**جامعة العربي بن مهيدي بأم البواقي**

**كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير**

**قسم علوم التسيير**

# ملخصات مقياس الرياضيات المالية: لطلبة السنة الثانية "LMD" (د/خالدي فراح)

## ملخصات: الفوائد المركبة – الرسملة – الاستحداث- المعدلات المتكافئة والمتناسبة والدفعات العادية والغيرعادية

## المصادروالمراجع المعتمدة:


1- باديس بوعزة، **المدخل إلى الرياضيات المالية**، دار الهدى للنشر،الجزائر، 2012.

2-قنان إبراهيم، **الرياضيات المالية: دروس وتمارين**، "pages bleues" للطبع،الجزائر، 2016..

3- زعيبط نور الدين، **محاضرات في الرياضيات المالية**، دار الفجر للطباعة والنشر،دون سنة النشر،الجزائر.

4- مصطفى بودرامة، **الرياضيات المالية**، البدر للنشر والتوزيع، سطيف، 2005.

5- عمر عبد الجواد عبد العزيز، **الرياضيات المالية**، دار صفاء للنشر والتوزيع، 1999.

6- نصر دادي عدون، **تقنيات مراقبة التسيير (الرياضيات المالية)**، الدار المحمدية، الجزائر، دون سنة النشر.

## الفائدة المركبة – الرسملة - الاستحداث

سبق وأن بينا في المحور الأول الفرق بين الفائدة البسيطة والفائدة المركبة، بحيث عرفنا الفائدة البسيطة أن تحسب ولا تضاف إلى المبلغ الأصلي (رأس المال)، بل تدفع لمستحقها في نهاية مدة التوظيف (الجملة)، ولا تحسب على الفائدة أي فائدة أخرى.أما الفائدة المركبة فتحسب كل فترة زمنية، وتضاف إلى رأس المال في ليحسب على مجموعها فائدة السنة التالية وفق معدل الفائدة المقرر لذلك، بمعنى آخر ان الفائدة المركبة لفترة زمنية معينة تحسب على أساس المبلغ الأصلي مضافًا إليها الفوائد المترتبة عن الفترات السابقة.

- مفهوم الفائدة المركبة: من خلال ما سبق ذكره فالفائدة المركبة تقوم على أساس رسملة الفوائد و هذا يعني أننا في نهاية كل وحدة زمنية نحسب فوائدها، ونضيفها إل المبلغ في بداية المدة لتشكل مبلغًا جديدا، يكون أساس احتساب الفوائد للفترة الموالية.

**مثال:** في بداية السنة تم اقتراض مبلغ 1000 دج، من أحد البنوك بمعدل فائدة 10%.

الفوائد المترتبة على هذا المبلغ في نهاية السنة:

$$i = 1000 \times t = 1000 \times 0.1 = 100 \text{ دج}$$

في بداية السنة الثانية يكون مبلغ الجديد مساويًا للمبلغ الأصلي مضافًا اليه فائدة السنة الأولى

أي 1000 + 100 = 1100 دج

في بداية السنة يكون المبلغ الجديد مساويًا للمبلغ الأصلي مضافًا إليه فائدة السنة الأولى

أي 1000+ 100 = 1100 دج

وهذا المبلغ هو أساس احتساب فائدة السنة الثانية حيث:

$$i = 1100 \times t = 1100 \times 0{,}1 = 110 \text{ دج}$$

وفي بداية السنة الثالثة يصبح المبلغ مساويًا للمبلغ الموظف في بداية السنة الثانية مضافًا إليه فائدة تلك السنة:

أي: $1100 + 110 = 1210$ دج

- **قانون الفائدة المركبة**: قبل أن نستنتج قانون الفائدة المركبة يتعين الإشارة إلى أهم عناصر، ومحددات الفائدة المركبة حيث تتحدد قيمة الفائدة المركبة بنفس محددات الفائدة البسيطة وهي:

C: المبلغ الاصلي وهو أصل الدين والمبلغ الموظف،t :معدل الفائدة، وهو نسبة مئوية تغطى في الغالب على أساس سنوي،n : ويمثل عدد الفترات الزمنية التي يسدد في نهايتها الأصل المبلغ فوائده.

من خلال التوضيحات أعلاه يمكننا أن نستنتج قانون الفائدة المركبة ابتداء من احتساب فائدة السنة الأولى، والسنوات التي تليها إلى غاية السنة n، والجدول التالي يلخص ذلك:

| القيمة المحصلة (الجملة المكتسبة في نهاية | الفوائد في نهاية كل | رأس المال في بداية كل | السنة |
|---|---|---|---|

| | سنة | سنة | كل سنة) | |
|---|---|---|---|---|
| **1** | **C** | **c×t** | **C+i=c+c×t** | **= C(1+t)** |
| **2** | **C(1+t)** | **C(1+t)×t** | **C(1+t)+C (1+t)×t** | **$= C(1+t)^2$** |
| **3** | **$C(1+t)^2$** | **$C(1+t)^2\times t$** | **$C(1+t)^2+C(1+t)^2\times t$** | **$= C(1+t)^3$** |
| **............ ........** | | | | |
| **............ ........** | | | | |
| **n-1** | **$c\ (1+t)^{n-2}$** | **$c\ (1+t)^{n-2}\times t$** | **$c\ (1+t)^{n-2}+c(1+t)^{n-1}\times t$** | **$c(1+t)^{n-1}$** |
| **n** | **$C(1+T)^{n-1}$** | **$C(1+t)^{n-1}\times t$** | **$C(1+t)^{n-1} + c(1+^{n-1}\times t$** | **$c(1+t)^n$** |

$$= c((1+t)^{n-2}) \times (1+t),$$
$$= c(1+t)^{n-1}(1+t)$$

من خلال الجدول نجد أن الجملة المكتسبة (المحصلة) "A" عند توظيف مبلغ "C" بعد عدد من الفترات الزمنية "n" بمعدل فائدة مركبة "t" عند كل وحدة زمنية، تحسب وفق العلاقة التالية:

$$\boldsymbol{A = C(1+t)^n}$$

**مثال:** أحسب جملة مبلغ 1500 دج وظف بمعدل فائدة 8%سنويا لمدة خمس سنوات.

$$A = C(1+t)^n = 1500(1+0,08)^5$$
$$= 2204 \text{ دج}$$

**مثال:** أحسب جملة مبلغ 2000 دج وظف بمعدل نصف سنوي 3% وبرسملة نصف سنوية لمدة 4 سنوات.

$$A = C(1+t)^n = 2000(1+0,03)^8$$
$$= 2000(1,26677) = 2533,54 \text{ دج}$$

**ملاحظات هامة:**

- إن العلاقة السابقة لحساب الجملة المحصلة تقتضي تطابق معدل الفائدة مع مدة الرسملة، فإذا كانت الفترات السنوية لا بد أن يكون معدل الفائدة المركبة سنويًا، وإذا تم الاتفاق على رسملة الفوائد شهريًا أو سداسيًا وجب أن يكون معدل الفائدة المركبة متطابقًا مع الفترة؛

- يوضح الجدول أن فوائد السنوات المتتالية، وأيضا القيم المحصلة في نهاية السنوات المتتالية تشكل ممتالية c, !:;هندسية أساسها (1+t).

- قانون الفائدة المركبة لا يمدنا قيمة الفائدة مباشرة بخلاف قانون الفائدة البسيطة لذا يتعين لمعرفة قيمة الفائدة المركبة أن نطرح أصل القرض من جملته كما يلي: $i = C[((1+t)^n - 1)]$

**مثال**: أحسب الفائدة الناتجة عن توظيف مبلغ 1200 دج لمدة ثلاث سنوات بمعدل فائدة مركبة 6%.

$$i = C[((1+t)^n - 1)] = 1200[(1,O6)^3 - 1] = 229,21$$

- عمليات على قانون الفائدة المركبة:

أ- **حساب المبلغ الأصلي "C"**: يمكن حساب المبلغ الأصلي بدلالة الجملة المكتسبة "A" كما يلي:

$$A = C(1+t)^n \leftrightarrow C = \frac{A}{(1+t)^n} = A(1+t)^{-n}$$

وهي العلاقة نفسها علاقة القيمة الحالية لمبلغ مستقبلي في الوقت الحاضر، كما يمكن حسابه بدلالة علاقة الفائدة كما يلي: $C = \frac{i}{(1+t)^n - 1}$، وتعرف هذه العملية بعملية **الاستحداث** وهي عملية عكسية للرسملة، ونعني بها حساب القيمة الحالية لمبلغ يدفع مستقبلا، بمعنى آخر القيمة الحالية هي المبلغ الذي يجب توظيفه الآن بفائدة مركبة للحصول على مبلغ آخر بعد "n" مدة.

**مثال:** اقترض شخص مبلغ ما لمدة 5 سنوات بمعدل فائدة مركبة 7%، فدفع في نهاية مدة القرض فوائد بقيمة 724.59 دج. أخسب مدة القرض؟

$$c = \frac{i}{(1+t)^n - 1} = \frac{724,59}{(1,07)^5 - 1} = \frac{724.59}{0,40255} = 1800_{\text{دج}}$$

**مثال**: قمنا باستثمار مبلغ 1 وكانت التدفقات النقدية السنوية التقديرية كما يلي:

| السنة | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| **التدفقات النقدية التقديرية** | **50000** | **100000** | **200000** | **400000** | **500000** |

بمعدل9%، هل الاستثمار ذو مردودية أم لا؟

| السنة | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| **التدفقات النقدية التقديرية (دج)** | **50000** | **100000** | **200000** | **400000** | **500000** |
| **معامل الاستحداث أو** | **$(1.09)^{-1}$** | **$(1.09)^{-2}$** | **$(1.09)^{-3}$** | **$(1.09)^{-4}$** | **$(1.09)^{-5}$** |
| **القيمة الحالية** | **O.91744311** | **O.8416799** | **O.77218348** | **O.70842521** | **O.64993138** |
| **القيمة الحالية (دج)** | **45871.56** | **84167.99** | **154436.70** | **283370.08** | **324965.69** |
| **القيمة الحالية** | **--** | **130039.55** | **284476.25** | **567846.33** | **892812.O2** |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | **المتر كمة (دج)** |

مردودية هذا الاستثمار غير كافية حيث نتحصل في نهاية السنة الخامسة على مبلغ 892812.02 دج مقابل استثمار قدره 1000000 دج.

-حساب المعدل t: يمكن حسابه باعتماد العلاقات التالية:

$$A = c(1+t)^n \rightarrow \frac{A}{c} = (1+t)^n \quad -$$

$(1+t) = \sqrt[n]{\frac{A}{C}}$ ، ومنه $t = \sqrt[n]{\frac{A}{C}} - 1$ ، وإذا استعملنا قانون الفائدة يكون:

$$t = \sqrt[n]{\frac{c+i}{c}} - 1$$

**مثال:** أحسب معدل الفائدة المركبة السنوي الذي وظف على أساسه مبلغ 1000 دج لمدة 5 سنوات، فأنتج في نهاية المدة فائدة قدرها 610.51 دج

$$t = \sqrt[5]{\frac{c+i}{\mathrm{c}}} - 1 = \sqrt[5]{\frac{610 \cdot 51}{1000}} - 1 = \sqrt[5]{1 \cdot 61051} - 1 = 1 \cdot 1 - 1 = \mathrm{o} \cdot 1$$

$$t = 10\%$$

- حساب المدة "n" : $A = C(1+t)^n \leftarrow \frac{A}{C} = (1+t)^n$ بعد إدخال اللوغاريتم نتحصل على:

$$\log\left(\frac{A}{C}\right) = n\log(1+t)$$

$$n = \frac{\log\left(\frac{A}{C}\right)}{\log(1+t)}$$

**مثال:** أحسب المدة التي وظف بها المبلغ قدره 2500 دج بمعدل فائدة مركبة 6,5 % سنويا، فأنتج جملة قدرها 4406.42 دج

$$n = \frac{\log\left(\frac{A}{C}\right)}{\log(1+t)} = \frac{\log\left(\frac{4406.42}{2500}\right)}{\log(1+0.065)} = \frac{\log(1.762568)}{\log(1.065)} = 9\text{سنوات}$$

## المعادلات المتناسبة والمعدلات المتكافئة

معدل الفائدة غالبا ما يحدد سنويًا، ولكن من الممكن أن تطبق معدلات الفائدة يوميًا أو شهريًا أو فصليًا أو سداسيًا

**- المعدلات المتناسبة:** يكون المعدل K متناسبًا مع المعدل السنوي t، وإذا كان حاصل قسمة المعدل السنوي على عدد مرات الرسملة K يساوي المعدل $t_{\mathrm{k}}$ حيث يحسب المعدل المتناسب وفق العلاقة التالية:

حيث: $t_k = \frac{t}{k}$ ، حيث k: تمثل عدد مرات التوظيف خلال السنة الواحدة.

مثلاً: المعدل 12% تقابله المعدلات المتناسبة التالية:

المعدل السداسي : $\mathrm{t_k} = t_2 = \frac{12\%}{2} = 6\%$

المعجل الثلاثي: $\mathrm{t_k} = t_4 = \frac{12\%}{4} = 3\%$

المعدل الشهري: $\mathrm{t_k} = t_{12} = \frac{12\%}{12} = 1\%$

**- المعدلات المتكافئة:** المعدلات المتكافئة أو المعادلة هي عكس المعدلات المتناسبة، إذ تؤدي إلى نفس الجملة بنفس المدة، فنقول أن معدلين أنهما متكافئان إذا اختلف ا في قيمتيهما وفي فترة رسملتهما، لكنها نتيجتان نفس الجملة المكتسبة لأي فترة زمنية مشتركة محددة. فالمعدل السنوي t الخاص برسملة يكون مكافئ $t_2$ لمعدل سداسي برسملة نصف سنوية إذا أنتجا نفس الجملة لنفس المدة.

ويمكن استنتاج الصيغة العامة للمعدل المكافئ كما يلي:

$$c(1+t)^n = c(1+tk)^{nk}$$

حيث : $t_{\mathrm{k}}$معدل التوظيف لمدة أقل من سنة

$n \times k$: عدد فترات التوظيف (الرسملة)

من خلال العلاقة السابقة يمكن استخلاص علاقة المعدل المكافئ $t_{\mathrm{k}}$ كما يلي: $t_k = (1+\mathrm{t})^{\frac{1}{\mathrm{k}}} - 1$

**مثال :** أحسب المعدل السداسي المكافئ للمعدل السنوي 8.5%

لدينا: $k = 2$

$$t_k = (1+t)^{\frac{1}{K}} - 1$$

$$t_2 = (1+0,085)^{\frac{1}{2}} - 1 = 0,041663$$

$$t_2 = 4 \cdot 1633\%$$

**مثال:** احسب المعدل الشهري المكافئ للمعدل السنوي 14%؟

لدينا: $k = 12$

$$t_k = (1+t)^{\frac{1}{k}} - 1$$

$$t_{12} \quad = (1+0\cdot 14)^{\frac{1}{12}} - 1 = 0\cdot 0109788$$

$$t_{12} = 1\cdot 09788\%$$

**مثال:** وظف مبلغ 1700 دج لمدة ثلاث سنوات بمعدل فائدة مركبة نصف سنوي، فكانت فوائده بعد نهاية مدة التوظيف 501.55 دج، أحسب المعدل السداسي والمعجل السنوي المكافئ له,

رسملة نصف سنوية تكون المدة $(K=2)$لدينا $n \times k = 3 \times 2 = 6$

$$i = 501\cdot 55$$

إنطلاقا من علاقة الفائدة يمكن إيجاد المعدل السداسي المطبق $t_2$

$$i = C(1+tk)^{nk} - C = C[(1+tk)^{nk} - 1]$$

$$501\cdot 55 = 1700[(1+t_2)^6 - 1]$$

$$\frac{501\cdot 55}{1700} = (1+\mathrm{t}_2)^6 - 1$$

$$o\cdot 2950294 = (1+t_2)^6 - 1$$

$$1{,}2950294 = (1+t_2)^6$$

$$(1+t_2) = \sqrt[6]{1\cdot 2950294}$$

$$t_2 = 4\cdot 403\%$$

المعدل السنوي المكافئ للمعدل السداسي نجده بتطبيق العلاقة التالية:

$$t_k = (1+\mathrm{t})^{\frac{1}{\mathrm{k}}} - 1 \rightarrow 0\cdot \mathrm{O}44\mathrm{O}3 = (1+\mathrm{t})^{\frac{1}{2}} - 1$$

$$1\cdot 04403 = (1+t)^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt[\frac{1}{2}]{1\cdot 044O3} = (1+t) \rightarrow 1\cdot 09 = (1+t)$$

$$t = 9\%$$

**الحالات الخاصة لإيجاد الجملة باستخدام الجداول المالية**

**- حالة عدم وجود المدة**

*** n عدد صحيح أكبر من 50**

إن أكبر قيمة للمدة n في الجدول المالي هي 50 سنة، وفي حالة تكون المدة عدد صحيح أكبر من 50 نقوم في هذه الحالة بقسمتها إلى أعداد صحيحة لا تتجاوز 50.

**مثال:** أحسب جملة مبلغ 1000 دج وظف لمدة 80 سنة بمعدل فائدة مركبة 10 % سنويا.

C = 1000 دج، t =10%، n = 80 سنة

-حساب الجملة:

$$A = C(1 + i)^n$$

$$A = 1000(1 + 0.1)^{80}$$

نلاحظ أن n=80 لا يوجد في الجدول المالي لذا نقوم بقسمتها إلى أعداد صحيحة مثلا 40، 40 كما يلي:

$$A = 1000(1 + 0.1)^{40}(1 + 0.1)^{40}$$

$$\mathrm{A} = 1000(45.259255)(45.259255)$$

$$\mathrm{A} = 90518.51\mathrm{DA}$$

***n عدد غير صحيح:**

**مثال:** أحسب جملة مبلغ 1000 دج وظف لمدة 4 سنوات و5 أشهر بمعدل فائدة مركبة 10 % سنويا.

C = 1000 دج، t =10%، n = 4 سنوات و5 أشهر ( 4+5/12)

-حساب الجملة:

$$A = C(1 + i)^n$$

$$A = 1000(1 + 0.1)^{4+5/12}$$

**الطريقة1:**

$$A = 1000(1 + 0.1)^{4+5/12} = 1000(1 + 0.1)^4(1 + 0.1)^{5/12}$$

القيمة $(1 + 0.1)^4$ نجدها في الجدول المالي رقم 01 تساوي 1.464100

القيمة $(1+0.1)^{5/12}$ نجدها في الجدول المالي رقم 06 المخصص للأشهر تساوي 1.04051

إذن:

$$A = 1000(1.464100)(1.04051)$$

$$A = 1523.41DA$$

**الطريقة 2:** طريقة التناسب باستعمال الجدول المالي رقم 01 فقط

الملاحظ أن 4 سنوات و5 أشهر محصورة بين 4 سنوات و5 سنوات

$4<12/5+4<5$

من الجدول المالي رقم 01 نجد:

$$(1+0.1)^4 = 1.464100$$

$$(1+0.1)^5 = 1.610510$$

الفرق بين القيمتين( قيمة سنة) يساوي:

$$(1+0.1)^5 - (1+0.1)^4 = 1.610510 - 1.464100 = 0.14641$$

لدينا:

1سنة $\longrightarrow$ 0.14641

5/12 $\longrightarrow$ X

X= 0.14641*5/12=0.061004

$$A = 1000[(1.464100) + (0.061004)]$$

$$A = 1525.10DA$$

- **حالة وجود المدة وعدم وجود المعدل في الجدول المالي:** نستخدم طريقة التناسب

**مثال:** أحسب جملة مبلغ 1000 دج وظف لمدة 5 سنوات بمعدل فائدة مركبة 5.3 % سنويا.

C = 1000 دج، t =5.3%، n = 5 سنوات

-حساب الجملة:

$$A = \mathrm{C}(1+\mathrm{i})^{\mathrm{n}}$$

$$A = 1000(1+0.053)^{5}$$

بالرجوع إلى الجدول المالي رقم 01 نجد المعدل 5.3 % محصور بين المعدلين 5.25 % و 5.5%

جملة دينار واحد بمعدل 5.25% لمدة 5 سنوات هو:

$$(1+0.0525)^{5} = 1.291548$$

جملة دينار واحد بمعدل 5.5% لمدة 5 سنوات هو:

$$(1+0.055)^{5} = 1.306960$$

الفرق بين القيمتين يمثل جملة دينار واحد بمعدل 0.25% لمدة 5سنوات

$$(1+0.055)^{5} - (1+0.0525)^{5} = 1.306960 - 1.291548 = 0.015412$$

$$0.25 \longrightarrow 0.015412$$

$$0.05 \longrightarrow X$$

حيث تمثل 0.05 الفرق بين المعدل 5.3% والمعدل الأصغر بين المعدلين وهو 5.25%

X= 0.015412*0.05/0.25=0.0030824

$$\mathrm{A} = 1000[(1.291548) + (0.0030824)]$$

$$\mathrm{A} = 1294.63\mathrm{DA}$$

- **حالة عدم وجود المدة والمعدل في الجدول المالي:** نستخدم طريقة التناسب

**مثال:** أحسب جملة مبلغ 5000 دج وظف لمدة 5 سنوات و6 أشهر بمعدل فائدة مركبة 5.3 % سنويا.

C = 5000 دج، t=5.3%،n = 5 سنوات و6 أشهر

-حساب الجملة:

$$A = C(1+i)^n$$

$$A = 5000(1+0.053)^{5+6/12}$$

المعدل محصور بين المعدلين 5.25% و 5.5%

جملة دينار بمعدل 5.25% هي:

$$(1+0.0525)^{5+\frac{6}{12}} = (1+0.0525)^5\,(1+0.0525)^{\frac{6}{12}}$$
$$= (1.291548)(1.02592)$$

**=1.325024**

$$(1+0.055)^{5+\frac{6}{12}} = (1+0.055)^5\,(1+0.055)^{\frac{6}{12}}$$
$$= (1.306960)(1.02713)$$

**=1.342417**

الفرق بين القيمتين تمثل جملة دينار بمعدل 0.25%

1.342417-1.325024=0.01739

الفرق الذي يقابل معدل فائدة 0.05%( الفرق بين المعدل5.3% والمعدل الأصغر بين المعدلين وهو 5.25 % )، هو:

X= 0.01739*0.05/0.25=0.003478

إذن جملة مبلغ بعد 5 سنوات و6 أشهر بمعدل فائدة 5.3 % هي:

$$A = 5000[(1.325024) + (0.003478)]$$

$$A = 6642.51DA$$

**-جملة عدة مبالغ:**

كما رأينا في الفائدة البسيطة، ففي جملة عدة مبالغ نقوم بحساب جملة كل مبلغ على حدى ثم نجمعها، **أي**:

إذا كان لدينا المبالغ: $C_1, C_2, C_3, \ldots Cn$

فإن جملة هذه المبالغ هي: $A_1, A_2, A_3, \dots A_n$

إذن مجموع جملة هذه الجمل هي:

$$\boxed{\mathbf{A = A1 + A2 + A3 + \dots\dots\dots +}}\ \mathbf{An}$$

**مثال:** قام شخص بتوظيف المبالغ التالية في البنك:

10000 دج بتاريخ 2000/01/01

20000 دج بتاريخ 2001/01/01

30000 دج بتاريخ 2003/01/01

- ما هو رصيد هذا الشخص في نهاية سنة 2004 إذا علمت أن معدل الفائدة المركبة 10 % سنويا

$C_1 = 10000$ دج، $n1 = 5$ سنوات

$C_2 = 20000$ دج، $n2 = 4$ سنوات

$C_3 = 30000$ دج، $n3 =$ سنتين

$t = 10\%$

-حساب الجملة:

$$A = A1 + A2 + A3$$

$$A = C1(1+i)^{n1} + C2(1+i)^{n2} + C3(1+i)^{n3}$$

$$A = 10000(1+0.1)^5 + 20000(1+0.1)^4 + 30000(1+0.1)^2$$

$$\boxed{A = 81687.1^{\text{دج}}}$$

**- جملة الدفعات المتساوية بفائدة مركبة:**

يقصد بالدفعة مجموعة من المبالغ التي تدفع بصفة منتظمة خلال مدة زمنية فاصلة بين دفعة ودفعة منتظمة أيضا بمعدل فائدة ثابت، فإذا إختل شرط من هذه الشروط فإنه لا تصبح دفعات متساوية وإنما مجموعة مبالغ مدفوعة.

تنقسم الدفعات إلى عدة أنواع، منها:

***الدفعات العاجلة والدفعات المؤجلة**

الدفعات العاجلة: وهي الدفعات التي يبدأ فيها السداد من الفترة الزمنية الأولى من تاريخ اليوم.

الدفعات المؤجلة:هي الدفعات التي لا يبدأ فيها السداد إلا بعد مرور فترة زمنية معينة والتي تلي انقضاء فترة زمنية معينة تسمى هذه الفترة بفترة السماح أو التأجيل.

***الدفعات العادية والدفعات غير العادية**

الدفعات العادية: تسمى بدفعات نهاية المدة، تستعمل في عملية سداد القروض أو الديون، لذا تسمى بدفعات السداد أو الاستهلاك.

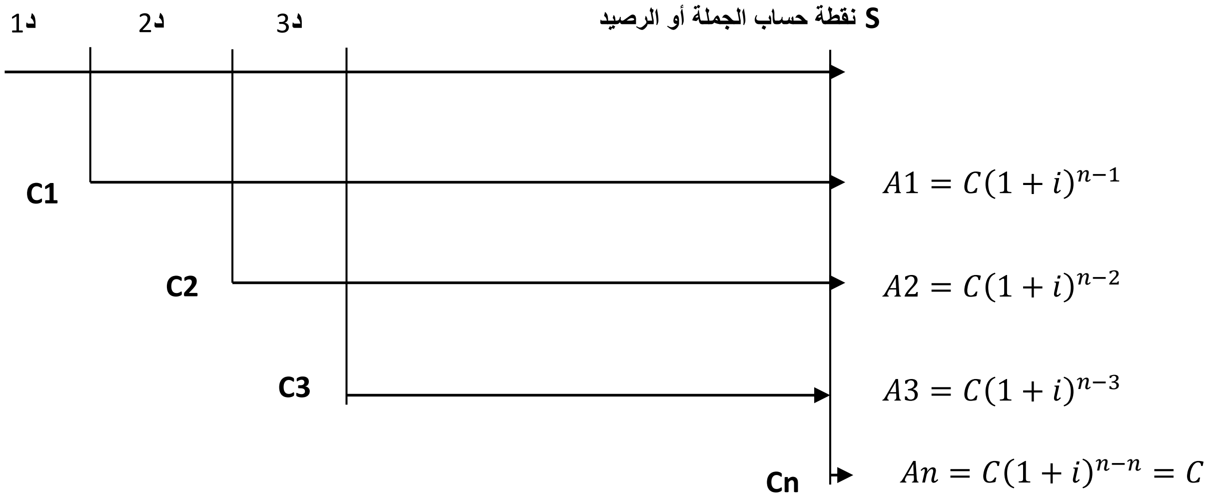
الدفعات غير العادية: تسمى بدفعات بداية المدة أو الفورية، تهدف إلى الاستثمار أو التوظيف، لذا تسمى بدفعات التوظيف.

وبالنظر إلى أنواع الدفعات حسب تاريخ دفعها نجد أن هناك دفعات تكون في بداية المدة وأخرى تدفع في نهايتها، كما أن هناك دفعات تكون أو تدفع بعد انقضاء مدة التأجيل وأخرى تدفع في بداية مدة التأجيل، **إذن** نلاحظ أن الدفعات العادية يمكن أن تكون عاجلة تدفع في وقتها أو مؤجلة تدفع بعد فترة السماح، كما أن الدفعات غير العادية يمكن أن تكون عاجلة أو مؤجلة.

**- جملة الدفعات العادية**

***جملة الدفعات العادية العاجلة**

تدفع مبالغ الدفعات العادية العاجلة في نهاية كل فترة زمنية معينة، وجملتها تساوي مجموع جملة مبالغها في نهاية المدة n من الفترات الزمنية.




نلاحظ من الشكل أن مبلغ الدفعة الأول يستثمر في نهاية الفترة الزمنية الأولى، حتى نهاية المدة أي حتى تاريخ حساب الجملة، أي لمدة n-1، وجملته تكون:

$$A_1 = C(1+i)^{n-1}$$

مبلغ الدفعة الثاني يستثمر في نهاية الفترة الزمنية الثانية، حتى نهاية المدة أي حتى تاريخ حساب الجملة، أي لمدة n-2، وجملته تكون:

$$A_2 = C(1+i)^{n-2}$$

أما مبلغ الدفعة الأخير فيتم سداده في نهاية المدة أي في نفس تاريخ حساب الجملة أو الرصيد بمعنى أنه لا يستثمر، أي n=0، وبالتالي قيمته تبقى كما هي C

وبالتالي جملة الدفعات العادية أو مجموع الجمل هي:

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots\ldots\ldots + A_n$$

**أي:**

$$A = C(1+i)^{n-1} + C(1+i)^{n-2} + C(1+i)^{n-3} + \cdots C$$

وبإعادة ترتيبها تصاعديا أين لا يؤثر على مجموعها فإن:

$$A = C + (1+\mathrm{i}) + \cdots + C(1+i)^{n-3} + C(1+i)^{n-2} + C(1+i)^{n-1}$$

نلاحظ أن عناصر هذه الجملة تكون متتالية هندسية، حدها الأول C، وأساسها $(1+t)$ وعدد حدودها n

وبما أن المتتالية الهندسية = الحد الأول * (الأساس) عدد الحدود- 1

الأساس - 1

فإن جملة دفعات نهاية المدة العاجلة تساوي:

$$\mathbf{A = C[\frac{(1+i)^n - 1}{i}]}$$

**حيث:**

C = مبلغ الدفعة الواحدة،

t =معدل الفائدة المركبة

n = عدد الدفعات أو عدد المرات

**والقيمة** $[\frac{(1+i)^n-1}{i}]$ تعطى من الجدول المالي رقم 03

**مثال:**أحسب جملة دفعات مبلغها الدوري 5000 دج تدفع في نهاية كل سنة لمدة 5 سنوات، بمعدل فائدة مركبة 5% سنويا.

**الحل:** C = 5000 دج، t =5% سنوي، n = المبالغ تدفع سنويا لمدة 5 سنوات إذن لدينا 5 دفعات( 5 مرات يدفع المبلغ)

-حساب الجملة:

$$A = C[\frac{(1+i)^n - 1}{i}]$$

$$A = 5000[\frac{(1+0.05)^5 - 1}{0.05}]$$

من الجدول المالي رقم 03 نجد القيمة $\frac{(1+0.05)^5-1}{0.05}$ تساوي 5.525631

إذن:

$$A = 5000(5.525631)$$

**مثال2:** أحسب جملة دفعة عادية مبلغها الدوري 3000 دج تدفع مرتين في السنة لمدة 6 سنوات بمعدل فائدة مركبة سنوي 10% يدفع مرتين في السنة

C = 3000 دج، t =10% سنوي، يدفع مرتين بمعنى سداسي إذن t= 2/10 = 5%، n = تدفع الدفعة أو المبلغ مرتين في السنة، بمعنى خلال 6 سنوات نجد 12 دفعة.

-حساب الجملة:

$$A = \mathrm{C}[\frac{(1+\mathrm{i})^{\mathrm{n}} - 1}{\mathrm{i}}]$$

$$A = 3000[\frac{(1+0.05)^{12} - 1}{0.05}]$$

من الجدول المالي رقم 03 نجد القيمة $\frac{(1+0.05)^{12}-1}{0.05}$ تساوي 15.917126

إذن:

$$A = 3000(15.917126)$$

$$A = 47751.37\mathrm{DA}$$

**مثال:** قام شخص بتسديد ديونه على دفعات سنوية، قيمة كل دفعة 2300 دج، فوجد رصيده بعد 8 سنوات 22764.18 دج، -أوجد معدل الفائدة المركبة السنوي الذي يحتسبه البنك والمعدل السداسي المكافئ له.

**الحل:**

8 دفعات، n ==؟، t = 2300 دج، C $A=$22764.18 دج

-حساب معدل الفائدة السنوي:

$$A = \mathrm{C}[\frac{(1+\mathrm{i})^{\mathrm{n}} - 1}{\mathrm{i}}]$$

$$22764.18 = 2300[\frac{(1+\mathrm{i})^{8} - 1}{i}]$$

$$\frac{22764.18}{2300} = [\frac{(1+\mathrm{i})^{8} - 1}{i}]$$

9.897469بالرجوع إلى الجدول المالي رقم 03 وفي السطر n=8 نجد القيمة 9.897469 مقابلة لـــ i=6%

إذن المعدل هو 6% سنويا.

- إيجاد المعدل السداسي المكافئ:

2=k

$$tk = (1+i)^{1/k} - 1$$

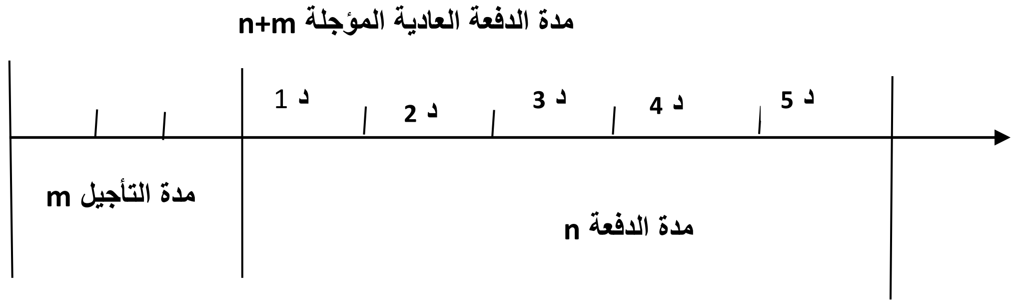
$$tk = (1+0.06)^{1/2} - 1$$

$$tk = 0.02956$$

إذن المعدل السداسي المكافئ للمعدل 6% سنويا هو 2.95%

***جملة الدفعات العادية المؤجلة:**

قد يمتنع المدين ( المقترض) على سداد الدفعات المستحقة عليه في تاريخ استحقاقها ويطلب من الدائن أو يمنحه هذا الأخير مدة زمنية معينة يقوم بسداد دفعاته بعد انقضائها، كما قد يودع أو يوظف الشخص دفعات نهاية المدة لمدة معينة، على أن يسحب جملته بعد انتهاء هذه المدة، إلا أنه يؤجل سحب جملته لمدة زمنية أخرى، ففي هذه الحالات تسمى الجملة بجملة الدفعات العادية المؤجلة.




نرمز لمدة الدفعات بالرمز n

نرمز لمدة التأجيل بالرمز m

**لدينا:** المبلغ الأول (الدفعة الأولى) يستحق السداد في نهاية (m+1) ويستثمر حتى نهاية (m+n)، بمعنى مدة استثمار المبلغ الأول هو:

$$(m+n) - (m+1) = (n-1)$$

المبلغ الثاني (الدفعة الثانية) يستحق السداد في نهاية (m+2) ويستثمر حتى نهاية (m+n)، بمعنى مدة استثمار المبلغ الأول هو:

$$(m+n)-(m+2)=(n-2)$$

وهكذا نجد أن:

مدة استثمار المبلغ قبل الأخير تساوي فترة ( مدة ) واحدة

مدة استثمار المبلغ الأخير تساوي صفر

**إذن:**

$$A=C(1+i)^{n-1}+C(1+i)^{n-2}+C(1+i)^{n-3}+\cdots C$$

**أو:**

$$A=C+(1+\mathrm{i})+\cdots+C(1+i)^{n-3}+C(1+i)^{n-2}+C(1+i)^{n-1}$$

والملاحظ أن جملة الدفعات لم تتأثر بفترة التأجيل، وبالتالي فإن جملة الدفعات العادية المؤجلة تحسب بنفس علاقة أو قانون جملة الدفعات العادية العاجلة

**أي:**

$$\boxed{\mathbf{A}=\mathbf{C}[\frac{(\mathbf{1}+\mathbf{i})^{\mathbf{n}}-\mathbf{1}}{\mathbf{i}}]}$$

**مثال:** اتفق شخص مع البنك على إيداع مبلغ 2000 دج في نهاية كل سنة إبتداء من سنة 1990 حتى يتمكن من شراء عقار في نهاية 2010، فإذا علمت أنه توقف عن الإيداع بعد دفع 12 دفعة ، أوجد جملة الدفعات في نهاية 2010، إذا كان معدل الفائدة الذي يحتسبه البنك هو 4% .

**الحل:**

C = 2000 دج

t = 4%

-حساب الجملة:

نلاحظ أن الشخص قام بدفع 12 دفعة فقط وتوقف عن الإيداع بمعنى أن يتم حساب جملة الدفعات العادية في نهاية الدفعة 12 ( من سنة 1990 إلى غاية نهاية 2001) كما يلي:

$$A = C[\frac{(1+i)^n - 1}{i}]$$

$$A = 2000[\frac{(1+0.04)^{12} - 1}{0.04}]$$

$$A = 2000(15.025805)$$

$$\boxed{A = 30051.61DA}$$

الملاحظ أيضا أن الشخص لم يقم بسحب جملته المكونة من دفع 12 دفعة( التي أصبحت مبلغ واحد وهو 15025.80) وإنما أبقاها في البنك إلى غاية 2010، بمعنى أن في نهاية 2010 سيتم حساب جملة مبلغ واحد لمدة 9 سنوات( 2002 إلى غاية 2010 ) كما يلي:

$$A = C(1+i)^n$$

$$A = 30051.61(1+0.04)^9$$

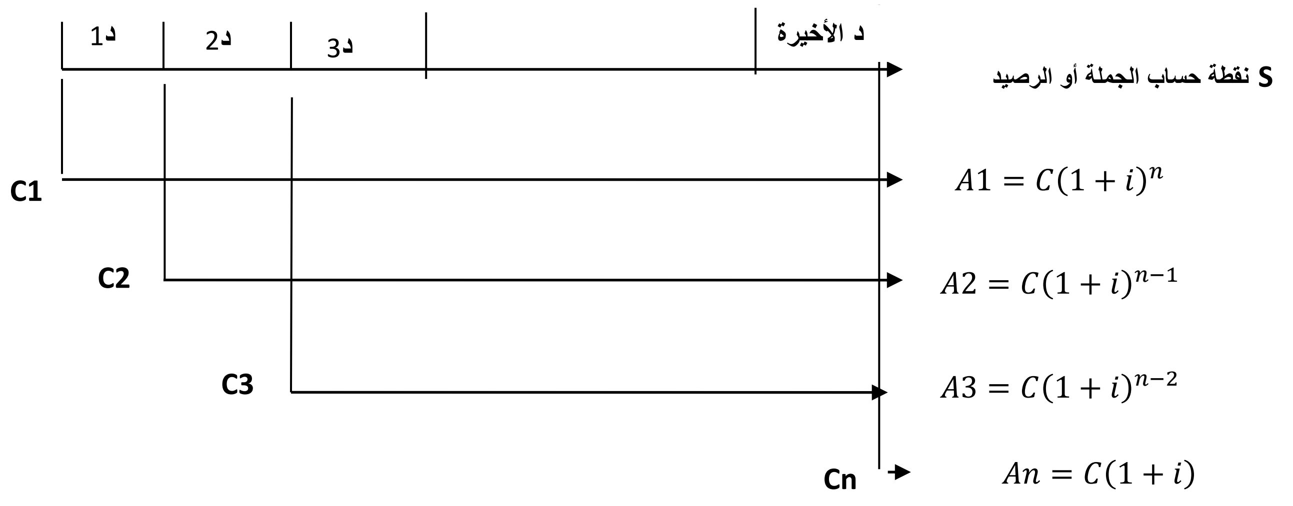
$$A = 30051.61(1.423311)$$

$$\boxed{A = 42772.78DA}$$

**- جملة الدفعات غير العادية**

***جملة الدفعات غير العادية العاجلة**

دفعات بداية المدة أو الفورية هي الدفعات التي تدفع في بداية كل فترة سداد أو توظيف، بمعنى أن مبلغها الأول يستحق الدفع الآن، وجملتها هي مجموع هذه الدفعات حتى نهاية مدة سداد القرض أو توظيف رأس المال.




نلاحظ من الشكل أن مبلغ الدفعة الأول يستثمر لمدة n، من بداية الفترة الأولى وحتى نهاية المدة، وجملته

$$C(1+t)^n$$

المبلغ الثاني من مبالغ الدفعة يستثمر لمدة n-1 ، من بداية الفترة الثانية وحتى نهاية المدة، وجملته

$$C(1+t)^{n-1}$$

وهكذا فإن مبلغ الدفعة الأخير يستثمر لمدة فترة واحدة جملته:

$$C(1+t)$$

**أي:**

$$A = C(1+t)^n + C(1+t)^{n-1} + C(1+t)^{n-2} + \cdots C(1+t)$$

وبالتالي فإن عناصر هذه الجملة تكون متتالية هندسية، حدها الأول $(1+i)^n$ وأساسها $(1+i)^{-1}$ وعدد حدودها n

وبما أن المتتالية الهندسية = الحد الأول * (الأساس) $^{\text{عدد الحدود}}$ - 1

الأساس - 1

$$\text{A} = C(1+i)^n *= C(1+i)^n * \frac{\lfloor (1+i)^{-1} \rfloor n - 1}{(1+i)^{-1} - 1}$$

**ؤد م:**

$$\boldsymbol{A = C\left[\frac{\lfloor (1+i)^{n+1} - 1\ \rfloor}{i} - 1\right]}$$

**مثال:** أوجد جملة دفعة فورية نصف سنوية مبلغها الدوري 8000 دج ومدتها 3 سنوات، إذا كان معدل الفائدة السداسي 3%.

**الحل:**

C = 8000 دج

t =3 % سداسيا

n = الدفعة نصف سنوية ولمدة 3 سنوات، وبما أن السنة بها سداسيين أي دفعتين تتشكل لدينا 6 دفعات(3*2)

-حساب الجملة:

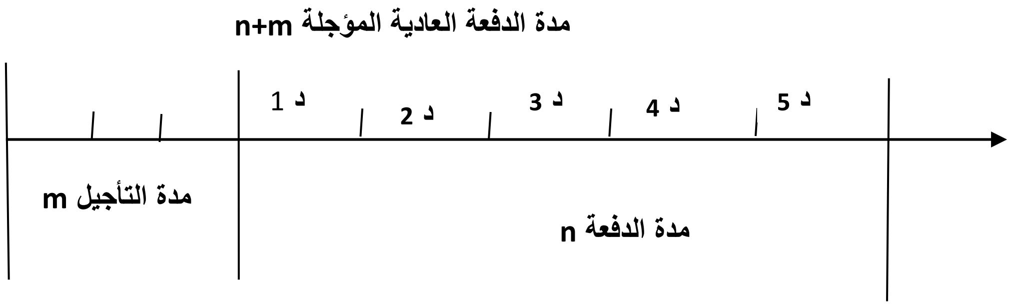
$$\boldsymbol{A = C}\left[\frac{\lfloor (1+i)^{n+1} - 1\ \rfloor}{i} - \boldsymbol{1}\right]$$

$$\boldsymbol{A} = 8000\left[\frac{\lfloor (1+0.03)^{6+1} - 1\ \rfloor}{0.03} - 1\right]$$

$$A = 8000(7.662462 - 1)$$

$$A = 53299.69D$$

***جملة الدفعات غير العادية المؤجلة**



نرمز لمدة الدفعات بالرمز n

نرمز لمدة التأجيل بالرمز m

من الشكل نلاحظ أن جملة الدفعات تساوي :

$$A = C(1+t)^n + C(1+t)^{n-1} + C(1+t)^{n-2} + \cdots C(1+t)$$

**إذن:**

جملة الدفعات لم تتأثر بفترة التأجيل، وبالتالي فإن جملة الدفعات غير العادية المؤجلة تحسب بنفس علاقة أو قانون جملة الدفعات غير العادية العاجلة

**أي:**

$$\boldsymbol{A = C\left[\frac{\lfloor(1+i)^{n+1} - 1\ \rfloor}{i} - 1\right]}$$

**مثال:** أودع شخص مبلغ 2500 دج في البنك في بداية كل سنة إبتداء من سنة 1988 وذلك لمدة 10 سنوات، ثم توقف عن الإيداع، ما هو رصيد هذا الشخص في آخر ديسمبر 2002، علما أن معدل الفائدة المركبة 3% سنويا.

**الحل:**

C = 2500 دج

t =3 %

n =10 **دفعات**

-حساب الجملة:

نلاحظ أن الشخص قام بدفع دفعات سنوية فورية (بداية المدة ) لمدة 10 سنوات(1988-1997) ثم توقف عن الإيداع، بمعنى أنه يتم حساب جملة دفعات غير عادية أو فورية في نهاية 10 سنوات كما يلي:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{C}\left[\frac{\lfloor(1+\mathrm{i})^{n+1} - 1\ \rfloor}{\mathrm{i}} - \boldsymbol{1}\right]$$

$$\boldsymbol{A} = 2500\left[\frac{\lfloor(1+0.03)^{10+1} - 1\ \rfloor}{0.03} - \boldsymbol{1}\right]$$

$$A = 2500(12.807795 - 1)$$

$$A = 29519.48DA$$

أيضا الشخص لم يقم بسحب هذه الجملة المكونة في نهاية السنة العاشرة 29519.48DA وإنما أبقاها في البنك إلى غاية 2002 بمعنى لمدة 5 سنوات ( 1998-2002)، بمعنى يتم حساب جملة مبلغ واحد وهو 29519.48 موظف لمدة 5 سنوات، كما يلي:

$$A = C(1+i)^n$$

$$A = 29519.48(1+0.03)^5$$

$$A = 29519.48(1.159274)$$

$$A = 34221.16DA$$

**مثال:** اشترى تاجر بضاعة وسدد ثمنها كالتالي:

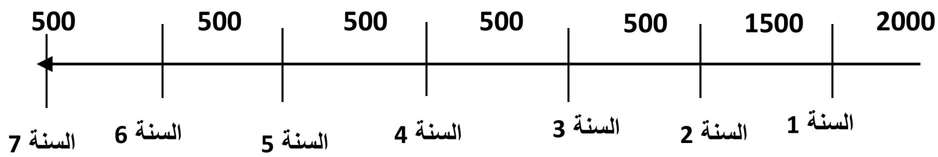
2000 دج في نهاية السنة من تاريخ الشراء

1500 دج بعد سنة من سداد المبلغ الأول

500 دج تدفع سنويا لمدة 5 سنوات تدفع الأولى منها بعد سنة من سداد المبلغ الثاني

أحسب جملة ما يسدده التاجر في نهاية المدة، إذا علمت أن معدل الفائدة المركبة 10% سنويا.

**الحل:**




-حساب الجملة:

نلاحظ أن الجملة التاجر متكونة من جملة مبلغ واحد هو 2000 دج لمدة 6 سنوات( من نهاية السنة الأولى إلى غاية السنة السابعة أي تاريخ حساب الجملة) + جملة مبلغ واحد هو 1500 دج لمدة 5 سنوات + جملة دفعات ( مبلغ الدفعة الواحدة 500 دج سنويا)

**أي:**

$$A = 2000(1+0.1)^6 + 1500(1+0.1)^5 + \ 500[\frac{(1+0.1)^5 - 1}{0.1}]$$

$$\mathrm{A} = 2000(1.771561) + 1500(1.61051) + \ 500(6.1051)$$

$$\mathrm{A} = 3543.12 + 2415.76 + \ 3052.55$$

$$\boxed{\mathrm{A} = 9011.43\mathrm{DA}}$$