Université d'Oum El Bouaghi — Année universitaire 2023/2024

Introduction à la topologie — Licence 2 - Mathématiques

FEUILLE DE TD N°0

Pour un ensemble X, on note $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble de ses parties, et pour $A \in \mathcal{P}(X)$ on note A^c son complémentaire dans X.

Exercice 1 *Pour tous sous-ensembles A et B d'un ensemble X, montrer les équivalences suivantes :*

1. $A \subset B \iff A \cap B = A$
2. $A \subset B \iff A \cup B = B$
3. $A \subset B \iff A \setminus B = \varnothing$
4. $A \cap B = \varnothing \iff A \subset B^c$
5. $A \setminus B = A \iff A \cap B = \varnothing$
6. $A \subset B \iff A^c \supset B^c$.

Exercice 2 *Soit X un ensemble et soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille quelconque de $\mathcal{P}(X)$. Pour $I = \varnothing$, on convient de poser $\bigcup_{i\in I} A_i = \varnothing$ et $\bigcap_{i\in I} A_i = X$. Etablir les relations :*

1. $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i\in I} A_i^c$
2. $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i\in I} A_i^c$
3. $A \cap \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} (A \cap A_i)$
4. $A \cup \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} (A \cup A_i)$

Exercice 3

1. *Soit l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x + 1$. Déterminer l'image (directe) de chacun des ensembles suivants :*

$$A = \{1, 2, 4\}, \quad B = \{x \in \mathbb{Z}\ ;\ x \geq -1\}, \quad C = \mathbb{N}.$$

2. *Soit l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2 - 1$. Déterminer l'image réciproque de chacun des ensembles suivants :*

$$A = \{2, 3, 7\}, \quad B = \mathbb{N}, \quad C = [-1, +\infty[.$$

3. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par :*

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x \geq 0, \\ 1, & x < 0. \end{cases}$$

Déterminer l'image directe de $\mathbb{R}$ puis l'image réciproque de l'intervalle $[1, 2]$.

Exercice 4 *Soient X et Y deux ensembles et f une application de X dans Y. Montrer que pour toute partie A de X et toute partie B de Y, on a*

1. $f\left(f^{-1}(B)\right) \subset B$ *et* $A \subset f^{-1}\left(f(A)\right)$,
2. $f^{-1}\left(B^c\right) = \left(f^{-1}(B)\right)^c$.

Exercice 5 *Soient X et Y deux ensembles et f une application de X dans Y.*

1. *Pour des familles quelconques $(A_i)_{i\in I}$ de $\mathcal{P}(X)$ et $(B_i)_{i\in I}$ de $\mathcal{P}(Y)$, montrer que l'on a :*

   i) $f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$

   ii) $f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i)$

   iii) $f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$

   iv) $f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$

2. *Donner un exemple d'inclusion stricte pour la deuxième relation.*
3. *Montrer que dans la deuxième relation il y a égalité si et seulement si f est injective.*

Exercice 6 *Soit l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto |x| + 2x$.*

1. *Montrer que f est bijective.*
2. *Déterminer l'application réciproque f^{-1}.*