ESPACES TOPOLOGIQUES
Vocabulaire et Notions de base

Prof. N. Merazga

11 novembre 2023

Table des matières

1 Topologie, ouverts, fermés et voisinages

On désigne par X un ensemble non vide quelconque et $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties de X.

Définition 1 *Une famille τ de parties de X est appelée topologie sur X si elle vérifie :*

(O1) $X, \varnothing \in \tau$.

(O2) *τ est stable par union quelconque, i.e. une réunion quelconque (finie ou non) d'éléments de τ est encore un élément de τ.*

(O3) *τ est stable par intersection finie, i.e. une intersection finie d'éléments de τ est encore un élément de τ.*

Dans ce cas, le couple (X, τ) est appelé espace topologique, et les éléments de τ sont appelés les ouverts (ou les parties ouvertes) de X.

Remarque 1 Pour établir la propriété (O3), il suffit de vérifier que l'intersection de *deux* éléments de τ est encore un élément de τ.

Exemple 1 (Topologie discrète) X avec $\tau = \mathcal{P}(X)$. C'est la topologie la plus grande en termes de nombre d'ouverts : toute partie de X est un ouvert. (X, τ) est appelé espace topologique *discret*.

Exemple 2 (Topologie grossière) X avec $\tau = \{\varnothing, X\}$. C'est la topologie la plus petite en termes de nombre d'ouverts : les seuls ouverts sont $\varnothing$ et X est un ouvert. (X, τ) est appelé espace topologique *grossier*.

Exemple 3 $X = \{a, b\}$ avec $\tau = \{\varnothing, X, \{a\}\}$.
Les ouverts sont : $\varnothing, X$ et $\{a\}$.

Exemple 4 Sur $X = \{a, b, c\}$,
la famille $\tau_1 = \{\varnothing, X, \{a\}, \{b, c\}\}$ est une topologie,
la famille $\tau_2 = \{\varnothing, X, \{a\}, \{c\}\}$ n'est pas une topologie car $\{a\} \cup \{c\} = \{a, c\} \notin \tau_2$,
la famille $\tau_3 = \{\varnothing, X, \{a, b\}, \{b, c\}\}$ n'est pas une topologie car $\{a, b\} \cap \{b, c\} = \{b\} \notin \tau_3$.

Exemple 5 Sur $X = [0, +\infty[$, la famille τ constituée de $X, \varnothing$ et de tous les intervalles de la forme $]a, +\infty[$ avec $a \in \mathbb{R}_+$ est une topologie sur X.

Exemple 6 (Topologie usuelle de $\mathbb{R}$) Sur $X = \mathbb{R}$, la famille τ de toutes les parties $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}$ vérifiant la propriété suivante

$$\forall x \in \mathcal{O},\ \exists\, h > 0 \text{ tel que }]x-h, x+h[\subset \mathcal{O},$$

est une topologie sur $\mathbb{R}$ appelée <u>*topologie usuelle*</u> de $\mathbb{R}$. Pour cette topologie,

- tout intervalle ouvert $]a, b[$ (où $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$) est un ouvert (pour tout $x \in]a, b[$ on peut prendre $h = \min\{x-a, b-x\}$),
- l'ensemble $]a, b[\cup]c, d[$ (où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ avec $a < b \leq c < d$) est un ouvert,
- les ensembles $]a, +\infty[$ et $]-\infty, a[$(où $a \in \mathbb{R}$) sont des ouverts,
- l'ensemble $]a, b]$ (où $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$) n'est pas un ouvert car pour le point b il n'existe aucun réel $h > 0$ tel que $]b-h, b+h[$ soit inclus dans $]a, b]$,
- l'ensemble $\{a\}$ (où $a \in \mathbb{R}$) n'est pas un ouvert et, plus généralement, toute partie finie non vide de $\mathbb{R}$ n'est pas un ouvert car ne contient aucun intervalle ouvert,
- l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels n'est pas un ouvert, car en raison de la densité de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il n'existe aucun intervalle ouvert inclus dans $\mathbb{Q}$.
- l'ensemble $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ des nombres irrationnels n'est pas un ouvert, car en raison de la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il n'existe aucun intervalle ouvert inclus dans $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Proposition 1 *Tout ouvert dans $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle est la réunion d'intervalles ouverts de la forme $]a, b[$ où $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ (par convention $\bigcup\limits_{\varnothing} = \varnothing$).*

Preuve. Soit $\mathcal{O}$ un ouvert dans $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle, alors

$$\forall x \in \mathcal{O},\ \exists\, h_x > 0 : \ ]x-h_x, x+h_x[\subset \mathcal{O}.$$

Posons $I_x =]x-h_x, x+h_x[$; alors $\mathcal{O} = \bigcup\limits_{x \in \mathcal{O}} \{x\} \subset \bigcup\limits_{x \in \mathcal{O}} I_x \subset \mathcal{O}$, d'où $\mathcal{O} = \bigcup\limits_{x \in \mathcal{O}} I_x$. ■

Définition 2 (Fermé) *Un sous-ensemble F d'un espace topologique X est dit fermé, si son complémentaire $F^c = X \setminus F$ est un ouvert. On note $\mathcal{F}$ la famille de tous les fermés de X.*

Exemple 7 Pour la topologie discrète sur X, toute partie de X est un fermé.

Exemple 8 Pour la topologie grossière sur X, les seuls fermés sont $\varnothing$ et X.

Exemple 9 $X = \{a, b\}$ avec $\tau = \{\varnothing, X, \{a\}\}$.
Les fermés de (X, τ) sont : $X, \varnothing$ et $\{b\}$.

Exemple 10 $X = \{a, b, c, d, e\}$ avec $\tau = \{\varnothing, X, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$.
Les fermés de (X, τ) sont : $X, \varnothing, \{b, c, d, e\}, \{a, b, e\}, \{b, e\}$ et $\{a\}$.
On remarque qu'il existe des parties qui sont ouvertes et fermées à la fois, comme il existe des parties qui ne sont ni ouvertes ni fermées.

Exemple 11 Sur $X = [0, +\infty[$ muni de la topologie $\tau = \{\varnothing, X\} \cup \{]a, +\infty[\ ;\ a \in \mathbb{R}_+\}$, les fermés sont $X, \varnothing$ et tout intervalle de la forme $[0, a]$ avec $a \in \mathbb{R}_+$ ($[0, 0] = \{0\}$).

Exemple 12 Sur $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle,

- l'intervalle fermé $[a, b]$ (où $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$) est un ensemble fermé car son complémentaire $]-\infty, a[\, \cup\,]b, +\infty[$ est un ouvert,
- les intervalles $]-\infty, a]$ et $[a, +\infty[$ ($a \in \mathbb{R}$) sont des ensembles fermés,
- l'ensemble $\{a\}$ ($a \in \mathbb{R}$), et toute partie finie de $\mathbb{R}$, est un fermé car son complémentaire $]-\infty, a[\, \cup\,]a, +\infty[$ est un ouvert,
- l'ensemble $[a, b[$ (où $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$) n'est ni un ouvert ni un fermé.

Remarque 2

1. $\varnothing, X$ sont des parties ouvertes et fermées à la fois pour toute topologie sur X.
2. Une partie d'un espace topologique peut être ouverte ou fermée ou ouverte et fermée à la fois ou ni ouverte ni fermée.

Des égalités bien connues (lois de De Morgan)

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i \in I} A_i^c \qquad \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i \in I} A_i^c$$

on déduit des propriétés (O1), (O2) et (O3) celles des fermés.

Proposition 2 *La famille $\mathcal{F}$ de tous les fermés de (X, τ) vérifie*

(F1) *$\varnothing$ et X sont des fermés.*

(F2) *Toute intersection de fermés est un fermé.*

(F3) *Une réunion finie de fermés est un fermé.*

Remarque 3 La réunion infinie de fermés n'est pas nécessairement un fermé. En effet, dans $\mathbb{R}$ usuel les intervalles $\left[\frac{1}{n}, 1\right]$ sont des fermés mais

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left[\frac{1}{n}, 1\right] =]0, 1].$$

Définition 3 (Voisinage d'un point) *On dit qu'une partie V d'un espace topologique (X,τ) est un voisinage d'un point $a \in X$ si V contient un ouvert contenant a. On note $\mathcal{V}(a)$ l'ensemble des voisinages du point a. Ainsi,*

$$V \in \mathcal{V}(a) \iff \exists \mathcal{O} \in \tau : a \in \mathcal{O} \subset V.$$

Exemple 13 Si $X = \{a,b\}$ et $\tau = \{\varnothing, X, \{a\}\}$, on a

$$\mathcal{V}(a) = \{\{a\}, X\}, \quad \mathcal{V}(b) = \{X\}.$$

Exemple 14 Si $X = \{a,b,c\}$ et $\tau = \{\varnothing, X, \{a\}, \{b,c\}\}$, on a

$$\mathcal{V}(a) = \{\{a\}, \{a,b\}, \{a,c\}, X\}, \quad \mathcal{V}(b) = \{\{b,c\}, X\}, \quad \mathcal{V}(c) = \{\{b,c\}, X\}.$$

Exemple 15 Pour la topologie grossière sur X, $\mathcal{V}(a) = \{X\}$ pour tout point $a \in X$.

Exemple 16 Pour la topologie discrète sur X, toute partie de X contenant le point $a \in X$ est un voisinage de a.

De la définition ci-dessus, découle le résultat suivant.

Proposition 3 (Caractérisation des ouverts) *Pour qu'un sous-ensemble non vide A d'un espace topologique (X,τ) soit un ouvert il faut et il suffit qu'il soit voisinage de tous ses points.*

Preuve.
Nécessité. Si A est un ouvert non vide alors il est voisinage de tous ses points en vertu de la définition 3 (on prend $\mathcal{O} = A$).
Suffisance. Supposons que A soit voisinage de tous ses points, alors

$$\forall a \in A, \exists\, \mathcal{O}_a \in \tau : \quad a \in \mathcal{O}_a \subset A,$$

d'où $A = \bigcup\limits_{a \in \mathcal{O}_a} \{a\} \subset \bigcup\limits_{a \in \mathcal{O}_a} \mathcal{O}_a \subset A$, et donc $A = \bigcup\limits_{a \in \mathcal{O}_a} \{a\} \in \tau$. ■

Proposition 4 (Propriétés principales des voisinages) *Soit (X,τ) un espace topologique et $\mathcal{V}(a)$ la famille des voisinages d'un point a de X.*

(V1) *Tout voisinage de a contient a (donc n'est pas vide) :*

$$V \in \mathcal{V}(a) \implies a \in V.$$

(V2) *Toute partie de X contenant un voisinage de a est aussi un voisinage de a :*

$$(V \in \mathcal{V}(a) \text{ et } V' \supset V) \implies V' \in \mathcal{V}(a).$$

(V3) *La famille $\mathcal{V}(a)$ est stable par intersection finie, i.e. l'intersection finie de voisinages de a est encore un voisinage de a.*

(V4) *Si $V \in \mathcal{V}(a)$, il existe $W \in \mathcal{V}(a)$ tel que $W \subset V$ et $V \in \mathcal{V}(b)$ pour tout $b \in W$.*

Preuve. Les propriétés (V1) et (V2) sont évidentes. Pour (V3), on écrit

$$\forall i = 1, ..., n, \ \exists \mathcal{O}_i \in \tau : \quad a \in \mathcal{O}_i \subset V_i$$

d'où $a \in \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{O}_i \subset \bigcap_{i=1}^{n} V_i$. Comme $\bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{O}_i$ est ouvert, $\bigcap_{i=1}^{n} V_i$ est un voisinage de a. Dans (V4), il suffit de prendre $W = \mathcal{O}$ où $\mathcal{O}$ est l'ouvert dans la définition 3. ∎

2 Intérieur, adhérence et frontière

Définition 4 *Soit (X, τ) un espace topologique et A une partie de X.*

- *On dit qu'un point x de X est intérieur à A si A est un voisinage de x, i.e. s'il existe $\mathcal{O} \in \tau$ t.q. $x \in \mathcal{O} \subset A$.*

  L'ensemble des points intérieurs à A est appelé intérieur de A et est noté $\overset{\circ}{A}$.

- *On dit qu'un point x de X est adhérent à A si tout voisinage de x contient un point de A, i.e.*

  $$\forall V \in \mathcal{V}(x) : V \cap A \neq \varnothing.$$

  L'ensemble des points adhérents à A est appelé adhérence de A et est noté $\overline{A}$.

- *On dit qu'un point x de X est un point frontière de A si tout voisinage de x rencontre à la fois A et le complémentaire de A, i.e.*

  $$\forall V \in \mathcal{V}(x) : V \cap A \neq \varnothing \text{ et } V \cap A^c \neq \varnothing.$$

  L'ensemble des points frontières de A est appelé frontière de A et est noté ∂A ou $Fr(A)$. Autrement dit,

  $$\partial A = \overline{A} \cap \overline{A^c}.$$

Remarque 4 Par définition, il vient immédiatement

$$\overset{\circ}{A} \subset A \subset \overline{A},$$

i.e. tout point intérieur à A appartient à A, et tout point de A est adhérent à A.

Exemple 17 Sur $X = \{a, b\}$ muni de la topologie $\tau = \{\varnothing, \{a\}, \{a, b\}\}$, donner l'adhérence, l'intérieur et la frontière de $\{a\}$ et de $\{b\}$.

Réponse : $\overset{\circ}{\{a\}} = \{a\}$, $\overline{\{a\}} = X$, $\overset{\circ}{\{b\}} = \varnothing$, $\overline{\{b\}} = \{b\}$,
$\partial\{a\} = \overline{\{a\}} \cap \overline{\{b\}} = \{b\}$, $\partial\{b\} = \overline{\{b\}} \cap \overline{\{a\}} = \{b\}$.

Exemple 18 Sur $X = \{a, b, c, d, e\}$ muni de la topologie

$$\tau = \{\varnothing, X, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\},$$

donner l'adhérence, l'intérieur et la frontière de l'ensemble $A = \{b, c, d\}$.

Réponse : $\overset{\circ}{A} = \{c, d\}$, $\overline{A} = \{b, c, d, e\}$,
$A^c = \{a, e\}$, $\overline{A^c} = \{a, b, e\}$, $\partial A = \overline{A} \cap \overline{A^c} = \{b, e\}$

Exemple 19 Dans $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle, on a pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$:

– $\overset{\circ}{\{a\}} = \varnothing$, $\overline{\{a\}} = \{a\}$,
– $\overset{\circ}{\widehat{[a,b]}} = \overset{\circ}{\widehat{[a,b[}} = \overset{\circ}{\widehat{]a,b]}} = \overset{\circ}{\widehat{]a,b[}} =]a,b[$, $\overline{[a,b[} = \overline{]a,b]} = \overline{]a,b[} = [a,b]$,
– $\overset{\circ}{\widehat{[a,+\infty[}} = \overset{\circ}{\widehat{]a,+\infty[}} =]a,+\infty[$, $\overset{\circ}{\widehat{]-\infty,b]}} = \overset{\circ}{\widehat{]-\infty,b[}} =]-\infty,b[$,
– $\overline{[a,+\infty[} = \overline{]a,+\infty[} = [a,+\infty[$, $\overline{]-\infty,b]} = \overline{]-\infty,b[} =]-\infty,b]$,
– $\overset{\circ}{\mathbb{N}} = \overset{\circ}{\mathbb{Z}} = \overset{\circ}{\mathbb{Q}} = \overset{\circ}{\widehat{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}} = \varnothing$, (tout intervalle ouvert contient des nombres rationnels et des nombres irrationnels)
– $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N}$, $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$, $\overline{\mathbb{Q}} = \overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.
– $\overline{\left\{\frac{1}{n}\ ;\ n \in \mathbb{N}^*\right\}} = \left\{\frac{1}{n}\ ;\ n \in \mathbb{N}^*\right\} \cup \{0\}$.

Proposition 5 *Soit (X, τ) un espace topologique et A une partie de X.*

1. *$\overset{\circ}{A}$ est le plus grand ouvert contenu dans A, i.e. $\overset{\circ}{A} \in \tau$ et*

$$\forall \mathcal{O} \in \tau : \quad \mathcal{O} \subset A \implies \mathcal{O} \subset \overset{\circ}{A}.$$

2. *A est ouverte si et seulement si $A = \overset{\circ}{A}$.*
3. *$\overline{A}$ est le plus petit fermé de X contenant A, i.e. $\overline{A}$ est un fermé et si F est un fermé et $A \subset F$ alors $\overline{A} \subset F$.*
4. *A est fermée si et seulement si $\overline{A} = A$.*
5. *$\complement\overset{\circ}{A} = \overline{\complement A}$ et $\complement\overline{A} = \overset{\circ}{\widehat{\complement A}}$.*
L'ensemble $\complement\overline{A} = \overset{\circ}{\widehat{\complement A}}$ est appelé <u>extérieur</u> de A et est noté $\mathrm{Ext}(A)$.

Remarque 5 Des points 1. et 3. de la proposition ci-dessus, on déduit que

1. $\overset{\circ}{A}$ coïncide avec la réunion de tous les ouverts de X contenus dans A :

$$\overset{\circ}{A} = \bigcup_{\substack{\mathcal{O}\in\tau \\ \mathcal{O}\subset A}} \mathcal{O}.$$

2. $\overline{A}$ coïncide avec l'intersection de tous les fermés de X contenant A :

$$\overline{A} = \bigcap_{\substack{F \text{ fermé} \\ F\supset A}} F.$$

L'ensemble $\bigcap\limits_{\substack{F \text{ fermé} \\ F\supset A}} F$ est appelé *fermeture de A*.

Exemple 20 Pour une partie A d'un espace grossier X, on a

$$\begin{aligned}
\overline{A} &= X \text{ si } A \neq \varnothing, \\
\overset{\circ}{A} &= \varnothing \text{ si } A \neq X.
\end{aligned}$$

Exemple 21 Pour une partie A d'un espace discret X, on a

$$\begin{aligned}
\overline{A} &= A \quad \text{(car } A \text{ est un fermé)}, \\
\overset{\circ}{A} &= A \quad \text{(car } A \text{ est un ouvert)}.
\end{aligned}$$

Proposition 6 *Soit (X, τ) un espace topologique et A et B deux parties de X.*

1. $\overset{\circ}{X} = X$,
2. $A \subset B \implies \overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$,
3. $\overset{\circ}{\overset{\circ}{A}} = \overset{\circ}{A}$,
4. $(A \overset{\circ}{\cap} B) = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$, *et en général* $\overset{\circ}{\widehat{\bigcap_{i\in I} A_i}} \subset \bigcap_{i\in I} \overset{\circ}{A_i}$ *si I est infini (pas d'égalité en général),*
5. $(A \overset{\circ}{\cup} B) \supset \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$ *(pas d'égalité en général).*

Proposition 7 (duale de la proposition 6) *Soit (X, τ) un espace topologique et A et B deux parties de X.*

1. $\overline{\varnothing} = \varnothing$,
2. $A \subset B \implies \overline{A} \subset \overline{B}$,

3. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$,

4. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$,

5. $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ *(pas d'égalité en général).*

Remarque 6 1. L'égalité dans 4) n'est plus vraie en général pour une famille quelconque de parties de X comme le montre l'exemple suivant :

$$\bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \overline{\{r\}} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \{r\} = \mathbb{Q} \quad \text{et} \quad \overline{\bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \{r\}} = \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}.$$

Mais on a toujours

$$\bigcup_{i \in I} \overline{A_i} \subset \overline{\bigcup_{i \in I} A_i}.$$

2. On munit $\mathbb{R}$ de la topologie usuelle. Pour $A = \mathbb{Q}$ et $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, on a

$$\begin{array}{lll} A \cap B = \varnothing & \text{et} & \overline{A \cap B} = \overline{\varnothing} = \varnothing, \\ \overline{A} = \overline{B} = \mathbb{R} & \text{et} & \overline{A} \cap \overline{B} \neq \mathbb{R}. \end{array}$$

Donc en général $\overline{A \cap B} \neq \overline{A} \cap \overline{B}$, mais on a toujours

$$\overline{\bigcap_{i \in I} A_i} \subset \bigcap_{i \in I} \overline{A_i}.$$

Proposition 8 (Propriétés de la frontière) *Soit (X, τ) un espace topologique et A une partie de X de frontière ∂A.*

1. *∂A est un fermé (comme intersection de deux fermés),*

2. $\partial A = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$,

3. $A \cup \partial A = \overline{A}$,

4. $A \setminus \partial A = \overset{\circ}{A}$,

5. $\partial A = \partial (A^c)$,

6. *A ouvert et fermé $\iff$ $\partial A = \varnothing$.*

Exemple 22 Dans $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle, on a

– $\partial ([a, b]) = \partial ([a, b[) = \partial (]a, b]) = \partial (]a, b[) = [a, b] \setminus]a, b[= \{a, b\}$,

– $\partial ([a, +\infty[) = \partial (]a, +\infty[) = \{a\}$,

– $\partial (]-\infty, b]) = \partial (]-\infty, b[) = \{b\}$,

– $\partial\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ car $\mathbb{Z}$ est un fermé ($\complement\mathbb{Z} = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}}]n, n+1[$ *est une réunion d'ouverts*) d'intérieur vide,

– $\partial\mathbb{Q} = \overline{\mathbb{Q}} \setminus \overset{\circ}{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} \setminus \varnothing = \mathbb{R}$, $\quad \partial\left(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\right) = \overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} \setminus \overset{\circ}{\widehat{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}} = \mathbb{R} \setminus \varnothing = \mathbb{R}$.

Des points 3. et 4. de la proposition ci-dessus, il découle

Corollaire 1 *Soit* (X, τ) *un espace topologique et* A *une partie de* X.

1. *A est fermée si et seulement si A contient sa frontière,*

$$A \text{ fermée} \iff \partial A \subset A.$$

2. *A est ouverte si et seulement si A ne rencontre pas sa frontière,*

$$A \text{ ouverte} \iff A \cap \partial A = \varnothing.$$

On distingue **deux types de points adhérents.**

Définition 5 (Points isolés, points d'accumulation) *Soit* (X, τ) *un espace topologique et* A *une partie non vide de* X. *Pour* $x \in \overline{A}$, *on a deux possibilités :*

i) *Soit il existe un voisinage V de x tel que $V \cap A = \{x\}$. On dit que x est un point isolé de A. Dans ce cas $x \in A$.*

ii) *Soit pour tout voisinage V de x, on a $V \cap A \neq \{x\}$, i.e. V contient au moins un point de A distinct de x. On dit que x est un point d'accumulation de A.*

L'ensemble des points d'accumulation de A est appelé ensemble dérivé de A et est noté A'.

Ainsi,

$$\begin{aligned}
x \text{ point isolé de } A &\iff \exists V \in V(x) : \quad V \cap A = \{x\}, \\
x \text{ point d'accumulation de } A &\iff \forall V \in V(x) : \quad V \cap A \neq \varnothing \text{ et } V \cap A \neq \{x\} \\
&\iff \forall V \in V(x) : \quad (V \setminus \{x\}) \cap A \neq \varnothing.
\end{aligned}$$

Remarque 7 Il s'ensuit immédiatement de la définition 5 que tout point adhérent à A et n'appartenant pas à A est un point d'accumulation, i.e.

$$\overline{A} \setminus A \subset A'.$$

Remarque 8 Des définitions 4 et 5, découle que

$$\overline{A} = A \cup A'.$$

Exemple 23 Sur $X = \{a, b, c, d, e\}$ muni de la topologie $\tau = \{\varnothing, X, \{a, b\}, \{c, d, e\}\}$, donner les points d'accumulation et les points isolés de l'ensemble $A = \{b, c, d\}$.

Réponse : $\overline{A} = X$, $A' = \{a, c, d, e\}$, b est le seul point isolé de A.

Exemple 24 Sur $X = \{a, b, c, d, e\}$ muni de la topologie $\tau = \{\varnothing, X, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}\}$, donner les points d'accumulation et les points isolés de l'ensemble $A = \{b, c, d\}$.

Réponse : $\overline{A} = \{b, c, d, e\}$, $A' = \{b, c, d, e\}$, aucun point isolé dans A.

Exemple 25 Dans $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle,

i) 0 et 1 sont des points isolés de l'ensemble $A = \{0, 1\}$. Plus généralement, tous les points d'un sous-ensemble fini de $\mathbb{R}$ sont isolés.

ii) 2 est un point isolé de l'ensemble $A = [0, 1] \cup \{2\}$. Le reste des points de A sont des points d'accumulation : $A' = [0, 1]$.

iii) tout point de $\mathbb{Z}$ est isolé.

iv) tout point de $\mathbb{R}$ est un point d'accumulation de $\mathbb{Q}$ et de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Exemple 26 Dans un espace topologique discret, tous les points sont isolés.

Comme A contient ses points isolés, il résulte du point 4. de la proposition 5 que

Corollaire 2 *Une partie A d'un espace topologique est fermée si et seulement si A contient ses points d'accumulation.*

Preuve. A fermée $\implies A = \overline{A} \implies A' \subset A$.

$A' \subset A \implies A' \cup A = A \implies \overline{A} = A \implies A$ fermée. ■

3 Espaces séparés

Définition 6 (Espace séparé) *Un espace topologique X est dit espace séparé (ou de Hausdorff) si pour tout couple (a, b) d'éléments distincts de X, il existe deux voisinages V_a de a et V_b de b tels que $V_a \cap V_b = \varnothing$.*

Remarque 9 Il revient au même de dire que X est séparé si pour tout couple (a, b) d'éléments distincts de X, il existe un ouvert $\mathcal{O}_a$ contenant a et un ouvert $\mathcal{O}_b$ contenant b tels que $\mathcal{O}_a \cap \mathcal{O}_b = \varnothing$.

Exemple 27 $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle est séparé. Pour deux réels distincts a et b, on peut prendre $V_a =]a-h, a+h[$ et $V_b =]b-h, b+h[$ avec $h = \frac{|b-a|}{2}$.

Exemple 28 On munit $X = \{a, b\}$ de la topologie $\tau = \{\varnothing, \{a\}, \{a, b\}\}$.
(X, τ) n'est pas séparé car il n'existe aucune paire de voisinages V_a de a et V_b de b t.q. $V_a \cap V_b = \varnothing$.

Exemple 29 On munit $X = \{a, b, c, d, e\}$ de la topologie $\tau = \{\varnothing, X, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}\}$.
(X, τ) n'est pas séparé car il n'existe aucun ouvert $\mathcal{O}_c$ contenant c et aucun ouvert $\mathcal{O}_d$ contenant d t.q. $\mathcal{O}_c \cap \mathcal{O}_d = \varnothing$.

Exemple 30 Un espace topologique discret est séparé. Pour deux points distincts a et b, on peut prendre $\mathcal{O}_a = \{a\}$ et $\mathcal{O}_b = \{b\}$.

Exemple 31 Un espace topologique grossier, contenant plus de deux points, ne peut être séparé.

Proposition 9 *Dans un espace séparé X, tout singleton est fermé et, par conséquent, toute partie finie est fermée.*

Preuve. Il suffit de montrer que $\{x\}$ est fermé, où $x \in X$ est arbitraire. Soit $y \in X \setminus \{x\}$ (on suppose que X n'est pas un singleton). Alors on peut choisir un ouvert $\mathcal{O}_y$ qui contient y mais pas x. Il s'ensuit que $X \setminus \{x\} = \bigcup_{y \in X \setminus \{x\}} \mathcal{O}_y$ qui est alors réunion d'ouverts, donc ouvert. Par conséquent, $\{x\}$ est fermé. ■

Proposition 10 *Dans un espace séparé, un point x est un point d'accumulation d'une partie A si et seulement si tout voisinage de x coupe A en un nombre infini de points.*

Preuve. Laissée en exercice. ■

De la proposition ci-dessus découle le

Corollaire 3 *Une partie finie d'un espace séparé n'admet aucun point d'accumulation.*

Définition 7 *Un espace topologique séparé X est dit <u>normal</u> s'il vérifie la condition suivante : "Pour chaque paire A, B de fermés disjoints de X, il existe des ouverts disjoints $\mathcal{O}_A$ et $\mathcal{O}_B$ avec $A \subset \mathcal{O}_A$ et $B \subset \mathcal{O}_B$".*

4 Densité, séparabilité

Définition 8 *Soient A et B deux parties d'un espace topologique (X, τ). On dit que A est dense dans B si $B \subset \overline{A}$, i.e. si tout point de B est adhérent à A.*
Si A est dense dans X, i.e. $\overline{A} = X$, on dit que A est partout dense.

Exemple 32 Dans $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle, on a
- $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont partout denses.
- $A =]0, 1[$ est dense dans $B = [0, 1[$ car $B \subset \overline{A} = [0, 1]$.

Exemple 33 On munit $X = \{a, b, c, d, e\}$ de la topologie $\tau = \{\varnothing, X, \{a\}, \{a, c, d\}\}$.
$A = \{a, d\}$ est partout dense car $\overline{A} = X$.

Exemple 34 Dans un espace topologique grossier X, toute partie non vide est partout dense.

Exemple 35 Dans un espace topologique discret X, la seule partie partout dense est X lui-même.

Proposition 11 *Soient A, B et C trois parties d'un espace topologique (X, τ). Si A est dense dans B et si B est dense dans C, alors A est dense dans C. Autrement dit, la notion de densité est transitive.*

Preuve. $(B \subset \overline{A}$ et $C \subset \overline{B}) \implies (\overline{B} \subset \overline{A}$ et $C \subset \overline{B}) \implies C \subset \overline{A}$. ■

La proposition suivante fournit une caractérisation importante de densité.

Proposition 12 *Une partie A d'un espace topologique (X, τ) est dense dans X si et seulement si tout ouvert non vide de X rencontre A*

$$\overline{A} = X \iff \forall \mathcal{O} \in \tau \setminus \{\varnothing\} : \ \mathcal{O} \cap A \neq \varnothing.$$

Preuve. Supposons $\overline{A} = X$ et soit $\mathcal{O}$ un ouvert non vide de X, alors il existe un point $x \in X$ tel que $x \in \mathcal{O} \subset X = \overline{A}$. Par conséquent, $A \cap \mathcal{O} \neq \varnothing$ car $\mathcal{O}$ est un voisinage de x lequel est adhérent à A.

Inversement, supposons que tout ouvert non vide de X rencontre A. Soit $x \in X$; tout voisinage V de x contient un ouvert $\mathcal{O}$. Comme $\mathcal{O} \cap A \neq \varnothing$, alors $V \cap A \neq \varnothing$, ce qui signifie que $x \in \overline{A}$. Conclusion : $\overline{A} = X$. ■

Définition 9 *Un ensemble X est dit dénombrable s'il existe une bijection ϕ de $\mathbb{N}$ sur X, c'est-à-dire si l'on peut ranger les éléments de X en une suite*

$$X = \{\phi(0), \phi(1), ..., \phi(n), ...\}$$

où $\phi(n) \neq \phi(p)$ si $n \neq p$. La bijection ϕ peut aussi être notée de façon indicielle : $\phi(n) = x_n$; alors

$$X = \{x_0, x_1, ..., x_n, ...\} .$$

Exemple 36 $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont des ensembles dénombrables, alors que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont non dénombrables.

Définition 10 *On dit qu'un espace topologique (X, τ) est séparable s'il admet une partie finie ou dénombrable partout dense.*

Exemple 37 $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle est séparable puisque l'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$ est dénombrable et $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

Exemple 38 Un espace topologique discret ne peut être séparable sauf s'il est fini ou dénombrable.

Remarque 10 Il n'y a aucun lien entre la notion d'espace séparé et celle d'espace séparable.

Proposition 13 *Dans un espace topologique séparable, toute famille d'ouverts non vides deux à deux disjoints est nécessairement finie ou dénombrable.*

Preuve. Soient $D = \{x_n \ ; \ n \in \mathbb{N}\}$ une partie finie ou dénombrable et dense dans un espace topologique X et $(\mathcal{O}_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts non vides deux à deux disjoints de X. D'après la proposition 12, pour tout $i \in I$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \in \mathcal{O}_i$. Soit $n_i = \inf \{n \in \mathbb{N} \ ; \ x_n \in \mathcal{O}_i\}$, alors l'application $i \mapsto n_i$ est injective de I dans $\mathbb{N}$, donc I est fini ou dénombrable. ■

5 Bases d'ouverts, bases de voisinages

Définition 11 *Soit (X, τ) un espace topologique et x un point de X.*

- *On dit qu'une famille $\mathcal{B}$ d'ouverts est une base d'ouverts de (X, τ) (ou base de la topologie τ) si tout ouvert $\mathcal{O} \in \tau$ s'écrit comme réunion d'éléments de $\mathcal{B}$.*

– *On dit qu'une famille $\mathcal{B}(x)$ de voisinages de x ($\mathcal{B}(x) \subset \mathcal{V}(x)$) est une base de voisinages de x (ou système fondamental de voisinages de x) si tout voisinage V de x contient un voisinage W de x appartenant à $\mathcal{B}(x)$:*

$$\forall V \in \mathcal{V}(x),\ \exists W \in \mathcal{B}(x) : \quad W \subset V.$$

Exemple 39 Dans un espace topologique discret X, la famille $\mathcal{B} = \{\{x\}\ ;\ x \in X\}$ est une base d'ouverts et $\mathcal{B}(x) = \{\{x\}\}$ est une base de voisinages du point $x \in X$.

Exemple 40 Dans $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle, la famille de tous les intervalles ouverts $\mathcal{B} = \{]a, b[\ ;\ a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$ constitue une base d'ouverts, et la famille $\mathcal{B}(x) = \{]x - h, x + h[\ ;\ h > 0\}$ (des intervalles ouverts centrés en x) est une base de voisinages du point $x \in \mathbb{R}$.

Remarque 11 Tout point x d'un espace topologique (X, τ) admet une base de voisinages. Il s'agit de la famille des ouverts de X contenant x :

$$\mathcal{B}(x) = \{\mathcal{O} \in \tau\ ;\ x \in \mathcal{O}\}.$$

Remarque 12 Si deux topologies τ_1 et τ_2 sur un ensemble X admettent une même base d'ouverts, alors elles sont équivalentes. Ainsi, la donnée d'une base d'ouverts suffit pour déterminer la topologie correspondantes.

Remarque 13 Il convient dans certaines situations de remplacer une condition portant sur tous les voisinages d'un point x de X par une condition équivalente portant sur une base de voisinages du point x. Par exemple, si $\mathcal{B}(x)$ est une base de voisinages de x alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :

i) $\forall V \in \mathcal{V}(x) : \quad V \cap A \neq \varnothing$

ii) $\forall V \in \mathcal{B}(x) : \quad V \cap A \neq \varnothing.$

Ainsi, dans plusieurs situations, il est possible de se limiter à des raisonnements sur les éléments d'une base d'ouverts au lieu de manipuler la totalité des ouverts.

Proposition 14 (Caractérisation d'une base d'ouverts) *Soit (X, τ) un espace topologique et $\mathcal{B}$ une famille d'ouverts. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

i) *$\mathcal{B}$ est une base d'ouverts de (X, τ);*

ii) *Pour tout $\mathcal{O} \in \tau$ et tout $x \in \mathcal{O}$, il existe $B_x \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B_x \subset \mathcal{O}$.*

Preuve. Laissée en exercice. ∎

Le résultat suivant donne une connection entre les bases d'ouverts et les bases de voisinages.

Proposition 15 *Soit (X, τ) un espace topologique et $\mathcal{B}$ une famille d'ouverts. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

i) *$\mathcal{B}$ est une base d'ouverts de (X, τ);*

ii) *Pour tout $x \in X$, la famille $\mathcal{B}(x) = \{\mathcal{O} \in \mathcal{B}\ ;\ x \in \mathcal{O}\}$ (des éléments de $\mathcal{B}$ contenant x) est une base de voisinages de x.*

Preuve. Laissée en exercice. ∎

Proposition 16 *Un espace topologique à base finie ou dénombrable d'ouverts est séparable.*

Preuve. Soit I un ensemble fini ou dénombrable d'indices, et soit $\{B_n\}_{n \in I}$ une base d'ouverts non vides. Si pour tout $n \in I$, on choisit un x_n dans B_n, alors la partie finie ou dénombrable $D = \{x_n\ ;\ n \in I\}$ est dense, car elle rencontre tout ouvert non vide de X. ∎

6 Comparaison de topologies, topologie engendrée par une famille de parties

Définition 12 (Comparaison de deux topologies) *Soit X un ensemble muni de deux topologies τ_1 et τ_2. On dira que τ_1 est <u>plus fine</u> que τ_2 (ou que τ_2 est <u>moins fine</u> que τ_1) si τ_2 est incluse dans τ_1, i.e. si tout ouvert de (X, τ_2) est un ouvert de (X, τ_1).*

Exemple 41 On munit $X = \{a, b, c, d, e\}$ des topologies :

$$\begin{aligned}
\tau_1 &= \{\varnothing, X, \{a\}, \{a, c, d\}, \{a, b, e\}\}, \\
\tau_2 &= \{\varnothing, X, \{a\}, \{a, c, d\}\}, \\
\tau_3 &= \{\varnothing, X, \{a, b\}, \{c, d, e\}\}.
\end{aligned}$$

τ_1 est plus fine que τ_2.
τ_1 et τ_3 sont incomparables ; de même pour τ_2 et τ_3.

Remarque 14 Si τ_1 est plus fine que τ_2 et τ_2 est plus fine que τ_1, alors (X, τ_1) et (X, τ_2) admettent les mêmes ouverts. Dans ce cas, on dira que les topologies τ_1 et τ_2 sont <u>*équivalentes.*</u>

Remarque 15 La relation *"être plus fine"* est une relation d'ordre partiel sur l'ensemble de toutes les topologies possibles sur X ; la topologie grossière étant la moins fine et la topologie discrète la plus fine d'elles.

Remarque 16 Si τ_1 est plus fine que τ_2, alors on a l'implication :

$$(X, \tau_2) \textit{ espace séparé } \implies (X, \tau_1) \textit{ espace séparé.}$$

Proposition 17 *L'intersection d'une famille quelconque $(\tau_i)_{i \in I}$ de topologies définies sur X est une topologie sur X. Elle est moins fine que toutes les topologies τ_i.*

Preuve. Il est clair que $\bigcap\limits_{i \in I} \tau_i$ contient $\varnothing$ et X. D'autre part, chacune des topologies τ_i étant stable par réunion quelconque et intersection finie, il en est de même pour $\bigcap\limits_{i \in I} \tau_i$. ■

Définition 13 (Topologie engendrée) *Soit $\mathcal{P}$ une famille quelconque de parties d'un ensemble X ($\mathcal{P} \subset \mathcal{P}(X)$). La topologie la moins fine contenant $\mathcal{P}$ est appelée topologie engendrée par $\mathcal{P}$. Cette topologie est égale à l'intersection de toutes les topologies sur X contenant $\mathcal{P}$.*

Proposition 18 *Les intersections finies des éléments de $\mathcal{P}$ forment une base d'ouverts de $\widehat{\mathcal{P}}$. Autrement dit, tout élément de $\widehat{\mathcal{P}}$ est une réunion quelconque d'intersections finies d'éléments de $\mathcal{P}$.*

7 Topologie induite, sous-espace topologique

Lemme 1 (Topologie induite) *Soit A une partie non vide d'un espace topologique (X, τ). La famille $\tau_A = \{A \cap \mathcal{O};\ \mathcal{O} \in \tau\}$ définit une topologie sur A.*

Définition 14 *τ_A est appelée topologie induite (ou topologie trace) sur A par τ. La paire (A, τ_A) est appelée sous-espace topologique de (X, τ).*

Ainsi, si ω est une partie de A, alors

$$\omega \text{ est un ouvert dans } A \iff \text{il existe un ouvert } \mathcal{O} \text{ dans } X \text{ tel que } \omega = A \cap \mathcal{O}.$$

De là il vient

Corollaire 4 *Soit A une partie non vide d'un espace topologique (X, τ). On munit A de la topologie induite τ_A.*

i) *Les fermés de A sont les ensembles de la forme $A \cap F$ avec F fermé dans X.*

ii) *Soit a un point de A. Les voisinages de a dans A sont les ensembles de la forme $A \cap V$ avec V voisinage de a dans X.*

Preuve.

i) Pour tout ouvert $\mathcal{O}$ de X, on a

$$A \setminus (A \cap \mathcal{O}) = A \setminus \mathcal{O} = A \cap (X \setminus \mathcal{O}).$$

Donc les fermés de A sont les ensembles de la forme $A \cap F$ avec F fermé dans X.

ii) Soit $a \in A$. Pour tout voisinage V de a dans X, il existe un ouvert $\mathcal{O}$ de X tel que $a \in \mathcal{O} \subset V$. D'où on a $A \cap \mathcal{O} \subset A \cap V$. Or, $A \cap \mathcal{O}$ est un ouvert de A contenant a, donc $A \cap V$ est un voisinages de a dans A.
Réciproquement, si W est un voisinage de a dans A, il existe un ouvert $\mathcal{O}$ de X tel que $a \in A \cap \mathcal{O} \subset W$. Alors $V := \mathcal{O} \cup W$ est un voisinage de a dans X et on a $W = A \cap V$.

■

Exemple 42 On munit $\mathbb{R}$ de la topologie usuelle.
- Si $A = [0, 1[$, alors
la partie $\omega = \left[0, \frac{1}{2}\right[$ est un ouvert dans A car $\omega = A \cap \left]-1, \frac{1}{2}\right[$,
la partie $F = \left[\frac{1}{2}, 1\right[$ est un fermé dans A car $F = A \cap \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.
- Si $A = [0, 1[\cup \{3\}$, alors la partie $\omega = [0, 1[$ est à la fois ouverte et fermée dans A car $\omega = A \cap]-1, 1[= A \cap [-1, 1]$.

Exemple 43 On munit $\mathbb{R}$ de la topologie usuelle. Soit $A = \mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le singleton $\{n\}$ est un ouvert dans $\mathbb{N}$ car

$$\{n\} =]n-1, n+1[\cap \mathbb{N}.$$

Ainsi, la topologie $\tau_{\mathbb{N}}$ induite sur $\mathbb{N}$ par la topologie usuelle de $\mathbb{R}$ est discrète.

Exemple 44 Tout sous-espace d'un espace discret est discret et tout sous-espace d'un espace grossier est grossier.

Remarque 17 Soit A une partie non vide d'un espace topologique (X,τ) et B une partie de A. On a les implications :

$$\begin{aligned} B \textit{ est ouverte dans } X &\implies B \textit{ est ouverte dans } A, \\ B \textit{ est fermée dans } X &\implies B \textit{ est fermée dans } A. \end{aligned}$$

Les réciproques sont fausses en général, comme le montre l'exemple 42.

Dans ce contexte, on a

Proposition 19 *Soit A une partie non vide d'un espace topologique (X,τ). On a*

i) *A est un ouvert dans X $\iff$ tout ouvert dans A est ouvert dans X.*

ii) *A est un fermé dans X $\iff$ tout fermé dans A est fermé dans X.*

Preuve. Supposons A ouvert dans X et soit B un ouvert dans A, alors il existe un ouvert $\mathcal{O}$ dans X tel que $B = \mathcal{O} \cap A$. Comme $\mathcal{O}$ et A sont deux ouverts dans X, B l'est aussi.

Inversement, si tout ouvert dans A est ouvert dans X, alors A est ouvert dans X car ouvert dans A. ∎

Remarque 18 Soit (X,τ) un espace topologique et A un sous-espace topologique de X. Soit B une partie non vide de A. Pour tout ouvert $\mathcal{O}$ de X, on a

$$B \cap \mathcal{O} = (B \cap A) \cap \mathcal{O} = B \cap (A \cap \mathcal{O}).$$

On en déduit que les topologies sur B induites par celle de X et par celle de A coïncident, i.e. $\tau_B = (\tau_A)_B$.

Proposition 20 *Tout sous-espace d'un espace topologique séparé est séparé. On dit que la séparation est une propriété <u>héréditaire</u>.*

Preuve. Soit A un sous-espace topologique d'un espace séparé X. Soient x, y deux points distincts de A. Comme X est séparé, il existe deux voisinages dans X, V de x et V' de y tels que $V \cap V' = \varnothing$. Il s'ensuit que $(A \cap V) \cap (A \cap V') = A \cap (V \cap V') = \varnothing$. Donc $A \cap V$ et $A \cap V'$ sont deux voisinages dans A de x et y respectivement et sont disjoints, ce qui signifie que A est séparé. ∎

Proposition 21 *Un sous-espace d'un espace topologique séparable n'est pas nécessairement séparable. La séparabilité n'est pas une propriété héréditaire.*

Preuve. Laissée en exercice. ∎

8 Suites et limites

Une suite d'éléments d'un ensemble non vide X est une application s de $\mathbb{N}$ (ou d'une partie non vide de $\mathbb{N}$) dans X. L'image $s(n)$ d'un $n \in \mathbb{N}$ par s sera notée x_n et sera appelée terme d'ordre n de la suite s. La suite s sera notée $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(x_n)_n$ ou $(x_0, x_1, x_2, ..., x_n, ...)$. On ne doit pas confondre la suite (x_n), avec l'ensemble de ses termes qu'on note $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$. Par exemple, la suite $(1, -1, 1, -1, ...)$ définie par $x_n = (-1)^n$ est telle que $\{x_n, n \in \mathbb{N}\} = \{-1, +1\}$. Une suite constante a une infinité de termes ayant tous la même valeur. Une suite stationnaire est une suite constante à partir d'un certain rang.
Si $(x_n)_n$ est une suite de X, on appellera sous-suite (ou suite extraite) de $(x_n)_n$ une suite de la forme $(x_{\varphi(n)})_n$ où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une application strictement croissante. Par exemple, $(x_{2n})_n$, $(x_{2n+1})_n$, $(x_{n+1})_n$ ... sont des sous-suites de $(x_n)_n$.
Une sous-suite de $(x_n)_n$ est généralement notée $(x_{n_k})_k$ avec $n_k = \varphi(k)$ ($(n_k)_k$ est alors une suite strictement croissante d'entiers naturels).

Définition 15 *Soient (X, τ) un espace topologique, $(x_n)_n$ une suite de X et $\ell \in X$.*

- *On dit que ℓ est une limite de la suite $(x_n)_n$ ou que $(x_n)_n$ converge vers ℓ quand n tend vers l'infini si pour tout voisinage V de ℓ, il existe un rang à partir duquel tous les termes de la suite sont dans V. Cela se résume en*

$$\forall V \in \mathcal{V}(\ell),\ \exists N_V \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N_V :\ x_n \in V.$$

- *La suite $(x_n)_n$ est dite convergente si elle a une (ou plusieurs) limite, divergente si elle n'a pas de limite.*

Notation 1 Si ℓ est une limite de la suite $(x_n)_n$, on note $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Remarque 19 Dans la définition ci-dessus, il est possible de remplacer l'ensemble des voisinages $\mathcal{V}(\ell)$ par une base $\mathcal{B}(\ell)$ de voisinages de ℓ.

Exemple 45 Une suite stationnaire dans un espace topologique est convergente. En effet, si $(x_n)_n$ est une suite stationnaire alors il existe $a \in X$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait $x_n = a$, alors tout voisinage V de a contient tous les termes de $(x_n)_n$ à partir du rang N.

Exemple 46 Dans un espace topologique discret, une suite $(x_n)_n$ est convergente si et seulement si elle est stationnaire.

Exemple 47 Dans un espace topologique grossier, une suite $(x_n)_n$ converge vers tout point de X. En effet, tout point x de X n'admet qu'un seul voisinage X. Si $(x_n)_n$ est une suite dans X, tout point de X est alors une limite de $(x_n)_n$.

Proposition 22 *Soient $(x_n)_n$ une suite dans un espace topologique X et $\ell \in X$.*

1. *Si X est séparé et si $(x_n)_n$ admet une limite dans X, alors cette limite est unique.*
2. *Si $(x_n)_n$ converge vers ℓ, alors toute sous-suite de $(x_n)_n$ converge également vers ℓ.*
3. *La suite $(x_n)_n$ converge vers ℓ si et seulement si les sous-suites $(x_{2n})_n$ et $(x_{2n+1})_n$ convergent vers ℓ.*

Preuve.

1. Supposons que la suite $(x_n)_n$ ait deux limites distinctes $\ell_1 \neq \ell_2$. Comme X est séparé, il existe $V_1 \in \mathcal{V}(\ell_1)$ et $V_2 \in \mathcal{V}(\ell_2)$ tels que $V_1 \cap V_2 = \varnothing$. D'après la définition 15 des limites, il existe deux entiers N_1 et N_2 tels que

$$(\forall n \geq N_1 : \ x_n \in V_1) \quad \text{et} \quad (\forall n \geq N_2 : \ x_n \in V_2).$$

Mais alors, $x_{\max\{N_1,N_2\}} \in V_1 \cap V_2 = \varnothing$ ce qui est absurde.

■

Notation 2 Si ℓ est la limite d'une suite $(x_n)_n$ dans un espace topologique séparé X, on note ceci $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} x_n$.

Proposition 23 *Soient X un espace topologique, A une partie de X et x un point de X.*

1. *S'il existe une suite $(a_n)_n$ dans A qui converge vers x, alors $x \in \overline{A}$.*
2. *Réciproquement, si $x \in \overline{A}$ et si x admet une base dénombrable de voisinages, alors il existe une suite $(a_n)_n$ dans A qui converge vers x.*

Preuve.

1. Soit V un voisinage de x, alors il existe $N_V \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_V$, on ait $a_n \in V$, donc $V \cap A \neq \varnothing$. Ainsi, tout voisinage V de x rencontre A ce qui signifie que x est un point adhérent à A.
2. Laissée en exercice.

■