Université Larbi Ben M'Hidi

Faculté des Sciences et des Sciences Appliquées

Département Génie Mécanique

Cours d'Elasticité

Dr. MOKHTARI 2023/2024

Contenu chapitre 3

Chapitre 3 : Tenseurs des déformations

I. Vecteur de déplacement
II. Tenseur des déformations
III. Transformation des longueurs et des angles
IV. Déformations principales
V. Invariants scalaires du tenseur des déformations
VI. Tenseur sphérique et déviateur

Système des références

- Du point de vue physique, **un corps matériel** M est **un ensembles de particules** (points matériels);

- **La cinématique** a pour objectif la description, dans l'espace-temps, des mouvements des corps matériels indépendamment des causes et des lois qui les régissent.

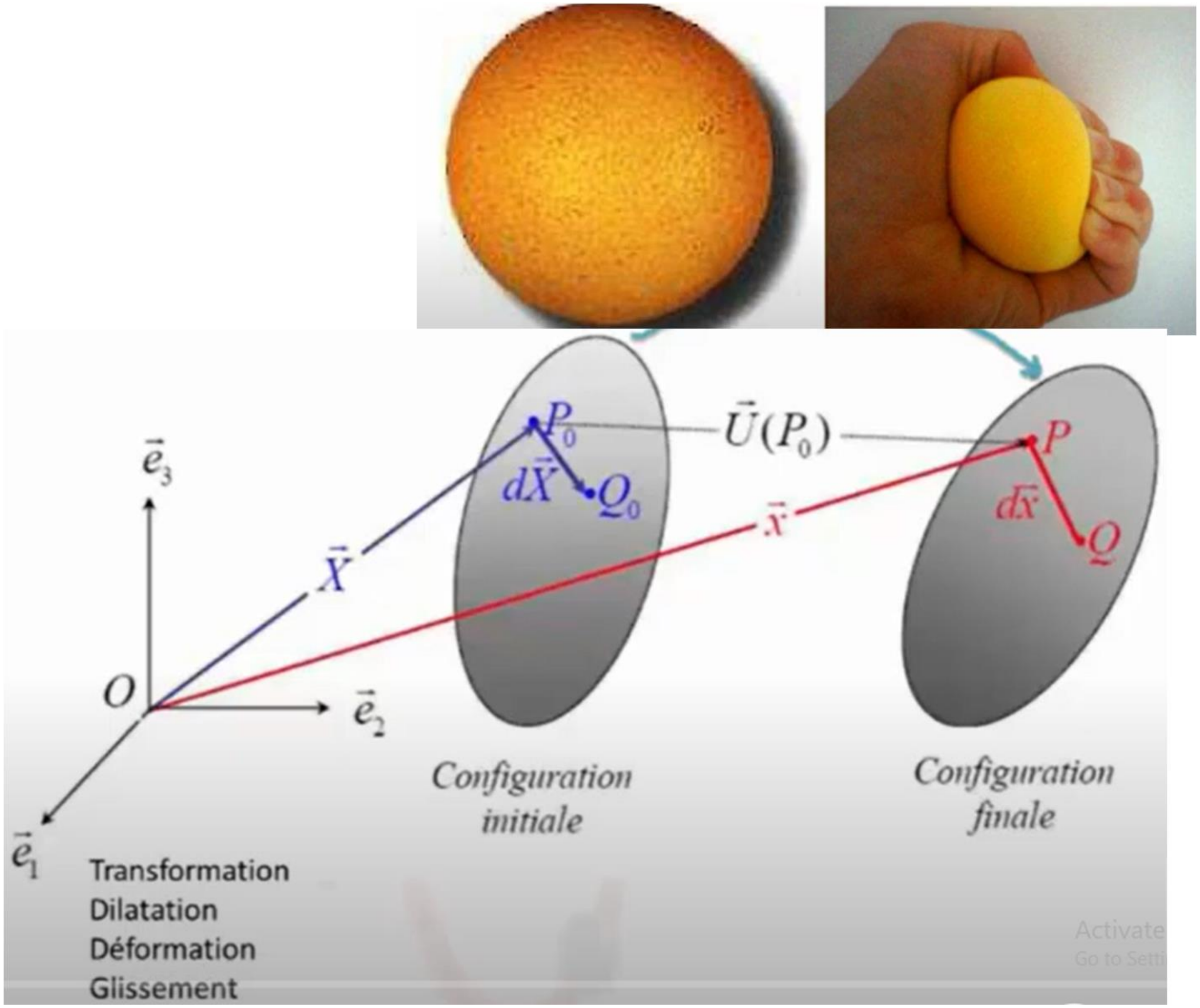
Système des références

- Lorsqu'un corps est soumis des sollicitations extérieures, les particules qui le composent se déplacent dans l'espace. De ce fait, ce corps peut être soumis a différents type **rigide** ou a **déformation provoquées** par les déplacement relatifs des particules entre elles;

- Les mouvements peuvent être décrets soit:

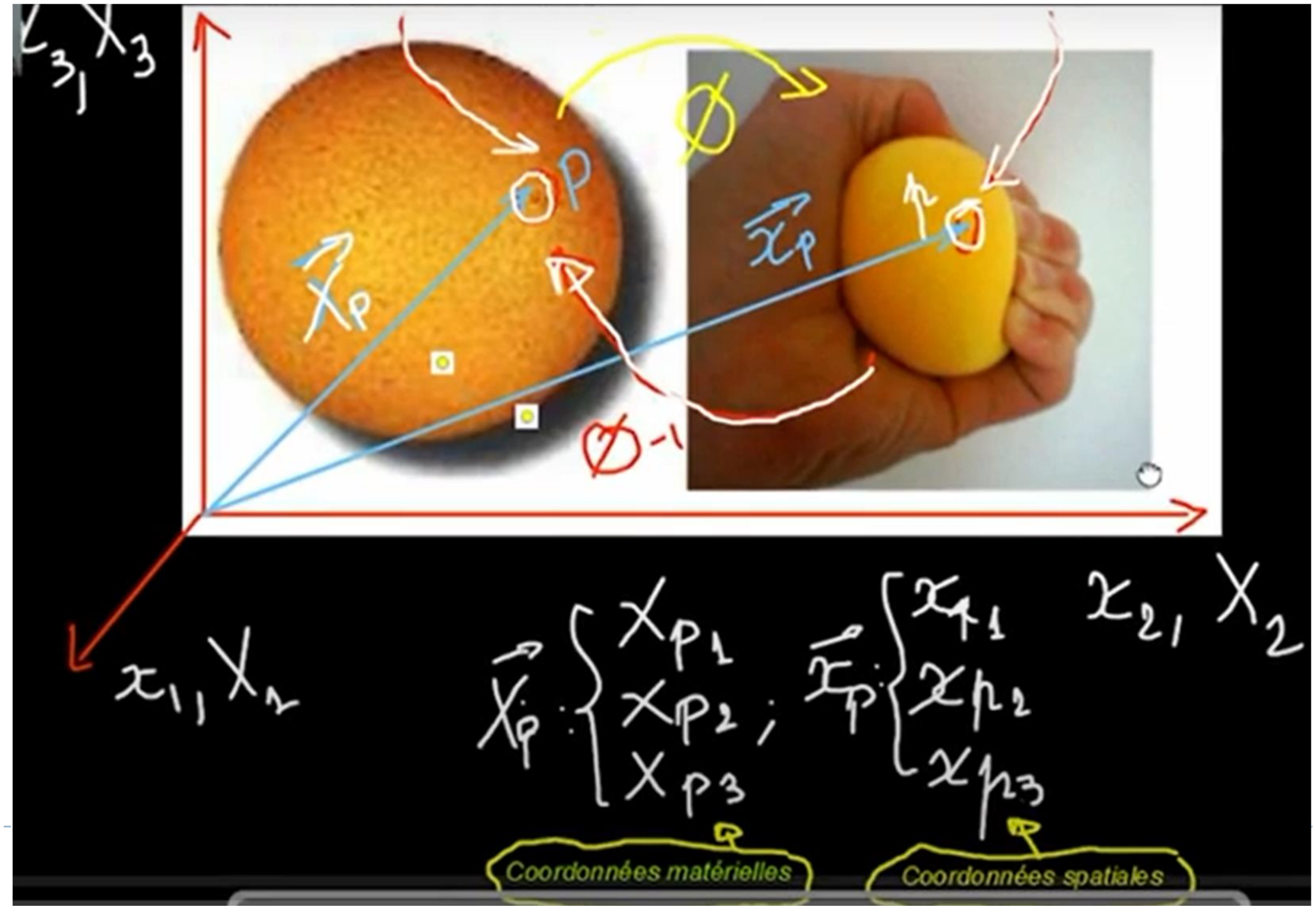
- en **variable d'Euler**;
- en **variations de Lagrange**

Description de la cinematique d'un milieu continu

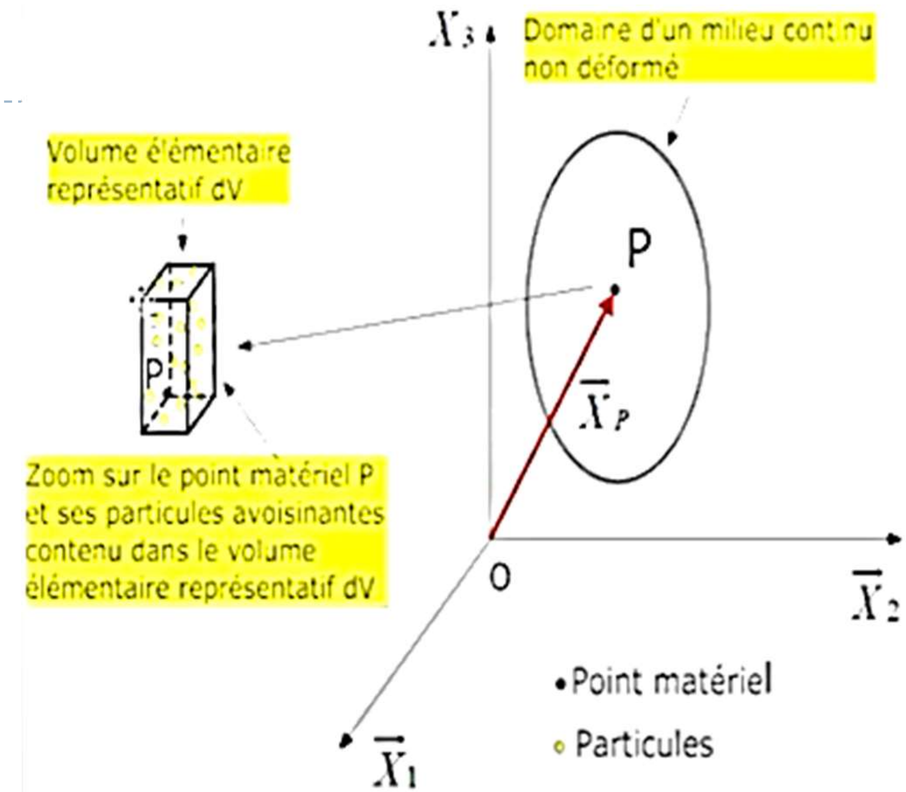


- Pour représenter la position d'une particule d'un milieu contenu, il faut introduire un repère d'espace supposé fixe au cours du temps: un référentiel.

- La configuration de référence (configuration non déformée) $\boldsymbol{\Omega_0}$ c'est les positions de ses particules a un instant de référence t_0 quelconque mais fixé.



Soit P une particule quelconque mais fixée. La position P a l'instant de référence est repérée par le vecteur $\vec{X}_P$, la position p a l'instant relatif a la configuration $\vec{x}_P$. Pour toute particules du milieu contenu, les composantes du vecteur $\vec{x}_P$ sont les **variables eulériennes** ou spatiale, les composantes du vecteur $\vec{X}_P$ sont les **variables lagrangiennes** ou matérielles.



$\vec{X}_P$: vecteur du point matériel P

- Chaque particules est définie par ses coordonnées relative a la configuration non déformée, repérées par le vecteur $\vec{X}$
- $\vec{X}$: ce sont les coordonnées matérielles caractérisant la particule.
- Chacune des particules se déplace selon sa propre trajectoire la quelle est définie par la position $\vec{x}$, fonction du temps t.
- $\vec{x}$: ce sont les coordonnées spatiales caractérisant l'image de la particule.
- l'ensemble des trajectoire de toute les particules sont définie par l' équation suivante:
- $\vec{x} = \Phi(particule, t)$; Φ est appelé '*transformation*'

Autrement , les deux vecteurs position $\vec{X}$ et $\vec{x}$ sont lies par les biais de la transformation $\boldsymbol{\Phi}$ donné par la relation suivante:

$\vec{x} = \boldsymbol{\Phi}(\vec{X}, t)$; $\boldsymbol{\Phi}(\vec{X}, t)$ est une application (vectorielle) bijective

$\vec{X} = \boldsymbol{\Phi}^{-1}(\vec{x}, t)$

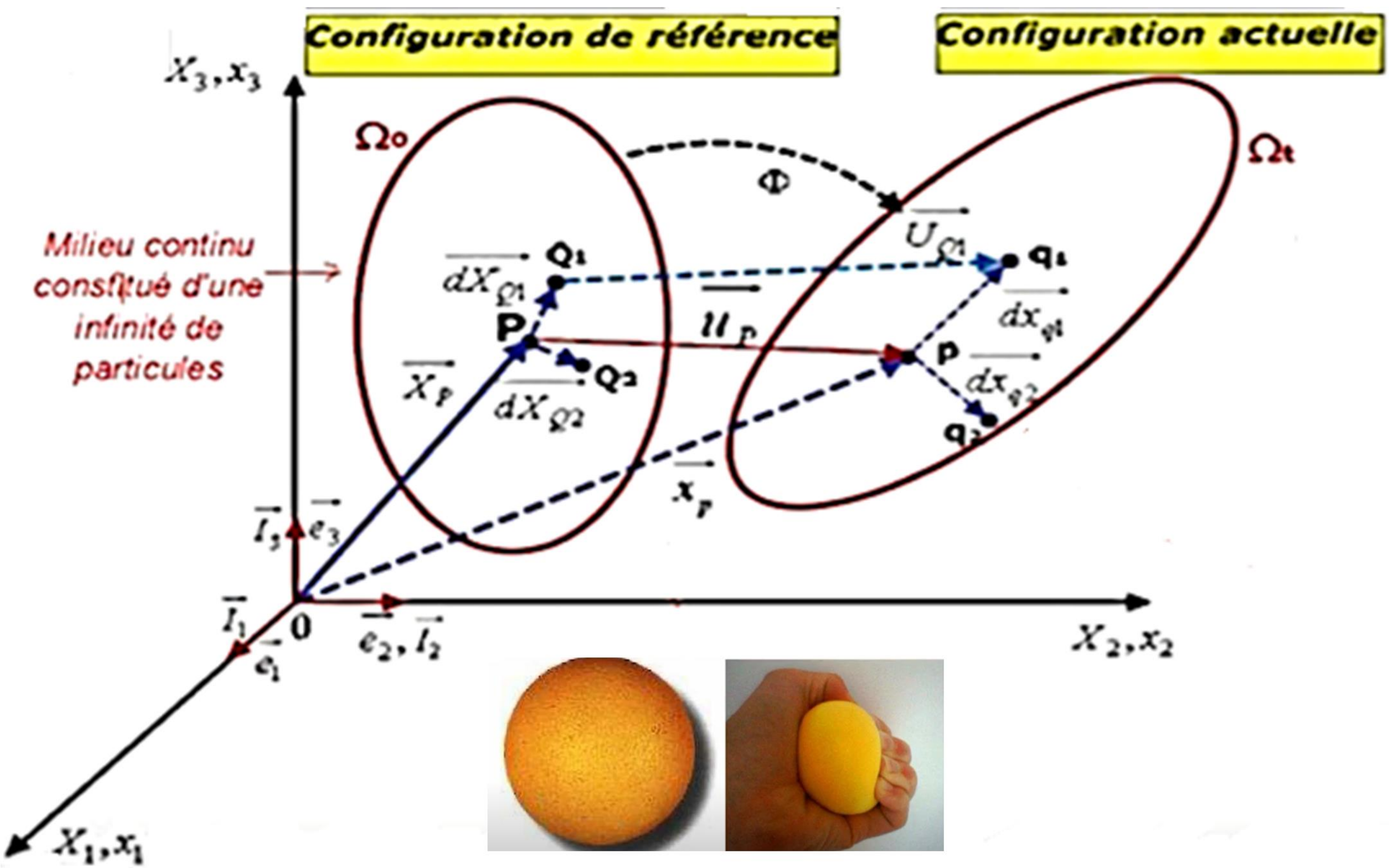
On appelle:

Le couples $(\vec{X}, t)$: variables de Lagrange

Le couples $(\vec{x}, t)$: variables d'Euler

Remarque:

Les variables de Lagrange se révèlent en générale bien adaptées a l'étude des mouvements des corps solides et les variables d'Euler a l'étude des écoulements fluides


Configuration de référence
Configuration actuelle
Milieu continu constitué d'une infinité de particules
Φ
P
Q1
Q2
q1
q2
X_3, x_3
X_2, x_2
X_1, x_1
0

- Le volume matériel élémentaire dV est construit sur la base des deux vecteurs matériels élémentaires non lies $\overrightarrow{dX}_{Q1}$ et $\overrightarrow{dX}_{Q2}$.
- Apres déformation, les positions des particules P, Q_1 et Q_2 sont données par la transformation Φ (fonction image):

$$\vec{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{P}} = \boldsymbol{\Phi}\left(\vec{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{P}}, \boldsymbol{t}\right);\ \vec{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{Q1}} = \boldsymbol{\Phi}(\vec{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{Q1}}, \boldsymbol{t}); \vec{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{Q2}} = \boldsymbol{\Phi}(\vec{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{Q2}}, \boldsymbol{t})$$

Le champ de déplacement $\vec{u}_P$ de la particule P est donné par:

- $\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{P}} = \vec{\boldsymbol{u}}(\overrightarrow{\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{P}}}, \boldsymbol{t}) = \vec{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{P}} - \vec{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{P}} = \emptyset\left(\overrightarrow{\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{P}}}, \boldsymbol{t}\right) - \overrightarrow{\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{P}}}$

Le tenseurs gradient de la transformation est:

$$\overline{\overline{\boldsymbol{F}}}\left(\vec{\boldsymbol{X}}, \boldsymbol{t}\right) = \frac{\boldsymbol{\delta}\emptyset\left(\vec{\boldsymbol{X}}, \boldsymbol{t}\right)}{\boldsymbol{\delta}\vec{\boldsymbol{X}}} = \frac{\boldsymbol{\delta x}\left(\vec{\boldsymbol{X}}, \boldsymbol{t}\right)}{\boldsymbol{\delta}\vec{\boldsymbol{X}}}$$

Transformation rigide

- Une transformation homogène est appelle mouvement de corps rigide lorsque la distance entre touts couple de points matériels reste inchangée au cours du mouvement.

II. Gradient de la transformation

- Le gradient de la transformation $\overline{\overline{F}}(\vec{X},t)$ caractérise la déformation “locale”, c’est a dire la déformation au voisinage du point considéré. Ce tenseur est appelé aussi matrice **Jacobéenne** définie par la relation:

- $$\overline{\overline{F}}(\vec{X},t) = \frac{\delta\vec{x}(\vec{X},t)}{\delta\vec{X}} \quad [F] = F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}$$

- On défini le tenseur gradient de la transformation inverse $[F]^{-1}$ par

$$[F]^{-1} = F_{ij}{}^{-1} = \frac{\partial X_i}{\partial x_j}$$

Relation entre le tenseur gradient de la transformation et gradient du vecteur déplacement

On cherche à trouver une relation entre le tenseur gradient de déformation et le vecteur déplacement donné par la relation **($\vec{u}_P = \vec{x}_P - \vec{X}_P$)**.

- En écriture indicielle le vecteur déplacement est donné par la relation suivante :

$$U_i = x_i - X_i$$

Si on dérive cette expression par rapport à X_j on obtient :

$$\frac{\partial U_i}{\partial X_j} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} - \frac{\partial X_i}{\partial X_j}$$

Sachant que :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial X_i}{\partial X_j} = 1 & \text{si } i = j \\ \dfrac{\partial X_i}{\partial X_j} = 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial X_i}{\partial X_j} = \delta_{ij}$$

- Si on remplace $F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}$

- Alors:

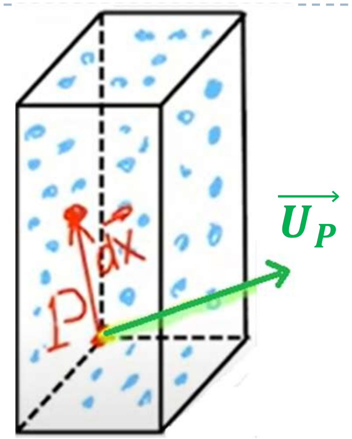
$$\frac{\partial U_i}{\partial X_j} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} - \delta_{ij} = F_{ij} - \delta_{ij}$$

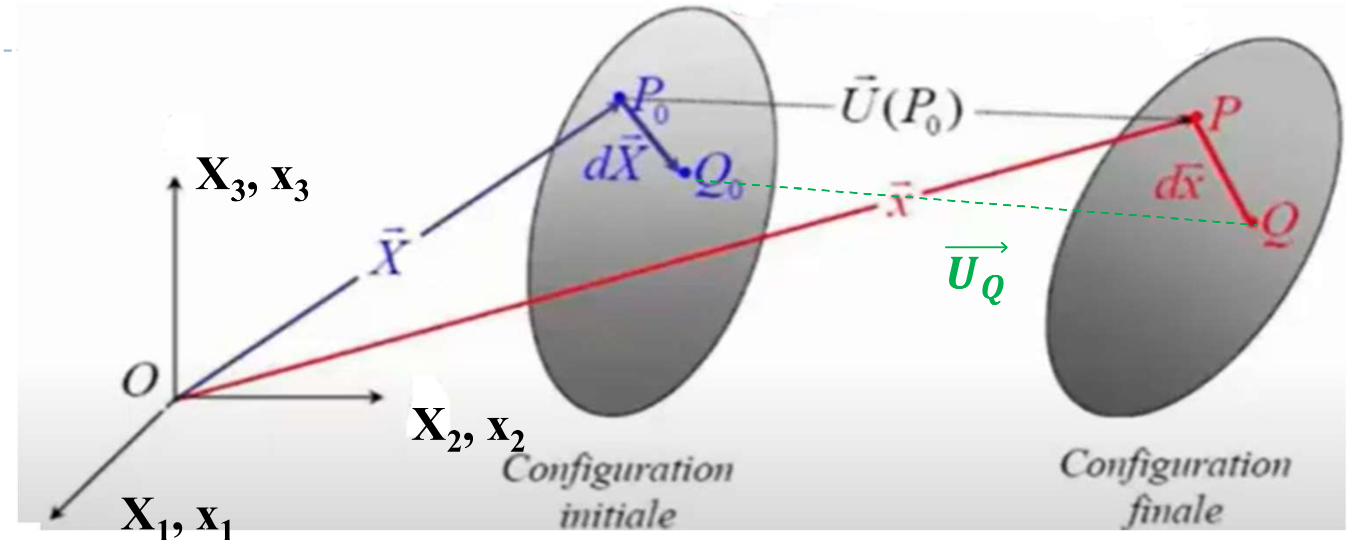
Ce qui conduit finalement à :

$$F_{ij} = \underbrace{\boxed{\frac{\partial U_i}{\partial X_j}}}_{\overline{\overline{grad}}\,\vec{u}} + \underbrace{\boxed{\delta_{ij}}}_{\bar{\bar{I}}}$$

$$\bar{\bar{F}} = \bar{\bar{I}} + \overline{\overline{grad}}\,\vec{u}$$

Relation entre le vecteur déplacement d'un point matériel et le vecteur déplacement de ses particules voisines





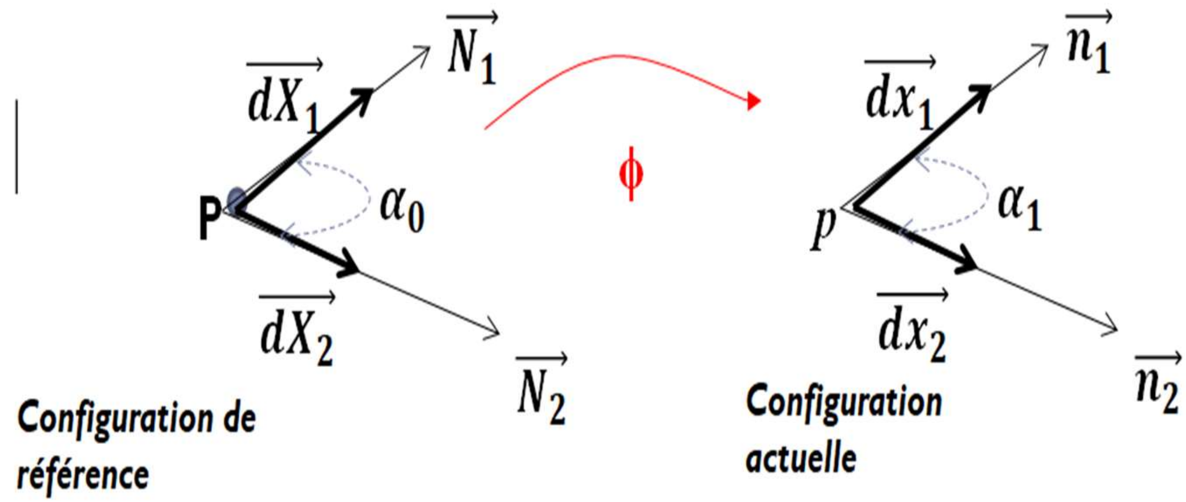
- $\vec{U}_P + d\vec{x} = \vec{U}_Q + d\vec{X}$
- $\vec{U}_Q = \vec{U}_P + d\vec{x} - d\vec{X}$
- $\vec{U}_Q = \vec{U}_P + \bar{\bar{F}} d\vec{X} - d\vec{X}\bar{\bar{I}}$
- $\vec{U}_Q = \vec{U}_P + d\vec{X}\boxed{(\bar{\bar{F}} - \bar{\bar{I}})} \longleftarrow \overline{\overline{grad}}\vec{U}$
- $\boldsymbol{\vec{U}_Q = \vec{U}_P + (\overline{\overline{grad}}\,\vec{U}_P) d\vec{X}}$

Le vecteur déplacement de l'ensemble des particules voisines d'un point matériel s'exprime en fonction du déplacement de ce dernier

3. Définition du tenseur des dilatations de Cauchy-Green

- Pour quantifier les valeurs ***de longueurs*** et ***d'angles*** au cours de la transformations, observons la manière dont évolue le produit scalaire des deux vecteurs élémentaires $d\overrightarrow{X_1}$ et $d\overrightarrow{X_2}$ lorsqu'il se transforment en $d\overrightarrow{x_1}$ et $d\overrightarrow{x_2}$, $(\overrightarrow{N_1}, \overrightarrow{N_2}$:vecteurs unitaire $\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}$:vecteurs unitaire) soit:
- $d\overrightarrow{X_1} = dX_1.\overrightarrow{N_1}$,
- $d\overrightarrow{X_2} = dX_2.\overrightarrow{N_2}$

- $d\overrightarrow{x_1}.d\overrightarrow{x_2} = \left(\bar{\bar{F}}.d\overrightarrow{X_1}\right).\left(\bar{\bar{F}}.d\overrightarrow{X_2}\right) = d\overrightarrow{X_1}(\bar{\bar{F}}^T.\bar{\bar{F}}.).d\overrightarrow{X_2}$
- $\qquad = \boldsymbol{d\overrightarrow{X_1}\bar{\bar{C}}.d\overrightarrow{X_2}}$
- **C**: tenseur des dilatations de Cauchy Green droit (



$$cos\alpha_0 = \frac{\overrightarrow{dX_1}.\overrightarrow{dX_2}}{|\overrightarrow{dX_1}|.|\overrightarrow{dX_2}|} = \overrightarrow{N_1}.\,\overrightarrow{N_2}$$

$$cos\alpha_1 = \frac{\overrightarrow{dx_1}.\,\overrightarrow{dx_2}}{|\overrightarrow{dx_1}|.\,|\overrightarrow{dx_2}|}$$

$\frac{dx}{dX} = \lambda(\overrightarrow{N_1})$ (dilatation dans la direction N_1

$\Delta\alpha = \alpha_1 - \alpha_0$ la distortion entre les 2 direction ,$\overrightarrow{N_1}$ et$\overrightarrow{N_2}$