n

$$A_n = a\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right] + rS.........................(1)$$

$$S = \left[(1+i)^{n-2} + 2(1+i)^{n-3} + .. + (n-2)(1+i) + (n-2)\right]...................(2)$$

بضرب طرفي المعادلة (2) في $(1+i)$ نجد:

$$S(1+i) = \left[(1+i)^{n-1} + 2(1+i)^{n-2} + .. + (n-2)(1+i)^2 + (n-2)(1+i)\right]....................(3)$$

بطرح (3) من (2) ينتج:

$$S(1+i)-S=\left[(1+i)^{n-1}+(1+i)^{n-2}+..+(1+i)^{2}+(1+i)-(n-1)\right]$$

$$Si=\left[(1+i)^{n-1}+(1+i)^{n-2}+..+(1+i)^{2}+(1+i)+1\right]-n$$

المجموع الذي بين مزدوجين يمثل مجموع متتالية هندسية حدها الأول 1 وأساسها $(1+i)$ وعدد حدودها n

$$Si=\left[\frac{(1+i)^{n}-1}{i}\right]-n$$

$$S=\frac{1}{i}\left[\frac{(1+i)^{n}-1}{i}-n\right]\dots\dots\dots\dots\dots\dots(4)$$

نعوض المعادلة (4) في (1) نجد:

$$A_n=a\left[\frac{(1+i)^{n}-1}{i}\right]+\frac{r}{i}\left[\frac{(1+i)^{n}-1}{i}-n\right]$$

$$A_n=\left[\frac{(1+i)^{n}-1}{i}\right]\left(a+\frac{r}{i}\right)-\left(\frac{nr}{i}\right)$$

2- حساب القيمة الحالية لدفعات ذات متتالية حسابية

يمكن حساب ذلك بالرجوع إلى قانون الجملة حيث:

$$V_0=A_n(1+i)^{-n}$$

بتعويض قيمة A_n في العبارة السابقة نحصل على:

$$V_0=\left[\left[\frac{(1+i)^{n}-1}{i}\right]\left(a+\frac{r}{i}\right)-\left(\frac{nr}{i}\right)\right](1+i)^{-n}$$

$$V_0=\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\left(a+\frac{r}{i}\right)-\left(\frac{nr}{i}\right)(1+i)^{-n}\right]$$

نضيف ونطرح nr/i فيكون:

$$V_0=\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\left(a+\frac{r}{i}\right)-\left(\frac{nr}{i}\right)(1+i)^{-n}+\frac{nr}{i}-\frac{nr}{i}\right]$$

$$V_0=\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\left(a+\frac{r}{i}\right)+nr\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]-\left(\frac{nr}{i}\right)\right]$$

$$V_0=\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\left[a+\left(\frac{r}{i}\right)+nr\right]-\left(\frac{nr}{i}\right)\right]$$

مثال:

أحسب الجملة والقيمة الحالية لمجموعة دفعات متزايدة سنويا في شكل متتالية حسابية، مسددة في نهاية المدة ،عددها 15 ومبلغ كل منها $DA500$ وأساسها $DA100$ ،باستخدام معدل فائدة مركبة سنوي يقدر ب12% ؟

الحل:

$a=500DA$ $\quad n=15$ $\quad r=100DA$ $\quad i=12\%$ $\quad A_n=?$ $\quad V_0=?$

- حساب الجملة

$$A_n=\left[\frac{(1+i)^n-1}{i}\right]\left(a+\frac{r}{i}\right)-\left(\frac{nr}{i}\right)$$

$$A_n=\left[\frac{(1.12)^{15}-1}{0.12}\right]\left(500+\frac{100}{0.12}\right)-\left(\frac{15\times100}{0.12}\right)$$

$$A_n=37.279714\times1333.333333-12500$$

$$A_n=37206.28DA$$

- حساب القيمة الحالية

$$V_0=\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\left[a+\left(\frac{r}{i}\right)+nr\right]-\left(\frac{nr}{i}\right)\right]$$

$$V_0=\left[\frac{1-(1.12)^{-15}}{0.12}\left[500+\left(\frac{100}{0.12}\right)+15\times100\right]-\left(\frac{15\times100}{0.12}\right)\right]$$

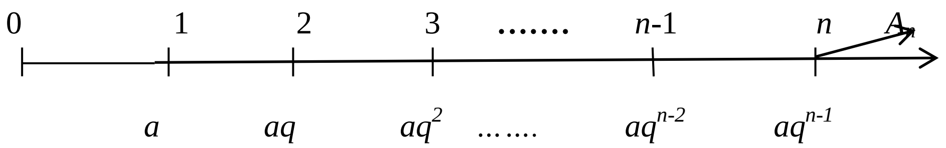
$$V_0=6.810864\times2833.333333-12500$$

$$V_0=6797.44DA$$

II. الدفعات ذات متتالية هندسية

1- حساب الجملة لدفعات ذات متتالية هندسية

يمكن الحصول على جملة A_n لدفعات ذات متتالية هندسية مسددة في نهاية المدة عن طريق حساب جملة كل دفعة من الدفعات بعد تسديد الدفعة الأخيرة مباشرة.



$$A_n=a(1+i)^{n-1}+aq(1+i)^{n-2}+aq^2(1+i)^{n-3}+....+aq^{n-2}(1+i)+aq^{n-1}$$

هذا المقدار يمثل حدود متتالية هندسية حدها الأول $a(1+i)^{n-1}$ وأساسها $q/(1+i)$ وعدد حدودها n ويمكن كتابته كمايلي:

$$A_n = a\left[(1+i)^{n-1}\frac{\left(\frac{q}{1+i}\right)^n - 1}{\left(\frac{q}{1+i}\right) - 1}\right]$$

$$A_n = a\left[(1+i)^{n-1}\frac{\frac{q^n-(1+i)^n}{(1+i)^n}}{\frac{q-(1+i)}{(1+i)}}\right]$$

$$A_n = a\left[(1+i)^{n-1}\frac{q^n-(1+i)^n}{q-(1+i)}\times\frac{(1+i)}{(1+i)^n}\right]$$

$$A_n = a\left[\frac{q^n-(1+i)^n}{q-(1+i)}\times\frac{(1+i)^n}{(1+i)^n}\right]$$

$$A_n = a\left[\frac{q^n-(1+i)^n}{q-(1+i)}\right]$$

إذا كان $q=(1+i)$ يكون لدينا حالة عدم التعيين ولإزالتها نرجع لبداية الإثبات:

$$A_n = a(1+i)^{n-1} + aq(1+i)^{n-2} + aq^2(1+i)^{n-3} + ... + aq^{n-2}(1+i) + aq^{n-1}$$

$$A_n = a(1+i)^{n-1} + a(1+i)(1+i)^{n-2} + a(1+i)^2(1+i)^{n-3} + ... + a(1+i)^{n-2}(1+i) + a(1+i)^{n-1}$$

$$A_n = a(1+i)^{n-1} + a(1+i)^{n-1} + a(1+i)^{n-1} + ... + a(1+i)^{n-1} + a(1+i)^{n-1}$$

$$A_n = na(1+i)^{n-1}$$

2- حساب القيمة الحالية لدفعات ذات متتالية هندسية

يمكن حساب ذلك بالرجوع إلى قانون الجملة حيث:

$$V_0 = A_n(1+i)^{-n}$$

$$V_0 = \frac{a}{(1+i)^n}\left[\frac{q^n-(1+i)^n}{q-(1+i)}\right]$$

إذا كان: $q=(1+i)$ يكون:

$$V_0 = na(1+i)^{n-1}(1+i)^{-n}$$

$$V_0 = na(1+i)^{-1}$$

مثال:

أعد نفس المثال السابق، إذا كانت الدفعات تمثل متتالية هندسية أساسها 4

الحل:

ـ حساب الجملة

$$A_n = a\left[\frac{q^n - (1+i)^n}{q-(1+i)}\right]$$

$$A_n = 500\left[\frac{4^{15} - (1.12)^{15}}{4-(1.12)}\right]$$

$$A_n = 500\frac{1073741824 - 5.473565}{2.88}$$

$$A_n = 186413510160.841DA$$

ـ حساب القيمة الحالية

$$V_0 = 186413510160.841(1.12)^{-15}$$

$$V_0 = 34057051355.4843DA$$

الفصل الرابع: استهلاك القروض amortissement des credits

تمهيد

في بعض الأحيان، قد يلجأ المستثمرون والشركات إلى الاقتراض من البنوك لتوفير السيولة اللازمة، إذا دعت الحاجة إلى ذلك لمواجهة مشاكل التمويل التي تعتريهم، لتسديد ديون سابقة أو عند تأسيس شركة جديدة أو توسيعها، ويطلق على عملية تسديد هذه القروض في الأوساط المالية والتجارية أسم **استهلاك القروض**

أولا: مفاهيم أساسية

سنحاول هنا التطرق إلى تعريف القرض، استهلاك القرض، طرق استهلاك القرض.

1- تعريف القرض: هو المبلغ الذي يستحق على شخص لشخص آخر، سواء كان هذا الشخص طبيعيا أو معنويا[1].

2- استهلاك القرض: يعني سداد قيمته الإسمية مع فوائده بتاريخ العقد للمقرض، سواء تم ذلك في صورة مبلغ واحد أو على دفعات متساوية أو غير متساوية[2].

3- طرق استهلاك القروض:

يتم استهلاك القروض بطرق مختلفة متفق عليها بين المتعاقدين، ومن أهم هذه الطرق:

ا- استهلاك القروض على دفعات متساوية (ثابتة) واهتلاكات متغيرة

ب- استهلاك القروض على دفعات متغيرة واهتلاكات متساوية(ثابتة)

ثانيا: استهلاك القروض على دفعات متساوية (ثابتة)

حيث يتم تسديد القرض دوريا بدفعات متساوية، وكل منها يتألف من جزئين أحدهما رأس المال الأصلي ويسمى الإهتلاك، والثاني الفائدة على القرض المتبقي، على أن يكون مجموع الدفعات في نهاية المدة يساوي جملة القرض.

جملة القرض في نهاية المدة= مجموع الدفعات

الدفعة= الإهتلاك +الفائدة على القرض المتبقي

1- القانون العام للإهتلاكات بواسطة الدفعات المتساوية

لتكن لدينا الرموز التالية:

- V_0: أصل القرض.
- a: قيمة الدفعة الثابتة.
- n: مدة القرض أو عدد الإهتلاكات أو الدفعات.
- i: معدل فائدة القرض
- D: الإهتلاك الذي يتزايد مع تناقص الفائدة.
- A_1، A_2، A_3، ....A_n القيم المتبقية من أصل القرض في نهاية كل فترة .
- I_1، I_2، I_3، ....I_n الفوائد خلال مدة القرض وهي متناقصة من فترة لأخرى.

---

[1] شقيري نوري موسى وآخرون، مرجع سابق، ص 199.

[2] عمر عبد الجواد عبد العزيز، مرجع سابق، ص 153.

يتم حساب جملة القرض من خلال العلاقة التالية:

$$A = V_0 (1+i)^n$$

القيمة الحالية للدفعات تساوي أصل القرض ويمكن الحصول على أصل القرض V_0 من علاقة القيمة الحالية لدفعات نهاية المدة كمايلي:

$$V_0 = a\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

بناء على العلاقة السابقة يمكن استنتاج قيمة الدفعة a

$$a = V_0 \frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$$

2- جدول استهلاك القرض

لتسهيل عملية متابعة تطور القرض واستهلاكه بواسطة الدفعات المتساوية، يتم الإعتماد على جدول يسمى جدول استهلاك القروض، تستخرج منه عدة عناصر كرأس المال المتبقي، اهتلاك وفائدة كل فترة، ويكون الجدول على الشكل التالي:

أصل القرض في نهاية الفترة	الدفعة	الإهتلاك	الفائدة	أصل القرض في بداية الفترة	الفترات
$V_1 = V_0 - D_1$	a	$D_1 = a - I_1$	$I_1 = V_0 i$	V_0	**1**
$V_2 = V_1 - D_2$	a	$D_2 = a - I_2$	$I_2 = V_1 i$	V_1	**2**
$V_3 = V_2 - D_3$	a	$D_3 = a - I_3$	$I_3 = V_2 i$	V_2	**3**
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
$V_{n-1} = V_{n-2} - D_{n-1}$	a	$D_{n-1} = a - I_{n-1}$	$I_{n-1} = V_{n-2} i$	V_{n-2}	***n-1***
$V_n = V_{n-1} - D_n = 0$	a	$D_n = a - I_n$	$I_n = V_{n-1} i$	V_{n-1}	***n***
	na	$\mathbf{V_0}$	**مجموع الفوائد**		

مثال:

اقترضت إحدى المؤسسات مبلغ $DA2000000$ لمدة 5 سنوات بفائدة مركبة معدلها السنوي 6%، وتعهدت بتسديد مبلغ القرض وفوائده معا على دفعات متساوية، يدفع كل منها آخر سنة من سنوات القرض، والمطلوب:

- أحسب قيمة الدفعة الثابتة؟
- شكل جدول استهلاك القرض مقربا قيم الإهتلاك إلى أقرب دينار؟

الحل:

$V_0 = 2000000DA$ $n = 5ans$ $i = 6\%$ $a = ?$

- حساب قيمة الدفعة الثابتة

$$a = V_0 \frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$$

$$a = 2000000 \frac{0.06}{1-(1.06)^{-5}}$$

$$a = 2000000 \times 0.2373964$$

$$a = 474792.80 DA$$

- تشكيل جدول الإستهلاك

أصل القرض في نهاية الفترة	الدفعة	الإهتلاك	الفائدة	أصل القرض في بداية الفترة	الفترات
1645207	474793	354793	120000	2000000	**1**
1269127	474793	376080	98713	1645207	**2**
870482	474793	398645	76148	1269127	**3**
447918	474793	422564	52229	870482	**4**
0	474793	447918	26875	447918	**5**
	2373965	**2000000**	**373965**		

3- بعض العلاقات والصيغ بين مختلف عناصر الجدول

ا- العلاقة بين الدفعة الثابتة والإهتلاك

لدينا: **مجموع الدفعات = أصل القرض +مجموع الفوائد**

$$na = V_0 + \sum_{i=1}^{n} I$$

$$na = \sum_{i=1}^{n} D + \sum_{i=1}^{n} I$$

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} D + \sum_{i=1}^{n} I}{n}$$

مثال:

من المثال السابق نجد:

$$a = \frac{2000000 + 373965}{5} = 474793 DA$$

وبصفة خاصة يمكننا استنتاج العلاقة بين الإستهلاك الأخير والدفعة الأخيرة كمايلي:

$V_n = 0 \longrightarrow V_{n-1} - D_n = 0 \longrightarrow V_n = D_n$

$I_n = V_{n-1} i \longrightarrow I_n = D_n i$

$a_n = D_n + I_n = D_n + D_n i = D_n(1+i)$

$a_n = D_n(1+i)$

وعليه يمكننا أن نعمم العلاقة الأخيرة والتي تربط بين الدفعة الثابتة والإهتلاك لتكون على الشكل التالي:

$a = D_k(1+i)^{n-(k-1)}$

مثال:

من المثال السابق نجد:

$$a = D_5\left(1+i\right)$$
$$a = 447918(1.06)$$
$$a = 474793DA$$
$$a = D_2(1+i)^4$$
$$a = 376080(1.06)^4$$
$$a = 474793DA$$

ب- العلاقة بين الإهتلاكات

من تساوي الدفعات نجد:

$$a_1 = a_2$$
$$D_1 + V_0 i = D_2 + \left(V_0 - D_1\right) i$$
$$D_1 + V_0 i = D_2 + V_0 i - D_1 i$$
$$D_1 + D_1 i = D_2$$
$$D_2 = D_1\left(1+i\right)$$

وبالمثل إذا ساوينا بين الدفعتين الثانية والثالثة نجد:

$$D_3 = D_2\left(1+i\right)$$

وبتعويض D_2 بما يساويه ينتج لدينا:

$$D_3 = D_1\left(1+i\right)^2$$

وبالتالي نستنتج أن الإهتلاكات تشكل فيما بينها حدود متتالية هندسية أساسها $(1+i)$ ، وعليه يمكن كتابة الإهتلاك الأخير الذي يمثل الحد الأخير في المتتالية الهندسية، بدلالة الإهتلاك الأول والذي يمثل الحد الأول كمايلي:

$$D_n = D_1\left(1+i\right)^{n-1}$$

مثال:

من المثال السابق ومن جدول الإهتلاكات لدينا

$$D_4 = D_3\left(1+i\right)$$
$$D_4 = 398645\left(1.06\right)$$
$$D_4 = 422564$$
$$D_5 = D_1\left(1+i\right)^4$$
$$D_5 = 354793\left(1.06\right)^4$$
$$D_5 = 447918$$

ج- العلاقة بين الإهتلاكات وأصل القرض

من جدول الإهتلاكات يمكننا استخراج العلاقة التي تربط بين أصل القرض والإهتلاكات كمايلي:

$$V_0 = D_1 + D_2 + D_3 + ... + D_n$$
$$V_0 = D_1 + D_1(1+i) + D_1(1+i)^2 + ... + D_1(1+i)^{n-1}$$

هذه العبارة تشكل مجموع متتالية هندسية حدها الأول D_1 وأساسها $(1+i)$ وعدد حدودها n حد وعليه:

$$V_0 = D_1 \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1}$$

$$V_0 = D_1 \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

مثال:

من المثال السابق لدينا:

$$V_0 = 354793 \frac{(1.06)^5 - 1}{0.06}$$
$$V_0 = 2000000 DA$$

د- العلاقة بين الفائدة والإهتلاك

لدينا:

$$\begin{cases} I_1 = (a - D_1) \\ I_2 = (a - D_2) \\ I_3 = (a - D_3) \\ I_4 = (a - D_4) \end{cases}$$

$$I_2 - I_1 = D_2 - D_1 \quad et \quad I_4 - I_3 = D_4 - D_3$$

وبصفة عامة:

$$I_{m-1} - I_m = D_m - D_{m-1}$$

مثال:

من المثال السابق إذاكان $m=5$:

$$I_4 - I_5 = 52229 - 26875 = 25354$$
$$D_5 - D_4 = 447918 - 422564 = 25354$$

وبالتالي:

$$I_4 - I_5 = D_5 - D_4$$

وهناك علاقات أخرى نذكرها:

$$i = \frac{I_{m-1} I_m}{D_{m-1}}$$

$$(1+i) = \frac{D_m}{D_{m-1}}$$

$$(1+i) = \frac{I_n}{(I_{n-1} - I_n)}$$

4- حساب القرض المدفوع عند دفع دفعة ما

إن المبلغ المدفوع من القرض ويرمز له بالرمز V_m هو مجموع الإهتلاكات التي تكون هذا القرض من الفترة الأولى حتى الفترة m كمايلي:

$$V_m = D_1 \frac{(1+i)^m - 1}{i}$$

ومن علاقة أصل القرض والإهتلاك وهي:

$$V_0 = D_1 \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$D_1 = V_0 \frac{i}{(1+i)^n - 1}$$

بتعويض قيمة D_1 في قانون حساب القرض المدفوع نجد:

$$V_m = V_0 \frac{i}{(1+i)^n - 1} \times \frac{(1+i)^m - 1}{i}$$

$$V_m = V_0 \frac{(1+i)^m - 1}{(1+i)^n - 1}$$

مثال:

من المثال السابق أحسب المبلغ المدفوع بعد الدفعة الرابعة؟

$$V_m = D_1 \frac{(1+i)^m - 1}{i} = 354793 \frac{(1.06)^4 - 1}{0.06} \simeq 1552083DA$$

وكذلك:

$$V_m = V_0 \frac{(1+i)^m - 1}{(1+i)^n - 1} = 2000000 \frac{(1.06)^4 - 1}{(1.06)^5 - 1} \simeq 1552083DA$$

5- حساب المبلغ المتبقي بعد دفع دفعة ما

من الجدول الخاص باهتلاك القرض، فإن المبلغ المتبقي يساوي، أصل القرض مطروحا منه قيمة المبلغ المدفوع وعليه:

$$V_{nr} = V_0 - V_m$$

وبتعويض قيمة V_m في العبارة السابقة نجد:

$$V_{nr}=V_0-V_0\frac{(1+i)^m-1}{(1+i)^n-1}$$

نضرب V_0 ونقسمه على المقدار $(1+i)^n-1$ ينتج:

$$V_{nr}=V_0\left[\frac{\left[(1+i)^n-1\right]-\left[(1+i)^m-1\right]}{(1+i)^n-1}\right]$$

$$V_{nr}=V_0\left[\frac{\left[(1+i)^n-1\right]-\left[(1+i)^m-1\right]}{(1+i)^n-1}\right]$$

$$V_{nr}=V_0\left[\frac{(1+i)^n-(1+i)^m}{(1+i)^n-1}\right]$$

كما يمكننا حساب المبلغ المتبقي باستخدام الدفعات كمايلي:

$$V_{nr}=a\frac{1-(1+i)^{m-n}}{i}$$

مثال:

من المثال السابق أحسب المبلغ المتبقي بعد تسديد الدفعة الثانية؟

$$V_{nr}=2000000\left[\frac{(1.06)^5-(1.06)^2}{(1.06)^5-1}\right]$$

$$V_{nr}\simeq 1269127DA$$

وأيضا:

$$V_{nr}=474793\frac{1-(1.06)^{2-5}}{0.06}$$

$$V_{nr}\simeq 1269127$$

ثالثا: استهلاك القروض على دفعات متغيرة واهتلاكات متساوية(ثابتة)

حيث يتم تسديد الدين حسب هذه الطريقة بصورة دورية، بدفعات متغيرة تتألف كل دفعة من جزئين، الأول ثابت أو متساوي من أصل القرض(اهتلاك) والآخر يمثل الفائدة على القرض المتبقي، ويحسب قيمة الإهتلاك الثابت مباشرة بقسمة قيمة أصل القرض على عدد الدفعات، وبناء عليه يكون:

$$D=\frac{V_0}{n}$$

1- جدول استهلاك القرض

يكون جدول استهلاك القرض بنفس الطريقة التي شكل بها جدول استهلاك القرض بالدفعات الثابتة.

أصل القرض في نهاية الفترة	الدفعة	الإهتلاك	الفائدة	أصل القرض في بداية الفترة	الفترات
$V_1 = V_0 - D$	$a_1 = D + I_1$	D	$I_1 = V_0 i$	V_0	**1**
$V_2 = V_1 - D$	$a_2 = D + I_2$	D	$I_2 = V_1 i$	V_1	**2**
$V_3 = V_2 - D$	$a_3 = D + I_3$	D	$I_3 = V_2 i$	V_2	**3**
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
$V_{n-1} = V_{n-2} - D$	$a_{n-1} = D + I_{n-1}$	D	$I_{n-1} = V_{n-2} i$	V_{n-2}	***n-1***
$V_n = V_{n-1} - D = 0$	$a_n = D + I_n$	D	$I_n = V_{n-1} i$	V_{n-1}	***n***
		$nD = V_0$	مجموع الفوائد		

مثال:

اقترض شخص مبلغ $DA12000$ لمدة أربع سنوات، بمعدل فائدة مركبة 6% سنويا، مع العلم أن الإهتلاكات ثابتة.

المطلوب: تنظيم جدول الإهتلاك؟

الحل:

$$D = \frac{V_0}{n} = \frac{12000}{4} = 3000DA$$

أصل القرض في نهاية الفترة	الدفعة	الإهتلاك	الفائدة	أصل القرض في بداية الفترة	الفترات
9000	3720	3000	720	12000	**1**
6000	3540	3000	540	9000	**2**
3000	3360	3000	360	6000	**3**
0	3180	3000	180	3000	**4**
	13800		1800		

2- مختلف العلاقات بين عناصر الجدول

ا- العلاقة بين الدفعات

لدينا:

$$a_1 = D + V_0 i$$
$$a_2 = D + (V_0 - D)i$$
$$a_3 = D + (V_0 - 2D)i$$
$$a_4 = D + (V_0 - 3D)i$$

وهكذا حتى الدفعة الأخيرة

$$a_n = D + \left[V_0 - (n-1)D\right]i$$
$$a_n = D + Di$$

حيث: $V_0 - (n-1)D = D$

$$a_n = D(1+i)$$

مما سبق ذكره نلاحظ أن قيم الدفعات تشكل فيما بينها حدود متتالية حسابية متناقصة، أساسها يساوي الفرق بين كل دفعتين متتاليتين أي أن:

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = ... = a_n - a_{n-1}$$

وبتعويض كل دفعة بما يساويها نجد:

$$a_n - a_{n-1} = D + \left[V_0 - (n-1)D\right]i - \left[D + \left[V_0 - (n-2)D\right]i\right]$$
$$a_n - a_{n-1} = D + V_0 i - nDi + Di - D - V_0 i + nDi - 2Di$$
$$a_n - a_{n-1} = -Di$$
$$a_n = a_{n-1} - Di$$
$$a_n = a_{n-1} - \frac{V_0}{n} i$$

ب- مجموع الدفعات

يمكن حساب ذلك بالإستفادة من خصائص المتتالية الحسابية كمايلي:

$$\sum_{i=1}^{n} a_n = \frac{n}{2}\left[a_1 + a_n\right]$$
$$\sum_{i=1}^{n} a_n = \frac{n}{2}\left[a_1 + a_1 + (n-1)(-Di)\right]$$
$$\sum_{i=1}^{n} a_n = \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)(-Di)\right]$$

مثال:

من المثال السابق احسب مجموع الدفعات؟

$$\sum_{i=1}^{n} a_n = \frac{4}{2}\left[3720 + 3180\right]$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_n = 13800DA$$

ج- العلاقة بين الدفعات والفوائد

$$a_{n-1} - a_n = I_{n-1} - I_n$$

مثال:

من المثال السابق إذا كان **m=3 :**

$$a_2 - a_3 = 3540 - 3360 = 180DA$$

$$I_2 - I_3 = 540 - 360 = 180DA$$

وبالتالي:

$$a_2 - a_3 = I_2 - I_3$$

د- مجموع الفوائد المدفوعة

$$\sum_{i=1}^{n} I_n = \frac{n}{2}\left(I_1 + I_n\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n} I_n = \frac{n}{2}\left(V_0 i + \frac{V_0 i}{n}\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n} I_n = \frac{V_0 i\left(n+1\right)}{2}$$

مثال:

من المثال السابق ،احسب مجموع الفوائد ؟

$$\sum_{i=1}^{n} I_n = \frac{12000 \times 0.06 \times 5}{2} = 1800DA$$

ه- فائدة الفترة

تحسب كما يلي:

$$I_m = V_0 i - \frac{(m-1)V_0 i}{n}$$

$$I_m = \frac{V_0 i}{n}\left[n - \left(m-1\right)\right]$$

مثال:

من المثال السابق ،احسب فائدة السنة الثانية؟

$$I_2 = \frac{12000 \times 0.06}{4}\left[4-(2-1)\right]$$

$$I_2 = 540DA$$

➢ قائمة المراجع:

أولا: باللغة العربية

1- بن طلحة صليحة، **الرياضيات المالية**، منشورات الدار الجزائرية، الطبعة الأولى، الجزائر، 2015.

2- بودرامة مصطفى، **الرياضيات المالية**، دار البدر للنشر والتوزيع، الجزائر، 2005.

3- خرخاش سامية، **محاضرات في الرياضيات المالية**، مطبوعة غير منشورة، جامعة محمد بوضياف بالمسيلة، الجزائر، 2016/2015.

4- شقيري موسى وآخرون، **الرياضيات المالية**، دار المسيرة للنشر والتوزيع، الطبعة الثانية، عمان، 2011.

5- عمر عبد الجواد عبد العزيز، **الرياضيات المالية (فائدة بسيطة وفائدة مركبة)**، دار الصفاء للنشر والتوزيع، الطبعة الأولى، عمان، 1999.

6- عدنان كريم نجم الدين، **الرياضيات المالية**، الأكاديميون للنشر والتوزيع، الطبعة الأولى، عمان، 2013.

7- كتاب **الرياضيات المالية والإقتصادية** ، متوفر على الموقع https://www.alfreed-ph.com/2018/02/Financial-and-Economic-Mathematics-pdf7.html

8- لقليطي الأخضر، **محاضرات في الرياضيات المالية**، مطبوعة غير منشورة، جامعة محمد بوضياف بالمسيلة، الجزائر، 2017/2016.

9- منصر إلياس، **محاضرات في الرياضيات المالية**، مطبوعة غير منشورة، جامعة آكلي محمد أولحاج بالبويرة، الجزائر، 2016/2015.

ثانيا: باللغة الفرنسية

10- Abdelatif Sadiki et Nadjib Mikou, **mathématique financière**, édition savoir plus ,Casa Blanca ; Maroc 2013.

11- Hmet Joanne, **mathématique financière**, collection e- thèque, Édition électronique, paris 2003.

12- Posière Jean Pierre, **mathématique appliquée a la gestion**, collection les zooms, Gualino Editeur, EJA, Paris, 2005.

13- Marie Boissonnade et Daniel Fredon, **mathématique financière**, 2eme édition, Dunod, Paris, 2002.

14- Walder Masieri , **mathématique financière**, éditions Dalloz, Paris, 2001.