

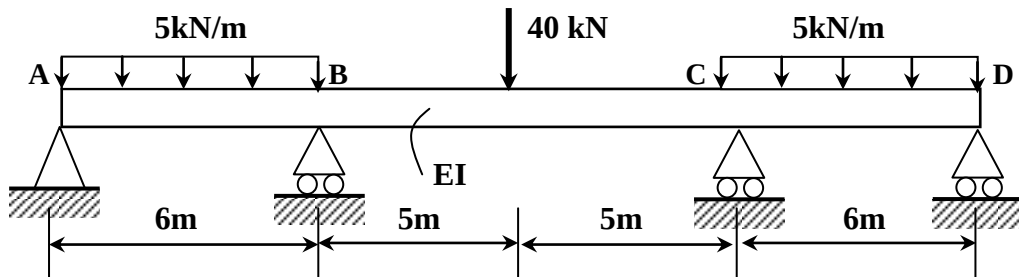
2.4. Exercices :

2.4.1 Exercice N° 2.1 :

On considère une poutre continue (ABCD) de trois travées, de rigidité EI constante. Elle supporte une charge répartie de 5kN/m sur la travée AB et CD et une charge concentrée de 40kN au milieu de la travée BC.

En utilisant la méthode des trois moments, déterminer :

- Les réactions aux appuis.
- Tracer le diagramme des moments fléchissants et des efforts tranchants.



Degré d'hyperstaticité :

$$d = 5 - 3 = 2 \text{ fois hyperstatique}$$

Point B :

$$6M_A + 2(6 + 10)M_B + 10M_C = -6EI(\varphi_{Bg} + \varphi_{Bd})$$

$$-6EI(\varphi_{Bg} + \varphi_{Bd}) :$$

$$\left. \begin{aligned} -6EI\varphi_{Bg} &= -q \frac{l^3}{4} = -5 \frac{6^3}{4} = -270 \\ -6EI\varphi_{Bd} &= -\frac{3}{8}Pl^2 = -\frac{3}{8}40 \cdot 10^2 = -1500 \end{aligned} \right\} \Rightarrow -6EI(\varphi_{Bg} + \varphi_{Bd}) = -1770\text{kN} \cdot \text{m}^2$$

$$\text{Et } M_A = 0$$

Donc :

$$32M_B + 10M_C = -1770\text{kN} \cdot \text{m}^2$$

Point C :

$$10M_B + 2(10 + 6)M_C + 6M_D = -6EI(\varphi_{Cg} + \varphi_{Cd})$$

$$-6EI(\varphi_{Cg} + \varphi_{Cd}) :$$

$$\left. \begin{aligned} -6EI\varphi_{cg} &= -\frac{3}{8}Pl^2 = -\frac{3}{8}40 \cdot 10^2 = -1500 \\ -6EI\varphi_{cd} &= -q\frac{l^3}{4} = -5\frac{6^3}{4} = -270 \end{aligned} \right\} \Rightarrow -6EI(\varphi_{cg} + \varphi_{cd}) = -1770 \text{ kN.m}^2$$

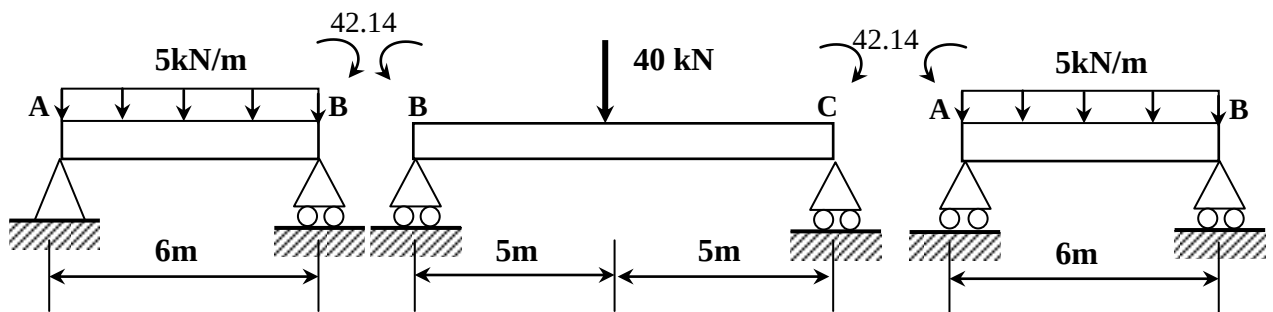
Et $M_D = 0$

Donc :

$$10M_B + 32M_C = -1770 \text{ kN.m}^2$$

$$\begin{bmatrix} 32 & 10 \\ 10 & 32 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_B \\ M_C \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} 1770 \\ 1770 \end{Bmatrix} \text{ kN.m}^2 \Rightarrow M_B = M_C = -42.14 \text{ kN.m}$$

Calcul des réactions : par le principe de la décomposition (superposition)



Les réactions dues aux charges extérieures :



Les réactions dues aux moments appliqués aux niveaux des appuis :



Les réactions totales :

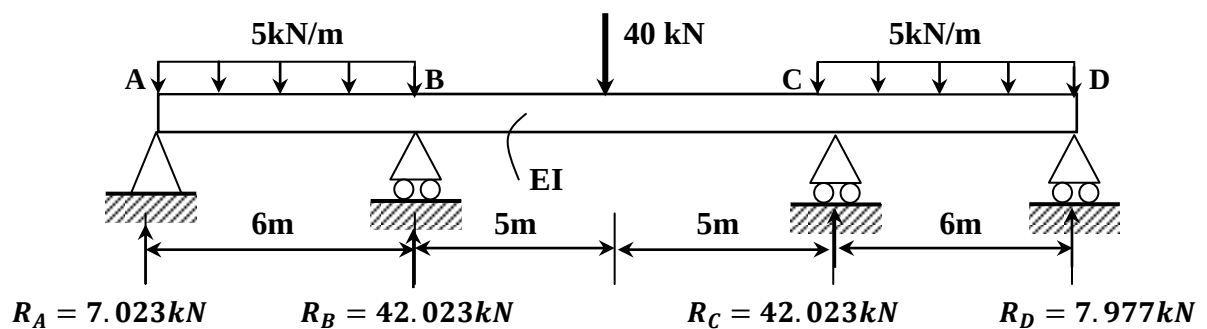


Diagramme des efforts tranchants

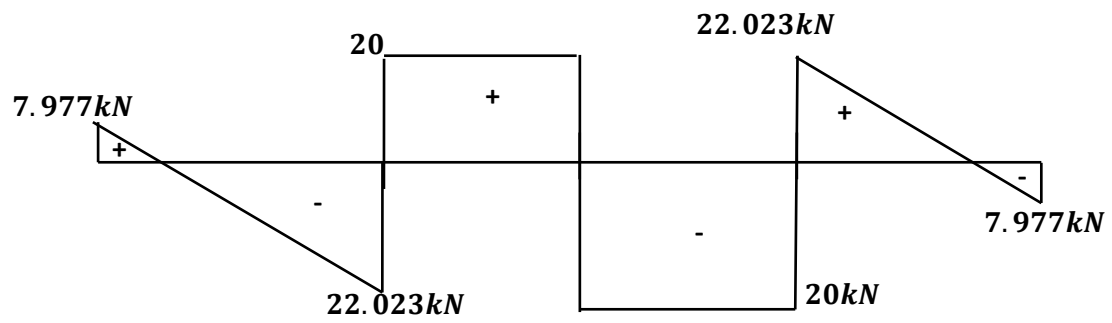
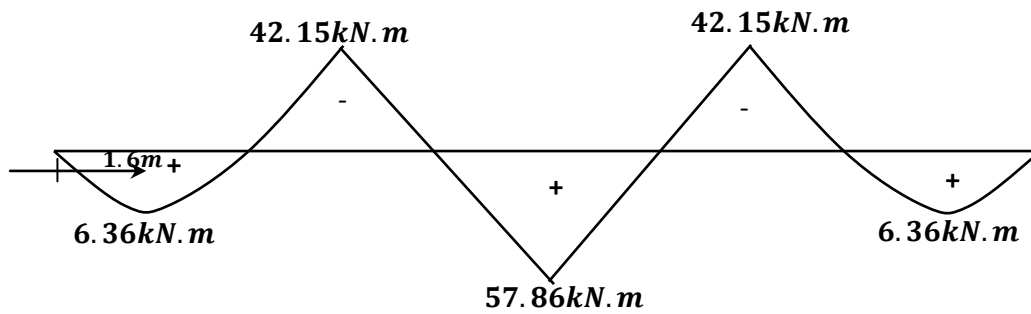


Diagramme des moments fléchissant :

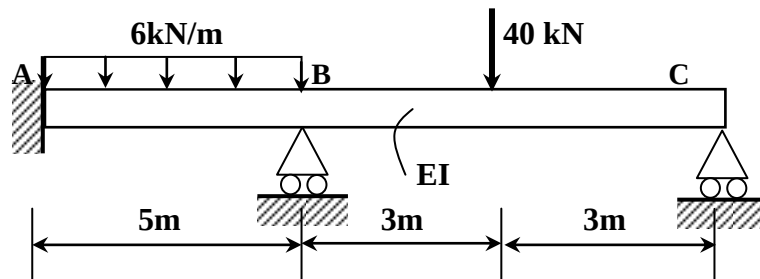


2.4.2. Exercice N° 2.2 :

On considère une poutre continue (ABC) de deux travées, de rigidité EI constante. Celle-ci est encastrée en A, repose sur deux appuis simples en B et C. Elle supporte une charge répartie de 6kN/m sur la travée AB et une charge concentrée de 40kN au milieu de la travée BC.

En utilisant la méthode des trois moments, déterminer :

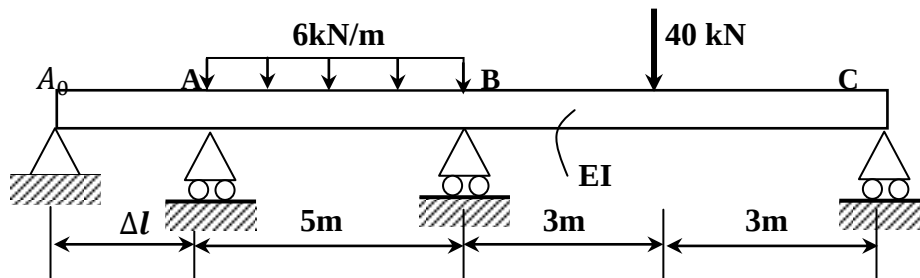
- Les réactions d'appuis en A, B et C.
- Le diagramme des moments fléchissants et de l'effort tranchant.



Degré d'hyperstaticité :

$$d = 5 - 3 = 2 \text{ fois hyperstatique}$$

On remplace l'encastrement par une poutre bi articulée ($A_0 - A$) de longueur Δl



Point A :

$$\Delta l M_{A_0} + 2(\Delta l + 5)M_A + 5M_B = -6EI(\varphi_{Ag} + \varphi_{Ad})$$

$$-6EI(\varphi_{Ag} + \varphi_{Ad}) :$$

$$\left. \begin{aligned} -6EI\varphi_{Ag} &= 0 \text{ (Aucune charge n'agit sur la poutre } A_0 - A) \\ -6EI\varphi_{Bd} &= -q \frac{l^3}{4} = -6 \frac{5^3}{4} = -187.5 \\ &= -187.5 \text{ kN.m}^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow -6EI(\varphi_{Ag} + \varphi_{Ad})$$

Donc : $10M_A + 5M_B = -187.5 \text{ kN.m}^2$

Point B :

$$5M_A + 2(5 + 6)M_B + 6M_C = -6EI(\varphi_{Bg} + \varphi_{Bd})$$

$$-6EI(\varphi_{Bg} + \varphi_{Bd}) :$$

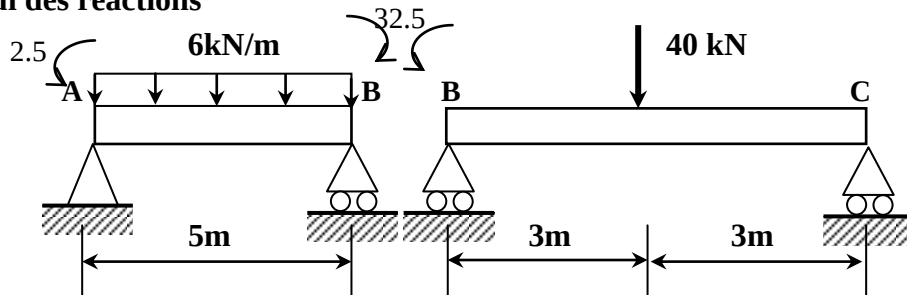
$$\left. \begin{aligned} -6EI\varphi_{Bg} &= -q \frac{l^3}{4} = -6 \frac{5^3}{4} = -187.5 \\ -6EI\varphi_{Bd} &= -\frac{3}{8}Pl^2 = -\frac{3}{8}40 \cdot 6^2 = -540 \end{aligned} \right\} \Rightarrow -6EI(\varphi_{Bg} + \varphi_{Bd}) = -727.5 \text{ kN.m}^2$$

Et $M_C = 0$

Donc : $5M_A + 22M_B = -727.5 \text{ kN.m}^2$

$$\begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 5 & 22 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_A \\ M_B \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} 187.5 \\ 727.5 \end{Bmatrix} \text{ kN.m}^2 \Rightarrow M_A = -2.5 \text{ kN.m et } M_B = -32.5 \text{ kN.m}$$

Calcul des réactions



Les réactions dues aux charges extérieures :

$$\begin{array}{ccccccc} \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \frac{5.6}{2} = 15 & & 15 & & \frac{40}{2} = 20 & & 20 \end{array}$$

Les réactions dues aux moments appliqués aux niveaux des appuis :

$$\begin{array}{ccccccc} \downarrow & & \uparrow & & \uparrow & & \downarrow \\ 6 & & 6 & & 5.42 & & 5.42 \end{array}$$

Les réactions totales :

Ou $R_A = 15 - 6 = 9 \text{ kN}$, $R_B = 21 + 5.42 = 26.42 \text{ kN}$ et $R_C = 20 - 5.42 = 14.58 \text{ kN}$

Diagramme des efforts tranchants

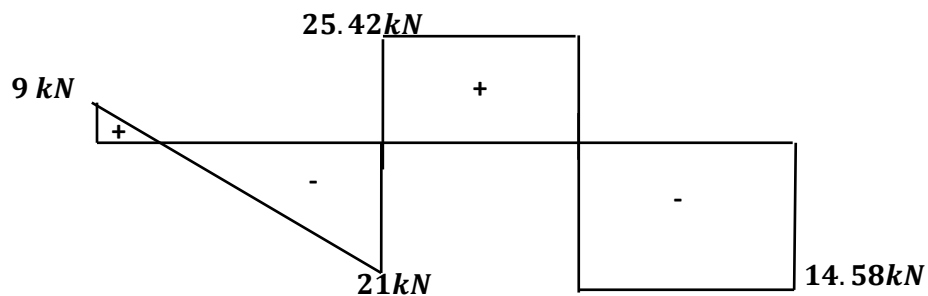
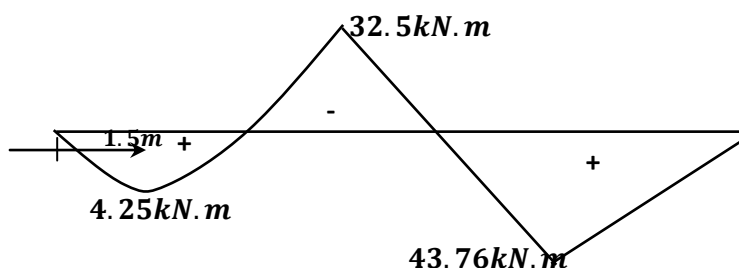


Diagramme des moments fléchissant :

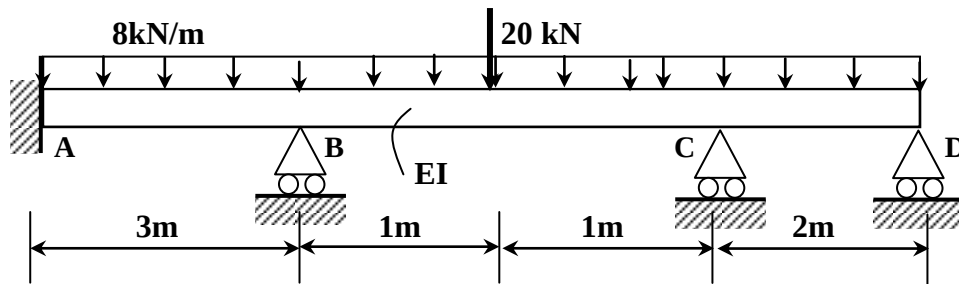


2.4.3. Exercice N° 2.3 :

On considère une poutre continue (ABCD) de trois travées, de rigidité EI constante sur toutes les travées. Celle-ci est encastrée en A, repose sur deux appuis simples en B, C et D. Elle supporte une charge répartie de 8kN/m sur toute la longueur de la poutre continue ABCD et une charge concentrée de 20kN au milieu de la travée BC.

En utilisant la méthode des trois moments, déterminer :

- Les réactions d'appuis en A, B, C et D.
- Le diagramme des moments fléchissants et de l'effort tranchant.



Degré d'hyperstaticité :

$$d = 6 - 3 = 3 \text{ fois hyperstatique}$$

On peut remplacer l'encastrement A par une poutre bi articulée ($A_0 - A$) de longueur Δl

Point A :

$$\Delta l M_{A_0} + 2(\Delta l + 3)M_A + 3M_B = -6EI(\varphi_{Ag} + \varphi_{Ad})$$

$$-6EI(\varphi_{Ag} + \varphi_{Ad}) :$$

$$\left. \begin{aligned} -6EI\varphi_{Ag} &= 0 \text{ (Aucune charge n'agit sur la poutre } A_0 - A) \\ -6EI\varphi_{Bd} &= -q \frac{l^3}{4} = -8 \frac{3^3}{4} = -54 \\ &= -54 \text{ kN.m}^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow -6EI(\varphi_{Ag} + \varphi_{Ad})$$

$$6M_A + 3M_B = -54$$

Point B :

$$3M_A + 2(3 + 2)M_B + 2M_C = -6EI(\varphi_{Bg} + \varphi_{Bd})$$

$$-6EI(\varphi_{Bg} + \varphi_{Bd}) :$$

$$\left. \begin{aligned} -6EI\varphi_{Bg} &= -q \frac{l^3}{4} \\ -6EI\varphi_{Bd} &= -q \frac{l^3}{4} - \frac{3}{8} Pl^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow -6EI(\varphi_{Bg} + \varphi_{Bd}) = -100 \text{ kN.m}^2$$

Donc :

$$3M_A + 10M_B + 2M_C = -100$$

Point C :

$$2M_B + 2(2 + 2)M_C + 2M_D = -6EI(\varphi_{cg} + \varphi_{cd})$$

$-6EI(\varphi_{cg} + \varphi_{cd}) :$

$$\left. \begin{aligned} -6EI\varphi_{cg} &= -q\frac{l^3}{4} - \frac{3}{8}Pl^2 \\ -6EI\varphi_{cd} &= -q\frac{l^3}{4} \end{aligned} \right\} \Rightarrow -6EI(\varphi_{cg} + \varphi_{cd}) = -62kN.m^2$$

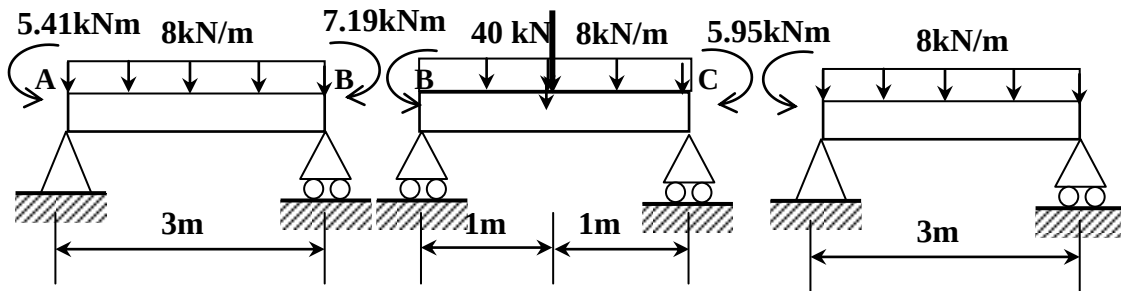
Et $M_D = 0$

Donc :

$$2M_B + 8M_C = -62kN.m^2$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 3 & 10 & 2 \\ 0 & 2 & 8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_A \\ M_B \\ M_C \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} 54 \\ 100 \\ 62 \end{Bmatrix} kN.m^2 \Rightarrow \begin{Bmatrix} M_A \\ M_B \\ M_C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -5.4063 \\ -7.1875 \\ -5.9531 \end{Bmatrix} kN.$$

Calcul des réactions



Les réactions dues aux charges extérieures :



Les réactions dues aux moments appliqués aux niveaux des appuis :



Les réactions totales :

$$R_A = 11.41 \text{ kN}, R_B = 31.2 \text{ kN} \text{ et } R_C = 5.02 \text{ kN}$$

Diagramme des efforts tranchants

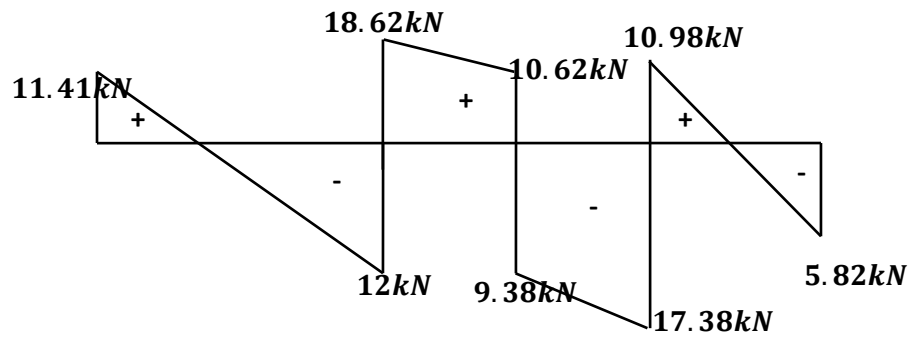
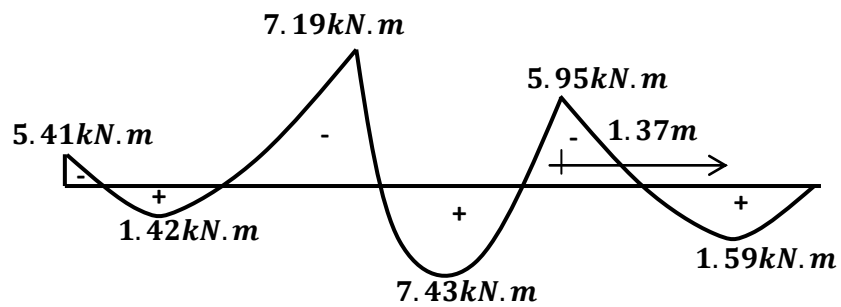
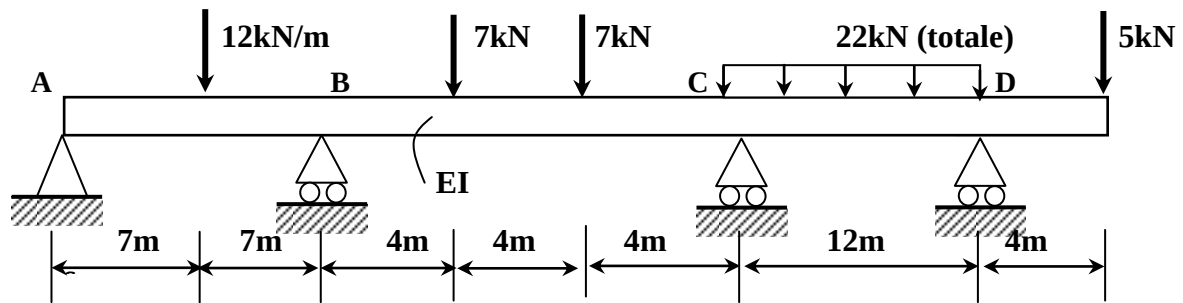


Diagramme des moments fléchissant :



2.4.4. Exercice N° 2.4 :

Tracer le diagramme des moments fléchissants et de l'effort tranchant de la poutre suivante :



Degré d'hyperstaticité :

$$d = 5 - 3 = 2 \text{ fois hyperstatique}$$

Les inconnues hyperstatiques sont M_B et M_C

Point B :

$$14M_A + 2(14 + 12)M_B + 12M_C = -6EI(\varphi_{Bg} + \varphi_{Bd})$$

$$-6EI(\varphi_{Bg} + \varphi_{Bd}) :$$

$$\left. \begin{aligned} -6EI\varphi_{Bg} &= -\frac{3}{8}Pl^2 = -\frac{3}{8}12 \cdot 14^2 \\ -6EI\varphi_{Bd} &= -\frac{2}{3}Pl^2 = -\frac{2}{3}7 \cdot 12^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow -6EI(\varphi_{Bg} + \varphi_{Bd}) = -1554 \text{ kN} \cdot \text{m}^2$$

$$\text{Et } M_A = 0$$

Donc :

$$52M_B + 12M_C = -1554 \text{ kN} \cdot \text{m}^2$$

Point C :

$$12M_B + 2(12 + 12)M_C + 12M_D = -6EI(\varphi_{Cg} + \varphi_{Cd})$$

$$-6EI(\varphi_{Cg} + \varphi_{Cd}) :$$

$$\left. \begin{aligned} -6EI\varphi_{cg} &= -\frac{2}{3}Pl^2 = -\frac{2}{3}7 \cdot 12^2 \\ -6EI\varphi_{cd} &= -q\frac{l^3}{4} = -1.833\frac{12^3}{4} \end{aligned} \right\} \Rightarrow -6EI(\varphi_{cg} + \varphi_{cd}) = -1464 \text{ kN.m}^2$$

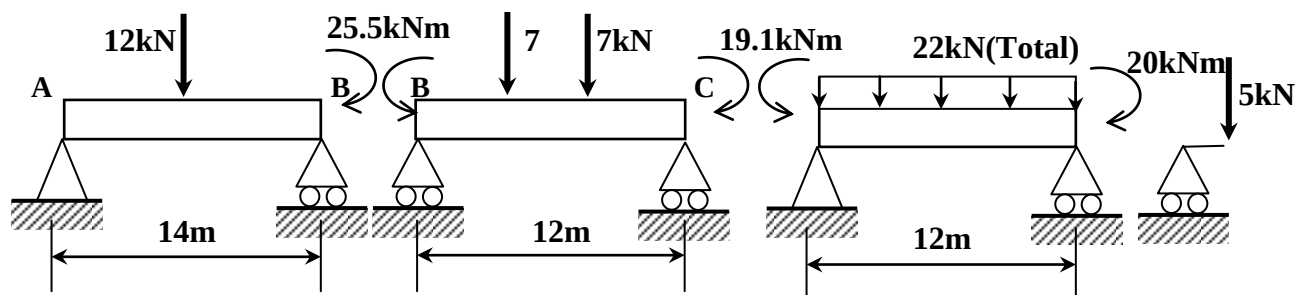
Et $M_D = -20 \text{ kN.m}$

Donc :

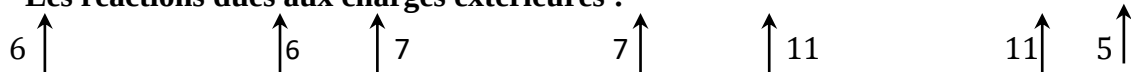
$$16M_B + 56M_C = -1464 - 12(-20)$$

$$\begin{bmatrix} 52 & 12 \\ 12 & 48 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_B \\ M_C \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} 1554 \\ 1224 \end{Bmatrix} \text{ kN.m}^2 \Rightarrow \begin{Bmatrix} M_B \\ M_C \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} 25.5 \\ 19.1 \end{Bmatrix} \text{ kN.m}$$

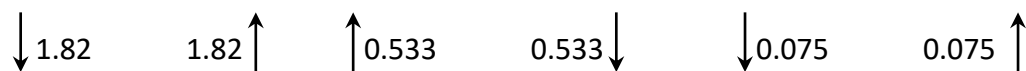
Calcul des réactions



Les réactions dues aux charges extérieures :



Les réactions dues aux moments appliqués aux niveaux des appuis :



Les réactions totales :

$$R_A = 4.18 \text{ kN}, R_B = 15.1246 \text{ kN}, R_C = 17.39 \text{ kN} \text{ et } R_D = 16.07 \text{ kN}$$

Diagramme des efforts tranchants

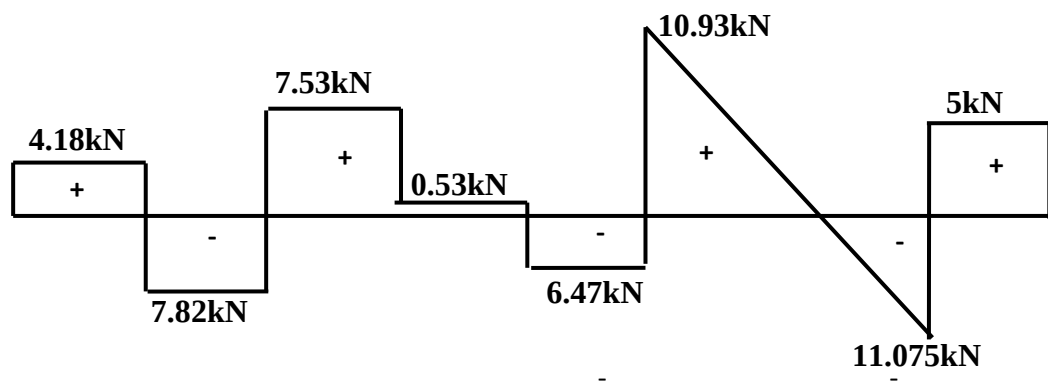


Diagramme des moments fléchissant :

