# Chapitre 01 : introduction

# Notions de base de la logique mathématique

## 1. Introduction

La logique est la base fondamentale de tous les raisonnements mathématiques. Elle est très importante pour l'énonciation de propositions et l'étude de leur valeur de vérité.

Dans ce premier chapitre, nous introduirons les bases de la logique. Nous présenterons en particulier les définitions d'assertions, ainsi que les différents connecteurs logiques.

Ce chapitre prévoit les notions apparaissant dans les deux chapitres suivants soient la logique propositionnelle et la logique descriptive du premier ordre.

## 2. Assertion (formule ou proposition)

Une assertion est un énoncé mathématique auquel on attribue l'une des deux valeurs logiques : le vrai (V ) ou le faux (F ), mais pas les deux à la fois (C'est le principe du tiers-exclu).

### Exemple 1

1. L'assertion : $3 + 1 = 4$ est vraie.
2. La proposition : Alger est la capitale d'Algérie. est vraie.
3. La proposition : $1 + 1 = 2$ est vraie.
4. La proposition :Un carré a 4 angles droits est vraie.
5. La proposition : il pleut est fausse.
6. La proposition : $2 + 2 = 3$. est fausse.
7. La proposition : $3 > \pi$ est fausse.
8. L'assertion : $2 + 2 = 5$ est fausse.

Toutes les phrases déclaratives précédentes sont des propositions : Les quatre premières phrases sont des propositions dont la valeur de vérité est vraie alors que les quatre dernières sont des propositions mathématiques dont la valeur de vérité est fausse.

### Exemple 2

1. Quelle heure est-il?
2. Lisez-le attentivement.

3. Qu’elle est belle !

4. x=3

5. x + 1 = 2.

6. Il pleuvra demain

7. 4 + 5

Les phrases précédentes ne sont pas des propositions.

# 3. Connecteurs

Dans tout raisonnement mathématique, Ils existent cinq (5) connecteurs logiques, Soient P et Q deux assertions.

## 3.1. La négation non ou ¬

Nous appellerons la négation de P , l'assertion (non P) ou (not P) et qui sera notée sous forme formalisée ¬P ou $\bar{P}$.

### 3.1.1. Table de vérité de la négation

Nous présentons ces définitions en forme de tableaux de vérité, où V:=vrai, et F:=faux.

| **P** | **¬p** |
|---|---|
| V | F |
| F | V |

Table 1.1: Table de vérité de la négation

## 3.2. La négation de la négation

En mathématique, une double négation est considérée comme une affirmation.

**Exemple**

Si p est la proposition (assertion) X= 0, ¬p est la proposition X≠0

Le 05 est non pair donc 05 est impair.

## 3.3. Conjonction (et) ou (∧)

Nous appellerons conjonction de P et Q, l'assertion (P et Q) (P and Q) et qui sera notée (P ∧ Q)

### 3.3.1. La table de vérité de la conjonction

| P | Q | $(P \wedge Q)$ |
|---|---|---|
| V | F | F |
| V | V | V |
| F | F | F |
| F | V | F |

Table 1.2: Table de vérité de la conjonction

Nous dirons que l'assertion $P \wedge Q$ est fausse lorsque l'une au moins des deux assertions est fausse.

**Exemple**

P : La terre est ronde (vraie) et Q : Le ciel est bleu (vraie).

(P et Q) ou $(P \wedge Q)$ se lit donc La terre est ronde ET le ciel est bleu. $(P \wedge Q$ est vraie.

**Remarque**

La conjonction est commutative

$(P \wedge Q) \equiv (Q \wedge P)$

## 3.4. La disjonction (ou) ou ($\vee$)

Nous appellerons disjonction de P ou Q, l'assertion (P ou Q) (P or Q) et qui sera notée $(P \vee Q)$

### 3.4.1. La table de vérité de la disjonction

| P | Q | $(P \vee Q)$ |
|---|---|---|
| V | F | V |
| V | V | V |
| F | F | F |
| F | V | V |

Table 1.3: Table de vérité de la disjonction

Nous dirons que l'assertion (P V Q) est fausse lorsque les des deux assertions p et q sont fausse.

### Exemple

P : Mouhamed  mange la gaulette (vraie)

Q : Mouhamed mange la pomme (fausse)

(P ou Q) ou (P V Q) se lit donc Mouhamed  mange la gaulette OU Mouhamed mange la pomme. (P V Q ) est vraie.

### Remarque

1. La disjonction est commutative
   (P V Q) ≡ (QV P)
2. En mathématiques, le ou est non-exclusif, c'est à dire qu'il comprend la posisibilité que les deux propositions soient vraies. Ainsi la proposition x.y = 0 équivaut à la proposition x = 0 ou y = 0, elle est vraie quand l'un des deux nombres est nul, elle est aussi vraie quand les deux sont nuls.

## 3.5. L'implication ⇒

L'implication de Q par P est la proposition ((¬P) ∨ Q), notée « P ⇒ Q » ou  « P *implique* Q » qui est fausse seulement si la proposition P est vraie et la proposition Q est fausse.  L'implication est vraie dans tous les autres cas. P s'appelle alors l'hypothèse et Q la conclusion. Nous pouvons lire de différentes façons :

Si *P* alors *Q*,

Pour que  *P* il faut *Q*,

Pour que  *Q* il suffit *P* ,

*P* est une condition suffisante pour *Q*,

*Q* est une condition nécessaire de *P*.

### 3.5.1. La table de vérité de l'implication

| **P** | **¬p** | **Q** | **(P ⇒ Q)** | **¬pVQ** |
|---|---|---|---|---|
| V | F | F | F | F |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| V | F | V | V | V |
| F | V | F | V | V |
| F | V | V | V | V |

Table 1.4: Table de vérité de l'implication

**Exemple**

Soit les propositions « P : le quadrilatère ABCD est un carré » et « Q : le quadrilatère ABCD est un rectangle ».

On a alors l'implication logique « P ⇒ Q » qui se lit de la façon suivante « si le quadrilatère ABCD est un carré, alors le quadrilatère ABCD est un rectangle ».

**Remarque**

L'implication Q ⇒ P s'appelle la réciproque de l'implication P ⇒ Q.

## 3.6. Équivalence ⇔

Étant donné des propositions P et Q, l'équivalence logique de P et Q est la nouvelle proposition, notée P ⇔ Q, qui est vraie si et seulement si la biconditionnelle P ↔ Q est une tautologie.

La proposition P ⇔ Q correspond à la proposition (P ⇒ Q) et (Q ⇒ P). Nous pourrons l'exprimer :

P est équivalent à Q,

Pour P , il faut et il suffit Q,

P est une condition nécessaire et suffisante pour Q,

P si et seulement si Q.

### 3.6.1. La table de vérité de l'équivalence

| **P** | **Q** | **(P ⇔ Q)** |
|---|---|---|
| V | F | F |
| V | V | V |

| | | |
|---|---|---|
| F | F | V |
| F | V | F |

Table 1.5: Table de vérité de l'équivalence

### Exercice d'application

Sachant que x, y sont vrais et z est faux, trouver les valeurs de vérité des propositions :

1. $(x \lor (y \land z)) \land (y \lor z)$ .
2. $(y \Rightarrow x) \lor \neg(x \Leftrightarrow y) \land (z \land \neg x)$.

### Solution

Posons 1 = Vrai et 0 = Faux.

1. $(x \lor (y \land z)) \land (y \lor z) \equiv (1 \lor (1 \land 0)) \land (1 \lor 0) \equiv (1 \lor 0) \land 1 \equiv 1 \land 1 \equiv 1$
2. $(y \Rightarrow x) \lor \neg(x \Leftrightarrow y) \land (z \land \neg x) \equiv (1 \Rightarrow 1) \lor \neg(1 \Leftrightarrow 1) \land (0 \land \neg 1) \equiv 1 \lor \neg(1) \land (0 \land 0) \equiv 1 \lor 0 \land 0 \equiv 0$

# 4. Théorèmes d'équivalence (lois)

**Définition :**

Deux fbfs F et G sont équivalentes si et seulement si les valeurs de vérité de F et de G sont les mêmes dans toute interprétation.

Soient A, B et C des formules bien formées.

#### *a. Implication*

$A \Rightarrow B$ cela est équivalent à $\neg A \lor B$

#### *b. Equivalence*

$A \Leftrightarrow B$ cela est équivalent à $(A \Rightarrow B) \land (B \Rightarrow A)$

#### *c. Commutativité*

- $A \land B$ cela est équivalent à $B \land A$
- $A \lor B$ cela est équivalent à $B \lor A$

*d. Associativité*

- (A V B) V C cela est équivalent à A V (B V C)
- (A ∧ B) ∧ C cela est équivalent à A ∧ (B ∧ C)

*e. Distributivité*

- a) A V (B ∧ C) cela est équivalent à (A V B) ∧ (A V C)
- b) A ∧ (B V C) cela est équivalent à (A ∧ B) ∨ (A ∧ C)

*f.*

- a) A ∨ V cela est équivalent à V
- b) A ∧ V cela est équivalent à A

*g.*

- a) A ∨ F cela est équivalent à A
- b) A ∧ F cela est équivalent à F

*h. Complémentarité*

- a) A V¬A cela est équivalent à V
- b) A ∧¬A cela est équivalent à F

*i. Involution*

(¬ (¬A)) cela est équivalent à A

*j. Identité*

- A V A cela est équivalent à A
- A ∧ A cela est équivalent à A

## 5. Lois de Morgan

Les lois de De Morgan permettent de transformer une conjonction en une disjonction (et réciproquement) via la négation.

- $\overline{(A \wedge B)} \leftrightarrow (\overline{A}) \vee (\overline{B})$
- $\overline{(A \vee B)} \leftrightarrow (\overline{A}) \wedge (\overline{B})$.

On peut utiliser ces théorèmes d'équivalence pour transformer une formule bien formée en une autre formule bien formée qui lui est équivalente. Cela va permettre de simplifier l'écriture de formules bien formées.

# 6. Priorité des connecteurs logiques

A) Dans certains ouvrages l'ordre de priorité des connecteurs est : (Le plus prioritaire)

1. $\neg$,
2. $\wedge$,
3. $\vee$,
4. $\rightarrow$,
5. $\leftrightarrow$.

**Exemple 1**

$A \wedge \neg B \vee C \rightarrow D \wedge E$ doit se lire $(((A \wedge (\neg B)) \vee C) \rightarrow (D \wedge E))$

**Exemple 2**

1. $\neg p \wedge q$ se lit $(\neg p) \wedge q$ .
2. $p \wedge q \Rightarrow r$ se lit $(p \wedge q) \Rightarrow r$.
3. $p \vee q \wedge r$ se lit $p \vee (q \wedge r)$.
4. $p \vee q \vee r$ se lit $(p \vee q) \vee r$

B) Et certains ouvrages l'ordre de priorité des connecteurs est : (Le plus prioritaire)

1. $\neg$,
2. $\rightarrow$,
3. $\leftrightarrow$ ,
4. $\wedge$,
5. $\vee$.

Pour enlever cette ambiguïté : Les parenthèses sont toujours prioritaires, donc, une formule sans parenthèses n'est pas une formules bien formée (sauf C. et D.)

C. On omet par abus les parenthèses les plus externes

$(A \vee B)$ devient $A \vee B$

D. Quand il y a un seul connecteur, l'association se fait de gauche à droite. $A \rightarrow B \rightarrow C$ correspond à $((A \rightarrow B) \rightarrow C)$

## Exercice d'application

A) Explicitez le parenthèsage implicite des formules suivantes :

1. a → b → c ;

2. a ∨ b ∧ c ;

3. a ∨ b ∧ c ↔ d → ¬e ∨ f ∧ g

B) Simplifiez au maximum le parenthèse des formules suivantes (voir la table ) :

| | | |
|---|---|---|
| $(a)$ | $((a \vee b))$ | $((a) \wedge (b))$ |
| $\neg(((a) \wedge b))$ | $a \vee (b \wedge c)$ | $(a \vee b) \wedge c$ |
| $(a \wedge (b \to c))$ | $((a \vee b) \wedge c) \leftrightarrow e$ | $(((a \vee b) \wedge c) \leftrightarrow e) \to f$ |
| $(((a \to b) \to c) \to d)$ | $(a \wedge (b \wedge c))$ | $(a \to (b \to c))$ |
| $(\neg(a \vee b))$ | $((a \wedge b) \to c)$ | $((a \wedge b) \vee c) \leftrightarrow (e \to f)$ |

Table des formules à simplifier

## Solution

A)

1. a → b → c ≡ ((a → b) → c)

2. a ∨ b ∧ c ≡ (a ∨ (b ∧ c))

3. a ∨ b ∧ c ↔ d → ¬e ∨ f ∧ g ≡ ((a ∨ (b ∧ c)) ↔ (d → ((¬e) ∨ (f ∧ g ))))

B)

| | | |
|---|---|---|
| $(a) \equiv a$ | $((a \vee b)) \equiv a \vee b$ | $((a) \wedge (b)) \equiv a \wedge b$ |
| $\neg(((a) \wedge b)) \equiv \neg(a \vee b)$ | $a \vee (b \wedge c) \equiv \neg(a \wedge b)$ | $(a \vee b) \wedge c \equiv a \vee b \wedge c$ |
| $(a \wedge (b \to c)) \equiv a \wedge (b \to c)$ | $((a \vee b) \wedge c) \leftrightarrow e \equiv (a \vee b) \wedge c \leftrightarrow e$ | $(((a \vee b) \wedge c) \leftrightarrow e) \to f \equiv ((a \vee b) \wedge c \leftrightarrow e) \to f$ |
| $(((a \to b) \to c) \to d) \equiv a \to b \to c \to d$ | $(a \wedge (b \wedge c)) \equiv a \wedge b \wedge c$ | $(a \to (b \to c)) \equiv a \to (b \to c)$ |
| $(\neg(a \vee b)) \equiv \neg(a \vee b)$ | $((a \wedge b) \to c) \equiv a \wedge b \to c$ | $((a \wedge b) \vee c) \leftrightarrow (e \to f) \equiv a \wedge b \vee c \leftrightarrow e \to f$ |

formules simplifiée

## Exercice d'application

Donnez les tables de vérités des formules suivantes. Puis indiquez les équivalences entre les formules.

1. ¬(p ∧ q),

2. ¬p ∨ ¬q,

3. ¬(p ∨ q),

4. ¬p ∧ ¬q,

5. p ∨ (p ∧ q),

6. p ∧ (p ∨ q),

7. p

## Solution

| p | q | $p \wedge q$ | $\neg(p \wedge q)$ |
|---|---|---|---|
| V | V | V | F |
| V | F | F | V |
| F | V | F | V |
| F | F | F | V |

1.

| p | q | $\neg p$ | $\neg q$ | $\neg p \vee \neg q$ |
|---|---|---|---|---|
| V | V | F | F | F |
| V | F | F | V | V |
| F | V | V | F | V |
| F | F | V | V | V |

2.

| p | q | $p \vee q$ | $\neg(p \vee q)$ |
|---|---|---|---|
| V | V | V | F |
| V | F | V | F |
| F | V | V | F |
| F | F | F | V |

3.

| p | q | $\neg p$ | $\neg q$ | $\neg p \wedge \neg q$ |
|---|---|---|---|---|
| V | V | F | F | F |
| V | F | F | V | F |
| F | V | V | F | F |
| F | F | V | V | V |

4

| p | q | $p \wedge q$ | $p \vee (p \wedge q)$ |
|---|---|---|---|
| V | V | V | V |
| V | F | F | V |
| F | V | F | F |
| F | F | F | F |

5.

| p | q | $p \vee q$ | $p \wedge (p \vee q)$ |
|---|---|---|---|
| V | V | V | V |
| V | F | V | V |
| F | V | V | F |
| F | F | F | F |

6

| p |
|---|
| V |
| F |

7

Les formules équivalentes sont :

1 et 2

3 et 4

5 et 6 et 7

Les équivalences sont :

- $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$
- $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$
- $p \vee (p \wedge q) \equiv p \wedge (p \vee q) \equiv p$

# 7. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les notions de base de la logique mathématique qui vont nous servir dans la logique descriptive et la logique des prédicats. Nous aborderons dans le prochain chapitre la logique d'ordre 0 .