

CHAPITRE 2

Méthode des trois moments

2.1. Méthode des trois moments :

La méthode des trois moments s'applique aux systèmes dits poutres continues. On suppose que l'effet de l'effort tranchant est négligé.

2.2. Principe de la méthode des trois moments :

Cette méthode consiste à déterminer les moments fléchissant dans le cas des poutres continues. C'est-à-dire des poutres qui reposent sur plus de deux appuis.

Il existe plusieurs façons pour déterminer le degré d'hyperstaticité :

Le degré d'hyperstaticité est égal au nombre des appuis intermédiaires.

$$d = r - 3 \quad (2.1)$$

r : le nombre de liaisons (réactions)

Ou bien :

$$d = n_a - 2 \quad (2.2)$$

n_a : le nombre d'appuis

Ou bien :

Le degré d'hyperstaticité est égal au nombre des appuis intermédiaires.

Exemples :

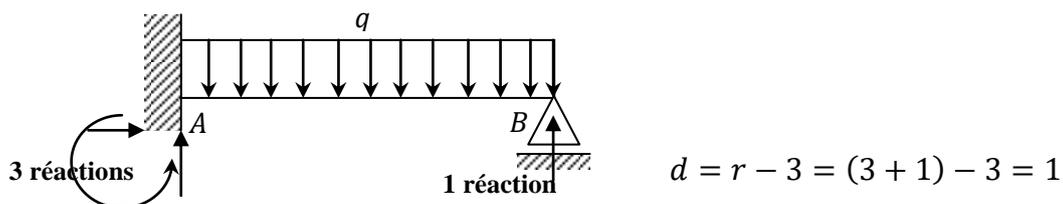


Figure 2.1. : Poutre sur 2 appuis (1 Encastrement et 1 simple)

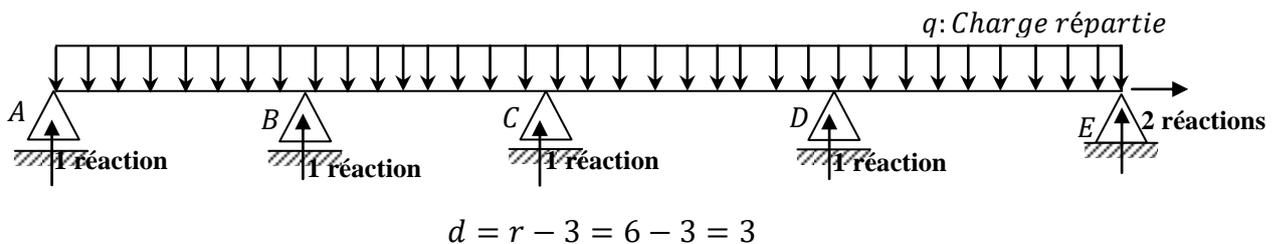


Figure 2.2. : Poutre sur 5 appuis (1 double et 4 simples)

2.3. Calcul des moments fléchissant dans les appuis :

- Considérons l'exemple de la figure 2.3. Le degré d'hyperstaicité de cette poutre est égal à $N-2$ où N représente le nombre d'appuis
- Prenons pour inconnues hyperstatiques les moments fléchissants agissant au droit de chaque appui intermédiaire. Pour ce faire, on procède à des coupures de manière à supprimer la liaison de moment au niveau de chaque appui.
- Dans chaque appui nous avons deux rotations (une à gauche et l'autre à droite).
- Pour une poutre de $N-1$ travées, on numérote les appuis de 1 à N . La travée l_i est comprise entre les appuis (i) et $(i+1)$, avec une rigidité EI_i .

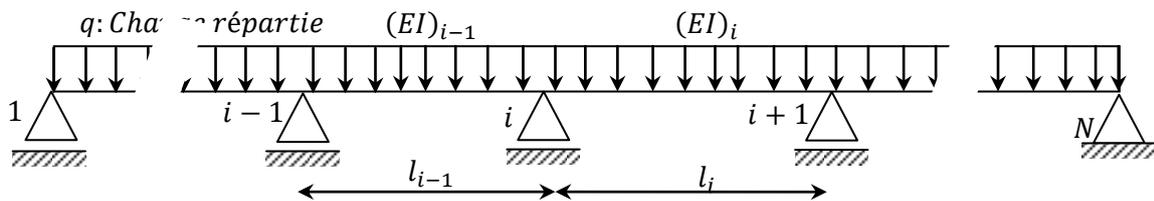


Figure 2.3. : Poutre continue sur N appuis

Une poutre continue comportant $N-1$ travées peut être décomposée en $N-1$ poutres isostatiques sur lesquelles s'appliquent les mêmes charges que sur la poutre continue avec en plus les moments aux appuis. Nous obtenons alors pour la travée $i-1$ et i :

- M_{i-1} : désigne le moment sur l'appui A_{i-1}
- M_i : désigne le moment sur l'appui A_i
- M_{i+1} : désigne le moment sur l'appui A_{i+1}

$$\sum \text{des rotations au niveau du point } (i) = 0$$

On a deux types de rotations :

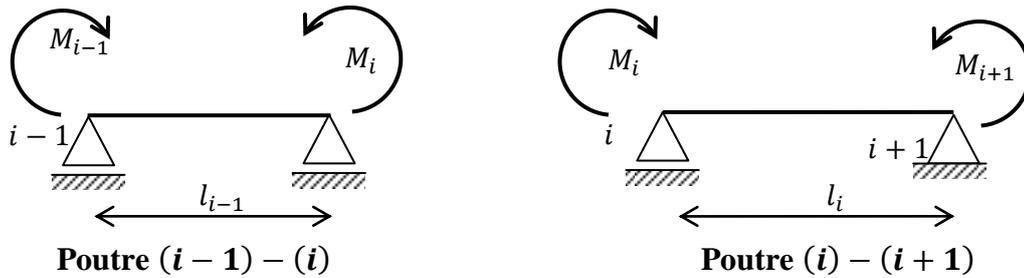
- Rotation due aux charges extérieures $(\varphi_{ig} + \varphi_{id})$
- Rotation due aux moments fléchissants $(\overline{\varphi}_{ig} + \overline{\varphi}_{id})$

$$\sum \text{des rotations au niveau du point } (i) = (\varphi_{ig} + \varphi_{id}) + (\overline{\varphi}_{ig} + \overline{\varphi}_{id}) = 0$$

A- Rotations dues aux moments fléchissants ($\overline{\varphi}_{ig} + \overline{\varphi}_{id}$)

Les déformations en général et spécifiquement les rotations dues aux moments fléchissants peuvent être évaluée par l'une des méthodes analytiques connues comme par exemple : la méthode de CASTIGLIANO ou Maxwell-Mohr et aussi la méthode graphique de VERETCHAGUINE.

Ici le calcul des rotations est effectué par la méthode de Mohr.



A1- Poutre (i-1) - (i)

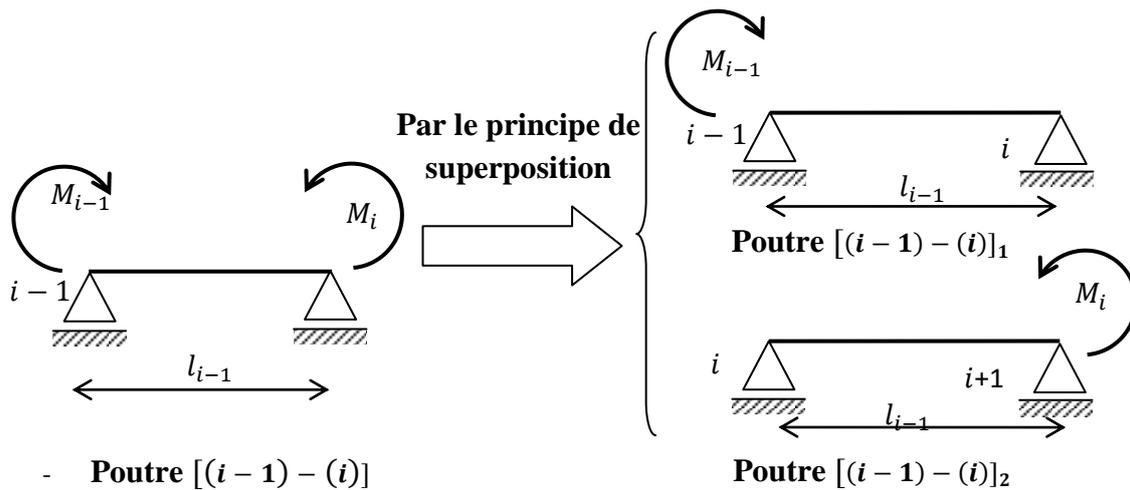
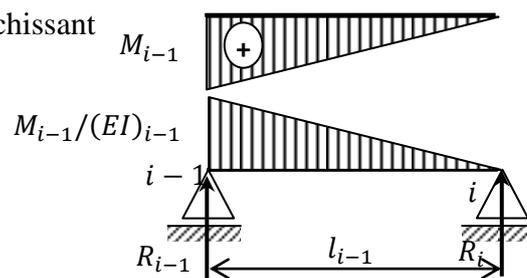


Diagramme des moments fléchissant

Poutre auxiliaire



$$\sum M/(i-1) = 0 \Rightarrow R_i l_{i-1} = \frac{1}{2} \frac{M_{i-1}}{(EI)_{i-1}} l_{i-1} \left(\frac{1}{3} l_{i-1} \right)$$

$$R_i = \frac{1}{6} \frac{M_{i-1}}{(EI)_{i-1}} l_{i-1}$$

- **Poutre [(i-1) - (i)]**

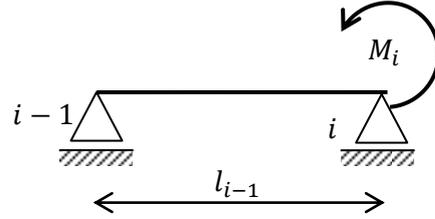
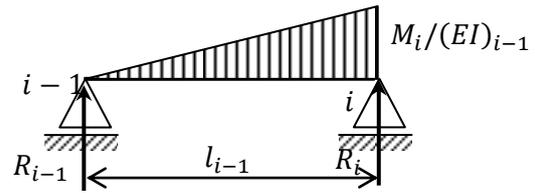


Diagramme des moments fléchissant



Poutre auxiliaire



$$\sum M/(i-1) = 0 \Rightarrow R_i l_{i-1} = \frac{1}{2} \frac{M_i}{(EI)_{i-1}} l_{i-1} \left(\frac{2}{3} l_{i-1} \right)$$

$$R_i = \overline{\varphi}_{ig} = \frac{1}{3} \frac{M_i}{(EI)_{i-1}} l_{i-1}$$

$$\overline{\varphi}_{ig} = \frac{1}{6} \frac{M_{i-1}}{(EI)_{i-1}} l_{i-1} + \frac{1}{3} \frac{M_i}{(EI)_{i-1}} l_{i-1}$$

A2- Poutre (i) - (i+1)

De la même pour la poutre (i) - (i+1)

$$\overline{\varphi}_{id} = \frac{1}{3} \frac{M_i}{(EI)_i} l_i + \frac{1}{6} \frac{M_{i+1}}{(EI)_i} l_i$$

$$\sum \text{Rotations/point } (i) = (\varphi_{ig} + \varphi_{id}) + (\overline{\varphi}_{ig} + \overline{\varphi}_{id}) = 0 \quad (2.3)$$

$$(\varphi_{ig} + \varphi_{id}) + \frac{1}{6} \frac{M_{i-1}}{(EI)_{i-1}} l_{i-1} + \frac{1}{3} \frac{M_i}{(EI)_{i-1}} l_{i-1} + \frac{1}{3} \frac{M_i}{(EI)_i} l_i + \frac{1}{6} \frac{M_{i+1}}{(EI)_i} l_i = 0$$

$$(\varphi_{ig} + \varphi_{id}) + \frac{1}{6} \frac{M_{i-1}}{(EI)_{i-1}} l_{i-1} + \frac{1}{3} \frac{M_i}{(EI)_{i-1}} l_{i-1} + \frac{1}{3} \frac{M_i}{(EI)_i} l_i + \frac{1}{6} \frac{M_{i+1}}{(EI)_i} l_i = 0$$

$$(\varphi_{ig} + \varphi_{id}) + \frac{1}{6} \frac{M_{i-1}}{(EI)_{i-1}} l_{i-1} + \frac{1}{3} M_i \left(\frac{l_{i-1}}{(EI)_{i-1}} + \frac{l_i}{(EI)_i} \right) + \frac{1}{6} \frac{M_{i+1}}{(EI)_i} l_i = 0$$

Cette équation est appelée méthode des trois moments (dite aussi méthode des rotations) ou aussi méthode de Clapeyron. Elle permet de calculer les moments aux appuis intermédiaires des poutres continues.

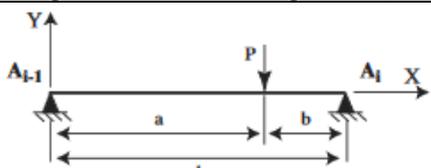
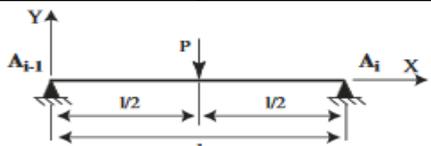
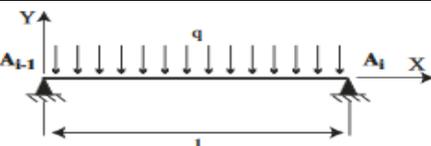
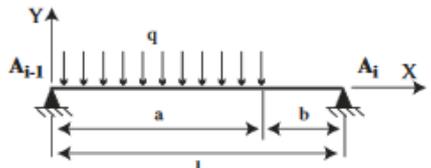
Si toutes les travées de la poutre ont la même rigidité EI , la relation devient :

$$M_{i-1}l_{i-1} + 2(l_{i-1} + l_i)M_i + M_{i+1}l_i = -6EI(\varphi_{ig} + \varphi_{id}) \quad (2.4)$$

B- Rotations dues aux charges extérieures ($\varphi_{ig} + \varphi_{id}$)

Le tableau suivant résume les valeurs des rotations au niveau des appuis pour différentes charges extérieures :

Tableau 2.1 : les valeurs des rotations au niveau des appuis pour différentes charges extérieures.

Schéma statique (géométrie et chargement)	$-6EI\varphi_{i-1}$	$-6EI\varphi_i$
	$-\frac{Pab(a+l)}{l}$	$-\frac{Pab(a+l)}{l}$
	$-\frac{3}{8}Pl^2$	$-\frac{3}{8}Pl^2$
	$-\frac{1}{24}ql^3$	$-\frac{1}{24}ql^3$
	$-\frac{1}{24l}qa^2(2l-a)^2$	$-\frac{1}{24l}qa^2(2l-a)^2$