CHAPITRE 1

Calcul des structures hyperstatiques (statiquement indéterminées)

1.1. Structures isostatiques (statiquement déterminées) et hyperstatiques (statiquement indéterminées) :

Si nous considérons un corps (structure) arbitraire soumis à l'action d'un système de forces dans l'espace x, y, z (Figure 1.1), son équilibre d'ensemble peut être défini par les équations d'équilibre statique :

Les équations algébriques

- $\sum F_x = 0 \quad \sum M_x = 0$
- $\sum F_y = 0 \quad \sum M_y = 0$
- $\sum F_z = 0 \quad \sum M_z = 0$

Les équations vectorielles

- $\sum \vec{F} = 0$
- $\sum \vec{M} = 0$

Les sommations se rapportent à toutes les composantes de forces et de moments par rapport aux trois axes de référence x y z. Nous pouvons donc écrire 6 équations d'équilibre dans le cas général d'un corps tridimensionnel. Lorsque toutes les forces agissent dans le même plan, seules trois équations d'équilibre sont exploitables.

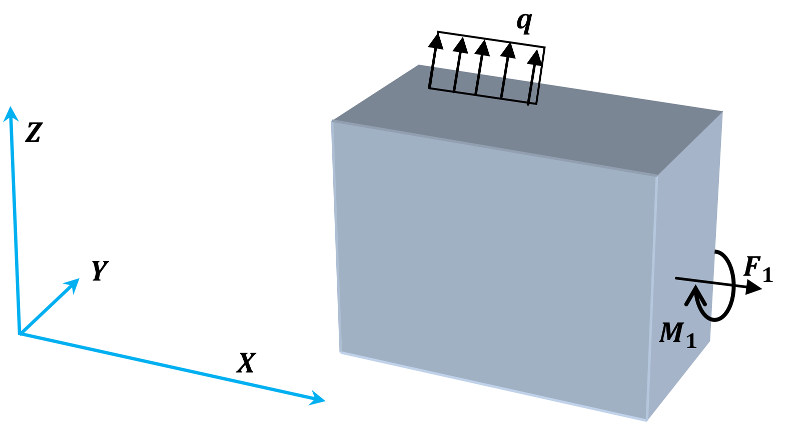


Figure 1.1. : Corps tridimensionnel soumis à un ensemble de forces

Dans le cas des **systèmes isostatiques**, les composantes de réaction se calculent au moyen des équations d'équilibre de la statique seules (équilibre vertical $\sum F_V = 0$, équilibre horizontal $\sum F_H = 0$ et équilibre des moments de rotation $\sum M_{/point} = 0$).

Dans le cas contraire où le nombre d'équations de la statique ne suffit pas pour déterminer les réactions (les inconnues), on est en présence d'une structure **hyperstatique**.

1.2. Exemple introductif :

Voici deux poutres (Figure 1.2. et 1.3.) qui ne diffèrent que par leurs appuis. Elles sont de longueur L et soumises à une charge uniformément répartie sur toute la longueur.

Equilibre vertical : $\sum F_V = V_A - ql = 0$

Equilibre horizontal : $\sum F_H = H_A = 0$

Equilibre de rotation $\sum M_{/A} = M_A + ql^2/2 = 0$

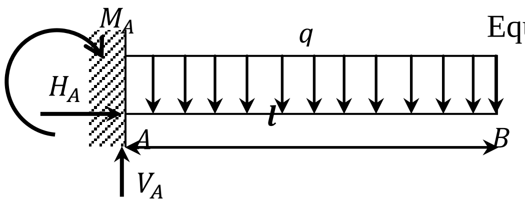


Figure 1.2. : Structure isostatique

Equilibre vertical : $\sum F_V = V_A - ql + V_B = 0$

Equilibre horizontal : $\sum F_H = H_A = 0$

Equilibre de rotation $\sum M_{/A} = M_A + ql^2/2 = 0$

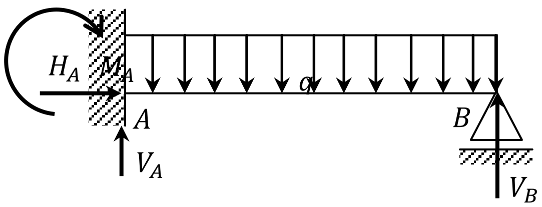


Figure 1.3. : Structure hyperstatique

- Poutre (**Figure 1.2.**) : 3 équations indépendantes linéaires ($\sum F_V = 0$, $\sum F_H = 0$ et $\sum M_{/point} = 0$), 3 inconnues (V_A, H_A et M_A) : les réactions d'appui peuvent être calculées.
- Poutre (**Figure 1.3.**) : 3 équations indépendantes linéaires ($\sum F_V = 0$, $\sum F_H = 0$ et $\sum M_{/point} = 0$), 4 inconnues (V_A, V_B, H_A et M_A) : il manque une équation pour calculer les réactions d'appuis. On dit que le système est une fois hyperstatique.

Ainsi on définit le degré d'hyperstaticité d'un système comme une valeur qui donne le nombre d'inconnus supplémentaires.

1.3. Liaisons surabondantes :

On appelle liaisons surabondantes, les liaisons supplémentaires qu'il faudrait supprimer du système hyperstatique pour obtenir un système isostatique. On a deux types de liaisons surabondantes :

- Les liaisons surabondantes extérieures que l'on retrouve dans les appuis (les réactions).

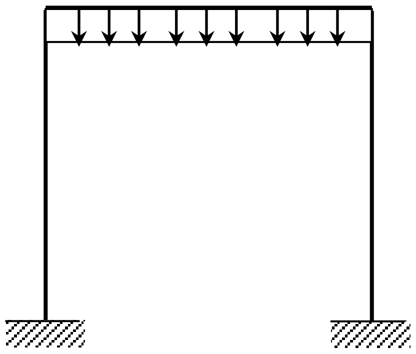


Figure 1.4. : Cadre simple

- Les liaisons surabondantes intérieures sont celles qui proviennent des contours fermés (on ouvrant le contour les efforts internes deviennent des inconnues supplémentaires).

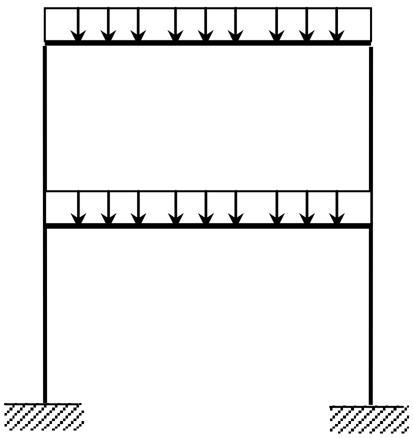
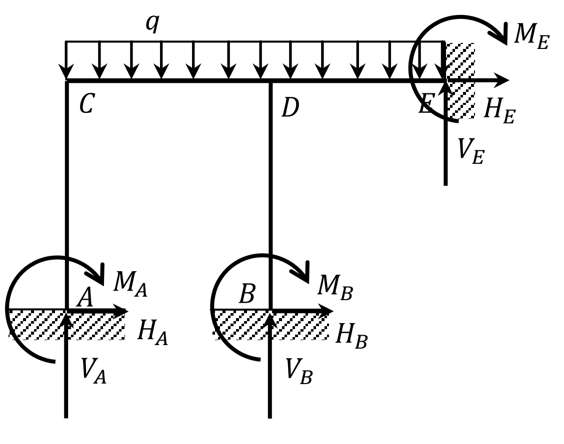


Figure 1.5. : Portique à deux niveaux et une travée

Le nombre de liaisons surabondantes représente le degré d'hyperstaticité du système.



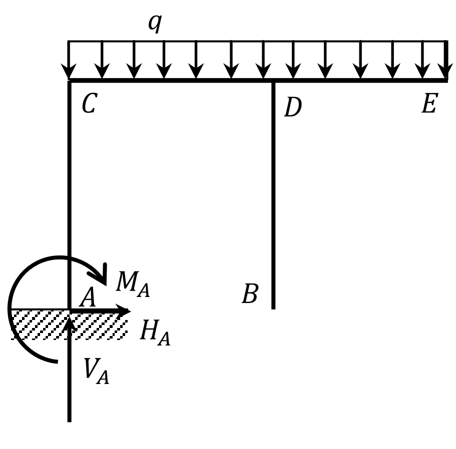


Figure 1.6.a: Portique hyperstatique

(6 liaisons supplémentaires d=6)

Figure 1.6.b : Portique isostatique

(6 liaisons supplémentaires supprimées)

1.4. Méthodes fondamentales de calcul des structures hyperstatiques :

Nous avons vu précédemment qu'un système est hyperstatique si le nombre d'inconnues de liaison est supérieur au nombre d'équations issues de la statique. Cette différence est appelée le degré d'hyperstaticité du système.

Pour étudier et analyser une structure de degré d'hyperstaticité d, il est nécessaire d'établir d équations supplémentaires (dites équations de compatibilités). Les méthodes consistent à choisir un système de base à partir duquel on détermine le système isostatique (SI) le plus simple (Figure 1.7).

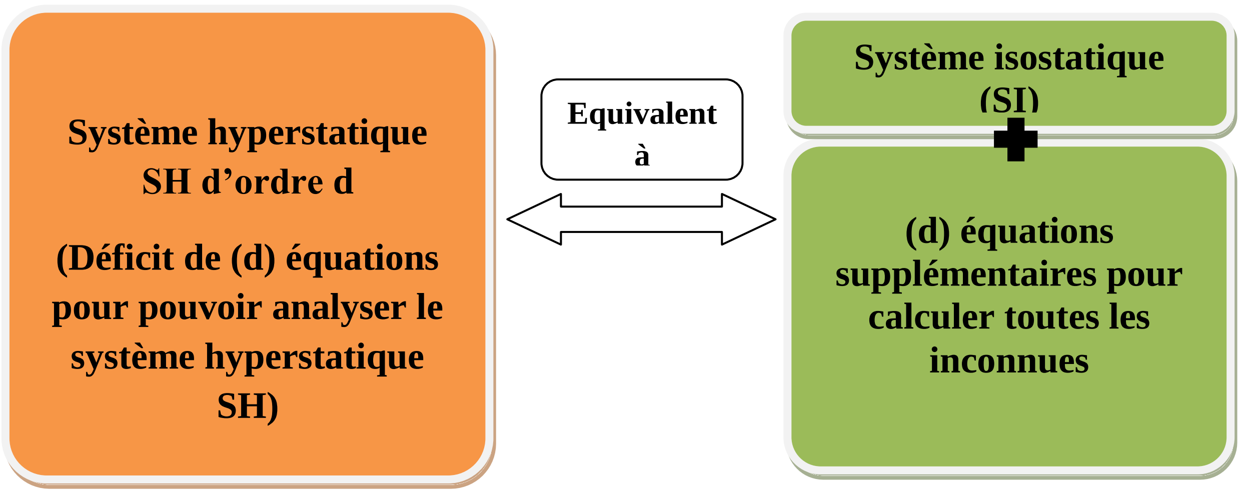


Figure 1.7. : Calcul des systèmes hyperstatiques

En raison de l'interdépendance entre les efforts et les déplacements, il en résulte deux manières d'aborder le calcul des structures hyperstatiques, c'est-à-dire :

- soit en s'intéressant aux efforts (dans les liaisons surabondantes) (méthode des forces, **chapitre 3**),
- soit en s'intéressant aux déplacements (méthode des déplacements, **chapitre 4**).

1.5. Calcul du degré d'hyperstaticité :

Généralement, le nombre de liaisons surabondantes représente le degré d'hyperstaticité. Il existe plusieurs méthodes pour calculer ce degré:

1.5.1. Méthode de la suppression des liaisons surabondantes :

Cette méthode consiste à supprimer des liaisons jusqu'à ce que la structure devienne isostatique.

1.5.2. Méthode des contours fermés :

Le degré d'hyperstaticité est donné par la formule suivante :

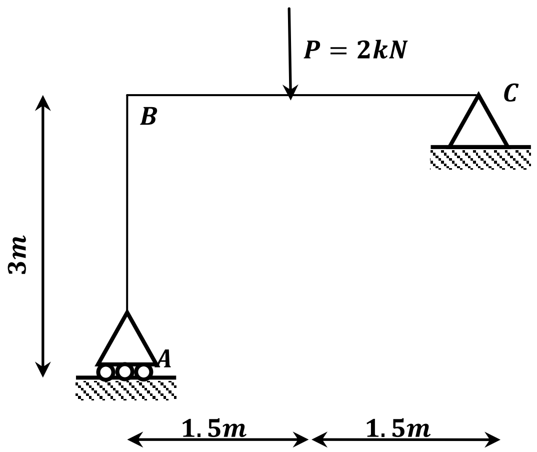
$$d = 3c - a - 2s$$

c : Le nombre de contours de la structure

a : Le nombre d'appuis doubles

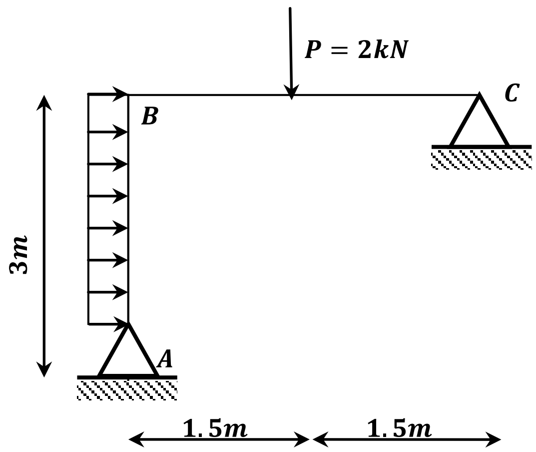
s : Le nombre d'appuis simples

Applications :



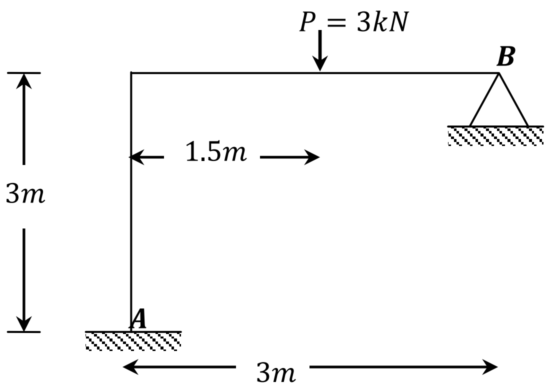
$d = 3c - a - 2s = 3 * 1 - 1 - 2 * 1 = \mathbf{0}$

(Système est isostatique)



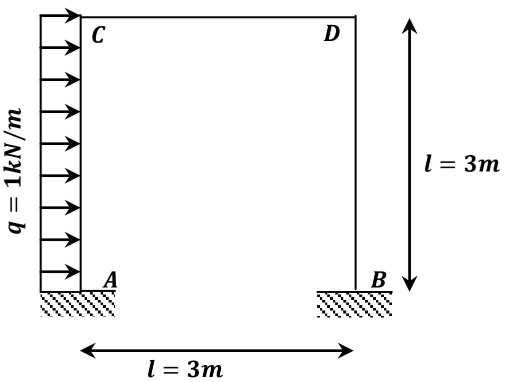
$d = 3 * 1 - 2 - 2 * 0 = \mathbf{1}$

(Système est hyperstatique)



$d = 3 * 1 - 1 - 2 * 0 = \mathbf{2}$

(Système est hyperstatique)



$d = 3 * 1 - 0 - 2 * 0 = \mathbf{3}$

(Système est hyperstatique)

1.5.3. Cas des poutres en treillis :

La formule ci-dessous permet de déterminer le degré d'hyperstaticité dans le cas des systèmes en treillis :

$$d = b + r - 2n$$

b : Le nombre de barres ou membrures

n : Le nombre de nœuds

r : Le nombre de réactions verticales et horizontales

$\boldsymbol{r} = \mathbf{2}$: Dans le cas d'un appui double

$\boldsymbol{r} = \mathbf{1}$: Dans le cas d'un appui simple

- $d = b + r - 2n = 0 \Rightarrow$ système est isostatique
- $d = b + r - 2n > 0 \Rightarrow$ système est hyperstatique

Exemples :

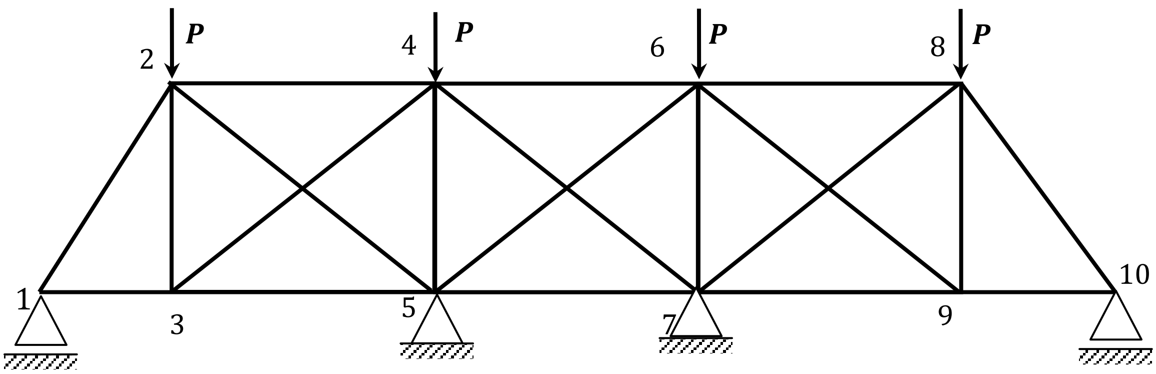


Figure 1.8. : Système en treillis

$$\left.\begin{array}{l} b = 20 \\ n = 10 \\ r = 6 \end{array}\right\} \Rightarrow d = b + r - 2n = 20 + 6 - 2.10 = 6$$ (**Donc 6 fois hyperstatique**)

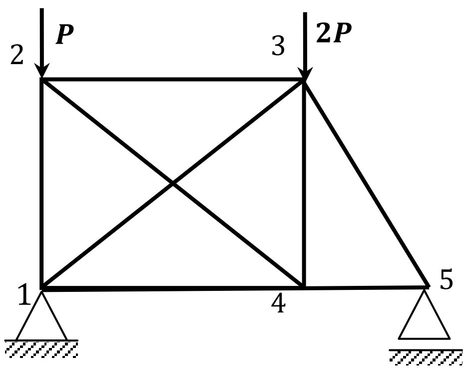


Figure 1.9. : Système en treillis

$$\left.\begin{array}{l} b = 8 \\ n = 5 \\ r = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow d = b + r - 2n = 8 + 3 - 2.5 = 1$$ (**Donc 1 fois hyperstatique**)

1.5.4. Remarques importantes :

- On remarque que le calcul du degré d'hyperstaticité est indépendant des charges extérieures appliquées au système. Il dépond surtout des conditions d'appuis.

- Par ailleurs, il existe deux genres d'hyperstaticité ; une hyperstaticité extérieure et l'autre intérieure. Cela signifie qu'il y a des inconnues supplémentaires liées aux appuis (réactions inconnues) et aussi d'autres inconnues liées aux efforts internes.