

# **CHAPITRE 5**

---

## **Treillis hyperstatiques**

## 5.1. Définition d'un treillis :

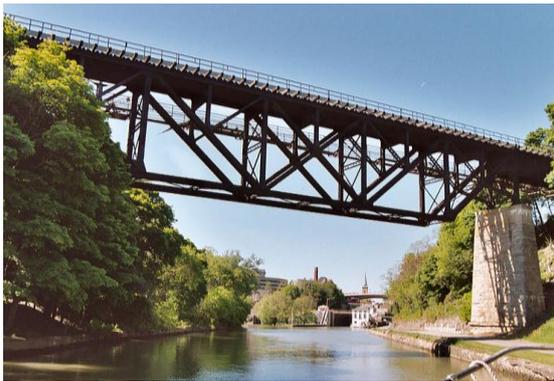
Un treillis, ou système triangulé, est un assemblage d'éléments en forme de barres verticales, horizontales ou inclinées formant des triangles, de sorte que chaque barre subisse un effort acceptable, et que la déformation de l'ensemble soit modérée.

Cette structure est devenue courante en construction métallique à partir de la révolution industrielle, pour des ponts, avions... En effet, un tel assemblage allie résistance, rigidité et légèreté, et permet d'utiliser des éléments normalisés (barres) ; par ailleurs, le treillis peut éventuellement être pré-assemblé.

Lorsqu'un treillis est soumis à un effort, certaines parties de l'assemblage sont mises en compression et d'autres parties en traction.

Les axes des barres concourent en nœuds ; ce sont les points d'assemblage des barres. D'un point de vue mécanique, les nœuds sont modélisés par des articulations parfaites. Initialement, pour simplifier les calculs, les charges n'étaient appliquées qu'aux seuls nœuds.

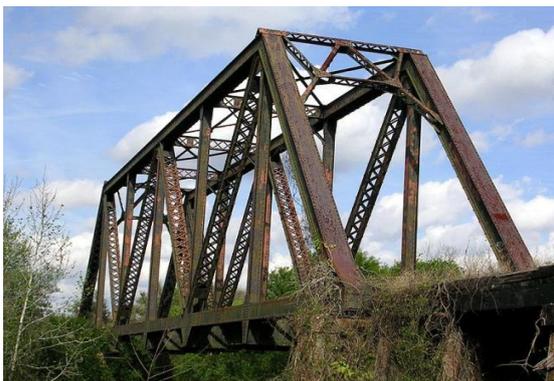
## 5.2. Exemples de structures en treillis :



Pont à tablier supérieur, sur le Canal Erié



Pont à quatre travées à treillis traversé du pont du Général Hertzog sur le fleuve Orange à Aliwal North.



Pont à treillis de type Warren de la ligne ferroviaire « Seaboard Air Line Railway », situé près du village de Willow, Floride.



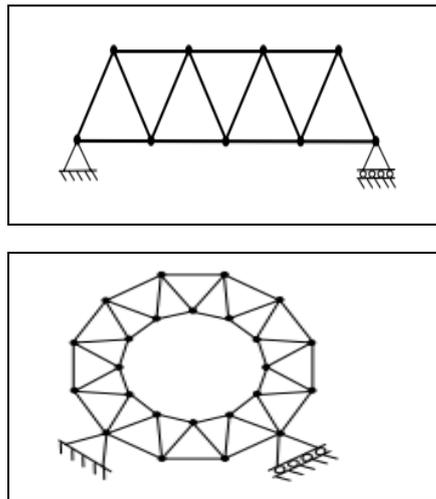
Pont Bailey sur la Meurthe, France. Pont provisoire en treillis, permettant une mise en place très rapide

**Figure 5.1. :** Exemples de structures en treillis

### 5.3. Différentes catégories de treillis :

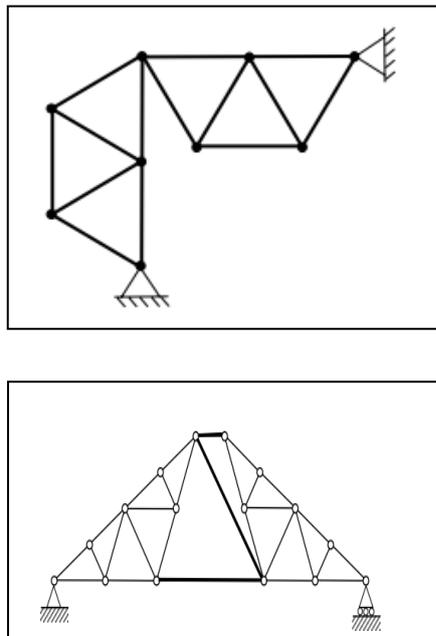
Il existe trois grandes catégories de treillis plans : le treillis simple, le treillis composé et le treillis formé de barres qui se chevauchent.

- Le treillis simple est formé uniquement de mailles triangulaires :  
Si le nombre de réactions d'appui ne dépasse pas trois, ce type de treillis est le plus souvent isostatique. Il existe toutefois des exceptions comme le montre la figure 5.2 : il s'agit d'un treillis simple qui se referme sur lui-même et dont le degré d'hyperstaticité interne est égal à 3.



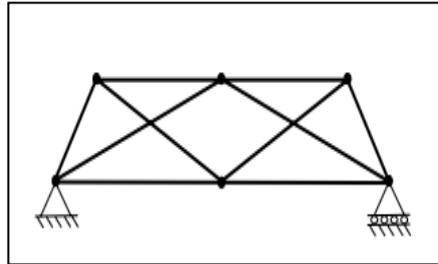
**Figure 5.2. :** Les Treillis simples

- Le treillis composé résulte de l'assemblage de treillis simples.



**Figure 5.3. :** Les treillis composés

- Le treillis formé de barres qui se chevauchent sans être reliées physiquement.



**Figure 5.4. :** Le treillis formé de barres qui se chevauchent

## 5.4. Hypothèses de calcul d'un treillis :

Le calcul des treillis ou structures est une application de la mécanique statique. Pour pouvoir calculer la structure comme un treillis, certaines hypothèses sont posées :

- les articulations entre barres sont considérées comme parfaites ;
- les charges sont appliquées au nœud ;
- les axes des barres doivent concourir aux nœuds

## 5.5. Différents systèmes de Treillis :

Un treillis peut être isostatique ou hyperstatique.

### 5.5.1. Treillis isostatiques

Un treillis isostatique est à la fois extérieurement et intérieurement isostatique. Il est extérieurement isostatique si ses liaisons sont telles que l'ensemble des réactions d'appui sont déterminables à partir des seules équations d'équilibre global de la structure. Un treillis est dit intérieurement isostatique si, les réactions étant supposées connues, les efforts dans toutes les barres du treillis sont déterminables par les méthodes élémentaires de la statique (méthode des nœuds et des sections).

### 5.5.2. Treillis hyperstatiques

L'hyperstaticité d'un treillis plan peut être sous trois formes **(a)** une hyperstaticité extérieure, **(b)** une hyperstaticité intérieure ou **(c)** une hyperstaticité à la fois extérieure et intérieure.

#### 5.5.2.1. Efforts intérieurs :

La détermination des efforts intérieurs dans un treillis hyperstatique est illustrée ci-après pour les différentes formes d'hyperstaticité.

### A- Treillis hyperstatique extérieure

Soit le treillis plan de la Figure 5.5. Il y a deux réactions en chacun des deux appuis alors qu'on ne dispose que de 3 équations d'équilibre global ( $d=4-3=1$ ). Ce degré d'hyperstaticité est de forme extérieure.

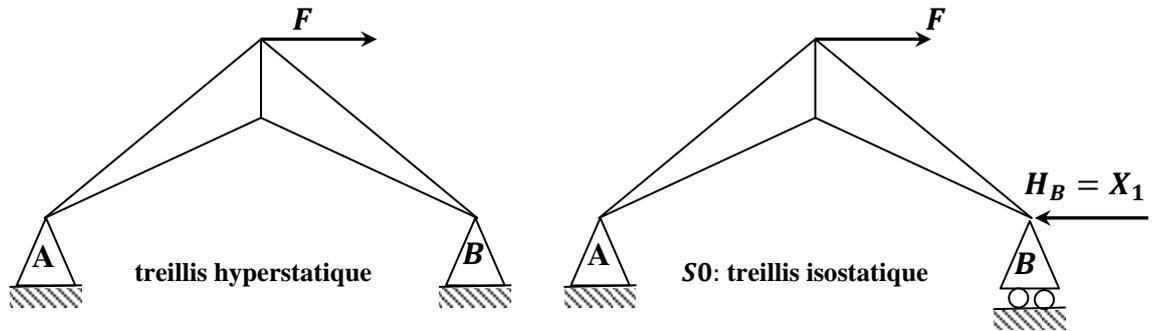


Figure 5.5. : Treillis plan extérieurement une fois hyperstatique

On choisit la poussée  $H_B$  (réaction horizontale au point B) à l'appui de droite comme inconnue hyperstatique  $H_B = X_1$  ; on obtient un système de base à partir duquel on posant  $X_1 = 0$ , on obtient le système isostatique avec les charges réelles appelé état 0.

Puis on crée toujours à partir du système de base un autre système virtuel on éliminant les charges extérieures et on prenant uniquement l'inconnue  $X_1 = 1$  appelé état 1.

L'équation canonique est réduite à :

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{10} = 0 \quad (5.1)$$

où :

$\delta_{11}$  : représente le déplacement horizontale à l'appui B du à la force  $X_1 = 1$  (état 1)

$\delta_{10}$  : Représente le déplacement horizontale à l'appui B dues aux forces extérieures réelles (état 0)

$$\delta_{11} = \sum_{i=1}^n \frac{n_{i,1}^2}{E_i A_i} L_i \quad (5.2)$$

$$\delta_{10} = \sum_{i=1}^n \frac{n_{i,1} N_{i,0}}{E_i A_i} L_i \quad (5.3)$$

où :

- $n_{i,1}$  représente l'effort normal dans chaque barre du système dit état 1.

- $N_{i,0}$  représente l'effort normal dans chaque barre du système isostatique sous l'effet des forces extérieures dit état 0.

A partir de là, on peut déduire la valeur de l'inconnue hyperstatique  $H_B$  :

$$X_1 = H_B = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} \quad (5.4)$$

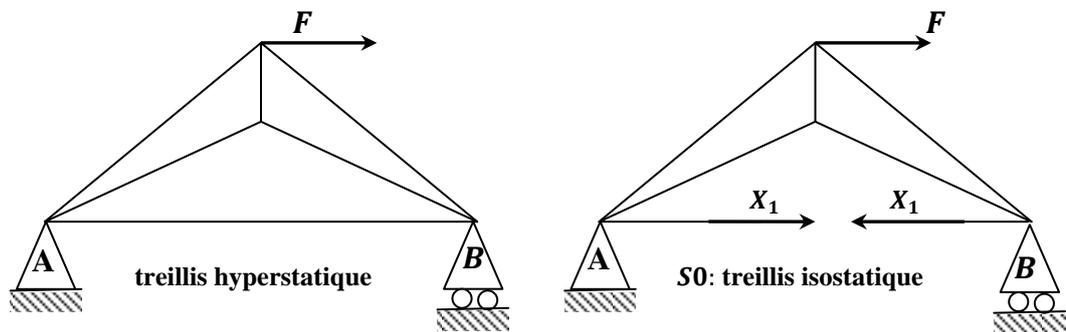
Lorsque la valeur de  $H_B$  est connue, les efforts dans les barres du treillis hyperstatique réel seront calculé à l'aide du principe de superposition, c'est-à-dire :

$$N_i = N_{i,0} + H_B n_{i,1} \quad (5.5)$$

### B- Treillis hyperstatique intérieure

Soit le treillis plan de la Figure 5.6 où on change l'appui B (doubles réactions) par un appui simple avec une seule réaction et on ajoute une autre barre entre A et B. On recalcul le degré d'hyperstaticité et il est toujours égal à 1 mais de forme intérieure.

On peut dire qu'il est isostatique extérieurement (3 réactions extérieures – 3 équations d'équilibre = 0).



**Figure 5.6. :** Treillis hyperstatique intérieure

On choisit l'effort normal du tirant AB comme inconnue hyperstatique égale à  $X_1$  ; on obtient un système de base à partir duquel en posant  $X_1 = 0$ , on aura le système isostatique avec les charges extérieures réelles appelé état 0.

Puis on crée toujours à partir du système de base un autre système virtuel en éliminant les charges extérieures et on prenant uniquement l'inconnue  $X_1 = 1$  appelé état 1.

L'équation canonique et les expressions des coefficients de flexibilité  $\delta_{11}$  et  $\delta_{10}$  sont identiques à celles écrite en (5.2) et (5.3).

Et on en déduira l'inconnue  $X_1$  qui est l'effort normal dans la barre AB :

$$X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} \quad (5.6)$$

Lorsque la valeur de  $X_1$  est connue, les efforts dans le treillis hyperstatique concerné s'obtiennent par le principe de superposition selon :

$$N_i = N_{i,0} + X_1 n_{i,1} \quad (5.7)$$