



FACULTÉ POLYDISCIPLINAIRE DE SAFI
DÉPT. MATHS & INFO
FILIÈRE SMA– SEMESTRE 6
2014 – 2019

Analysis

TRAVAUX DIRIGÉS
avec corrections

MOHAMMED HASSANI

Table des matières

I	Énoncées	5
1	Théorème de Hahn-Banach et Théorème de Baire	6
1.1	Théorème de Hahn-Banach	6
1.2	Théorème de Baire	9
1.3	Autres	11
2	Espaces vectoriels topologiques	12
2.1	Généralités	12
2.2	EVT localement convexe	16
2.3	Applications linéaires	18
2.4	Autres	18
3	Théorèmes classiques d'analyse fonctionnelle	21
3.1	Banach-Steinhaus	21
3.2	Application ouverte	23
3.3	Graphe fermé	24
4	Topologies faibles Espaces réflexifs	26
4.1	Dual topologique	26
4.2	Topologie faible	27
4.3	Topologie faible étoile	29
4.4	Réflexivité et séparabilité	30
4.5	Devoir libre	32
II	Corrections	33
1	Théorème de Hahn-Banach et Théorème de Baire	34
2	Espaces vectoriels topologiques	44
3	Théorèmes classiques d'analyse fonctionnelle	62
4	Topologies faibles Espaces réflexifs	68

Préface

Ce polycopie d'analyse fonctionnelle est destiné aux étudiants de licence en mathématiques et applications SMA. Il est rédigé à ma façon toute en gardant le livre de H. Brezis : « Analyse fonctionnelle, Théorie et applications. » à la portée de ma main.

Le but de ce cours est de donner des notions et des théorèmes topologiques et algébriques abstraits qui constituent des outils mathématiques essentiels pour entamer les cycles d'études supérieurs. La partie la plus importante à mon égard est la construction de la topologie à partir d'une famille de semi normes, je conseille le lecteur de se focaliser sur ce point.

Bibliographie

- ✓ H. Brezis : Analyse fonctionnelle théorie et applications Masson fr Paris 1983 Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise.
- ✓ Hervé Queffélec, Josette Charles, Mostafa Mbekhta : Analyse fonctionnelle et théorie des opérateurs Rappels de cours et exercices corrigés. Collection : Sciences Sup, Dunod.
- ✓ Yves Sonntag : Topologie et analyse fonctionnelle : Cours de Licence avec 240 exercices et problèmes corrigés 1998.
- ✓ J. Dieudonné : Éléments d'analyse. T. I -fondements de l'analyse moderne Gauthier-Villars fr Paris 1968.
- ✓ F. Riesz, B. Nagy : Leçons d'analyse fonctionnelle, Akademiai Kiadohu Budapest 1955 Acadmie des Sciences de Hongrie.
- ✓ S. Banach : Théorie des opérations linéaires, Chealsea publishing company.
- ✓ S. Lang : Analysis II Addison-Wesley publishing company us Massachusetts 1969 Addison-Wesley series in mathematics.
- ✓ W. Rudin : Analyse réelle et complexe, édition Masson, 1975 (le monument).

Encore je le dis, la littérature est très riche sur ce sujet. Il suffit de faire une recherche sur le net pour avoir gratuitement des polycopiés (de cours et d'exercices) de différents auteurs répondant à tous les goûts.

Pré-requis

La théorie des ensembles (la théorie ZFC, pour les courageux), la topologie générale (définition de topologie, continuité, convergences, compacité...), algèbre (espaces vectoriels, base algébrique, dimension) ... sont très sollicités ans ce cours.



Avertissements

Je tiens à préciser que ce document contient probablement des erreurs de frappes (ce n'est pas grave!) et des erreurs de mathématiques (par contre ça c'est grave!) qui ont échappé à ma vigilance. Ne l'utilisez qu'avec un œil critique et n'hésitez pas à me signaler ces problèmes : m.hassani@uca.ma.



ÉNONCÉES

Chapitre 1

Théorème de Hahn-Banach et Théorème de Baire

1.1 Théorème de Hahn-Banach

Un ingénieur, un physicien et un logicien sont dans un train en Écosse. Ils voient un mouton noir sur le bord de la route. « Les moutons écossais semblent être noirs. » dit l'ingénieur. « Non, il est plus correct de dire qu'au moins un mouton écossais est noir. » corrige le physicien. « Non, il est plus correct de dire qu'il a existé à un instant donné en Écosse au moins un mouton dont l'un des côtés au moins est noir ! » dit le logicien ...☹

Exercice 1.1.1

Soit X un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Soit L_0 une partie (famille) libre de X . Montrer que X possède une base (algébrique ou de Hamel) contenant L_0 .

Exercice 1.1.2

Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$. Soit V un sous espace vectoriel de E . Montrer qu'il existe un supplémentaire (algébrique) W de V , c-à-d W est un sous espace vectoriel de E tel que $V \cap W = \{0\}$ et $E = V + W$ en d'autres écritures $E = V \oplus W$.

Exercice 1.1.3

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace des polynômes à coefficients réels, A l'ensemble des polynômes à coefficient dominant strictement négatif et B l'ensemble des polynômes avec des coefficients positifs.

1. Montrer que A et B sont convexes.
2. Montrer qu'on ne peut pas trouver une forme linéaire f sur E non nulle et un réel α tels que $\forall P \in A, \forall Q \in B,$

$$f(P) \leq \alpha \leq f(Q).$$

Exercice 1.1.4

Soit E un espace vectoriel normé de dimension infinie sur le corps $\mathbb{K} \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

1. Montrer qu'il existe une suite de vecteurs libres de normes 1. En déduire l'existence d'une fonction linéaire non continue.
2. Montrer qu'il existe deux ensembles convexes A et B denses dans E tels que $A \cap B = \emptyset$ et $E = A \cup B$.
3. Montrer qu'il existe deux ensembles convexes A et B denses dans E telles que $A \cap B = \emptyset$ et $E = A \cup B$.

4. Peut-on séparer A et B avec un hyperplan fermé?

Exercice 1.1.5

Soit (K, d) un espace métrique compact non vide et $f : K \rightarrow K$ une application continue.

i. Montrer l'existence d'un ensemble fermé F non vide de K tel que $f(F) \subset F$ et minimal pour cette propriété au sens de l'inclusion $\subset$ (Zorn!).

ii. Montrer qu'il existe $x \in K$ et une application strictement croissante $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f^{\phi(n)}(x) = x \quad (\text{Utiliser } F_p \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\{f^n(x); n \geq p\}}).$$

Exercice 1.1.6

Montrer que dans un espace affine réel E , pour tous convexes disjoints A et B , il existe deux convexes C et D , complémentaires l'un de l'autre, tels que $A \subset C$ et $B \subset D$.

Exercice 1.1.7

Soit $E = l^\infty$ l'espace des suite réelles bornées muni de la norme $|x|_\infty = \sup_n |x_n|$ si $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^\infty$. Soit G l'ensemble de suite réelles qui converge en moyenne de Cesàro c-à-d

$$G \stackrel{\text{def}}{=} \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E \text{ tel que } \exists l \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_0 + \dots + x_{n-1}}{n} = l\}.$$

Notons g la fonction

$$g: \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_n)_n & \longmapsto & \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_0 + \dots + x_{n-1}}{n} \end{array}$$

et p la fonction

$$p: \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_n)_n & \longmapsto & \limsup_n x_n. \end{array}$$

1. Montrer que G est un sous espace vectoriel de E , que g est linéaire telle que $\forall x \in G, g(x) \leq p(x)$ et que p est sous linéaire sur E .

2. Montrer que si $(x_n)_n \in E$ alors $(y_n = x_{n+1} - x_n)_n$ converge en moyenne de Cesàro vers 0.

3. En déduire l'existence de $f \in E' = L_c(E; \mathbb{R})$ forme linéaire continue telle que $\forall x = (x_n)_n \in E$,

$$f(x) = f(z) \text{ et } \liminf x_n \leq f(x) \leq \limsup x_n,$$

où la suite z est définie par $z_n = x_{n+1}$.

Exercice 1.1.8

Soit X un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$ et $\psi, \psi_1, \dots, \psi_n$ $n+1$ formes linéaires telles que $\forall x \in X$

$$(\forall i = 1 \dots n, \psi_i(x) = 0) \implies \psi(x) = 0.$$

Montrer qu'il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $\psi = \sum_{i=1}^n \lambda_i \psi_i$.

Exercice 1.1.9

Soit $E = \mathcal{C}([0,1]; \mathbb{R})$ muni de la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$. Soit $A = \{P \in E \text{ tel que } P \text{ polynôme}\}$ et $B = \{f_0\}$ avec $f_0 : x \mapsto \sqrt{x}$.
Montrer que $A \cap B = \emptyset$, A et B convexes. Peut-on séparer A et B au sens large? Pourquoi?

Exercice 1.1.10

Soit l'espace de Banach $l^1 = \{x = (x_n)_{n \geq 1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*} \text{ tel que } \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty\}$ muni de la norme $\|x\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$. Soit $A_0 = \{x \in l^1 \text{ tel que } \forall n \geq 1, x_{2n} = 0\}$ et $B = \{x \in l^1 \text{ tel que } \forall n \geq 1, x_{2n} = 2^{-n} x_{2n-1}\}$.

- 1) Vérifier que A_0 et B sont fermées dans l^1 et que $l^1 = \overline{A_0 + B}$.
- 2) Soit $c \in l^1$ telle que $\forall n \geq 1, c_{2n-1} = 0$ et $c_{2n} = 2^{-n}$. Vérifier que $c \notin A_0 + B$ et $A \cap B = \emptyset$ avec $A \stackrel{\text{def}}{=} A_0 - c$.
- 3) Montrer que A et B ne peuvent pas être séparés au sens large.

Exercice 1.1.11

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé réel, F un sous espace vectoriel de E et $g : F \rightarrow \mathbb{R}$ une application linéaire continue. Par le théorème de Hahn-Banach, il existe une forme linéaire sur E qui prolonge g et qui vérifie $\|f\| = \|g\|$. Montrer, par un exemple sur $\mathbb{R}^2$, que ce prolongement n'est pas unique en général.

Exercice 1.1.12

Soit E un espace vectoriel normé de dimension infinie. Montrer que son dual topologique E' est de dimension infinie.

Exercice 1.1.13

Soient E et F deux espaces vectoriels normés avec E non trivial. Montrer que

$$F \text{ est de Banach} \iff L(E; F) \text{ est de Banach}$$

où $L(E; F)$ est l'espace des applications linéaires continues de E dans F .

Exercice 1.1.14 (Preuve du lemme de Zorn à partir de l'axiome du choix)

Supposons que $(X, \leq)$ est un ensemble ordonné non vide inductif qui n'a pas d'éléments maximaux.

Définition : Soit $A \subset X$, A est dit bien ordonné si toute partie non vide de A admet un plus petit élément.

Notons $\mathcal{C} \stackrel{\text{def}}{=} \{A \in \mathcal{P}(X) \text{ tel que } (A, \leq) \text{ est bien ordonné}\}$. Remarquons que $\emptyset \in \mathcal{C}$!

- 0) Montrer que toutes parties bien ordonnées sont totalement ordonnées.
- 1) Montrer qu'il existe une application $h : \mathcal{C} \rightarrow X$ telle que $\forall A \in \mathcal{C}, h(A) \notin A$ et $h(A)$ est un majorant (strict) de A .

2) Montrer que $\forall A \in \mathcal{C}, \forall x \in A,$

$$A \cup \{h(A)\} \in \mathcal{C} \text{ et } \{t \in A \text{ tel que } t < x\} \in \mathcal{C}.$$

Définition : A est une h -chaîne si $A \in \mathcal{C}$ et $\forall x \in A, x = h(\{t \in A \text{ tel que } t < x\})$.

Définition : A est un segment initial de B si $A \subset B$ et $\forall a \in A, \forall b \in B, b < a \Rightarrow b \in A$.

3) Montrer que A est une h -chaîne alors $A \cup \{h(A)\}$ est une h -chaîne.

4) Soient A, B deux h -chaînes. Montrer que A est un segment initial de B ou B est un segment initial de A . (On peut considérer la réunion des segments initiaux de A et de B .)

5) Montrer que la réunion des h -chaînes est une h -chaîne.

6) Conclure.

1.2 Théorème de Baire

Exercice 1.2.1

Soit la famille $(U_x = \mathbb{R} \setminus \{x\})_{x \in \mathbb{R}}$ d'ouverts de $\mathbb{R}$. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, U_x est dense dans $\mathbb{R}$. Donner $\bigcap_{x \in \mathbb{R}} U_x$. Dite pourquoi le théorème de Baire n'est pas applicable ici ?

Exercice 1.2.2

Soit E l'espace des fonctions polynomiales sur $[0, 1]$ à valeurs réelles, muni de la norme de la convergence uniforme $\|P\|_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{t \in [0, 1]} |P(t)|$.

Posons $F_n = \{P \in E \text{ tel que } \deg P \leq n\}$. Montrer que F_n est fermé dans E et d'intérieur vide. En observant que $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$, dite pourquoi on ne peut pas appliquer le théorème de Baire.

Exercice 1.2.3

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

Montrer qu'une limite simple $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ de fonctions continues $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ est continue sur un G_δ dense dans I .

Montrer que si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable alors sa fonction dérivée est continue sur un G_δ dense dans I .

Exercice 1.2.4

Montrer que $\mathbb{Q}$ n'est un G_δ de $\mathbb{R}$. et donc il n'y a pas de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dont l'ensemble des points où elle est continue est $\mathbb{Q}$.

Exercice 1.2.5

Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\forall a > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} f(na) = 0$. Montrer que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ (On peut utiliser l'ensemble $F_p \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{n \geq p} \{a \geq 0 \text{ tel que } |f(na)| \leq \varepsilon\}$).

Exercice 1.2.6

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$ -espace de Banach de dimension infinie et $L = \{e_n, n \in \mathbb{N}^*\}$ une famille libre de E .

- 1) Montrer que $F_n = \text{Vect}\{e_1, \dots, e_n\}$ est un fermé d'intérieur vide.
- 2) En déduire que E n'admet pas de base (algébrique ou de Hamel) dénombrable. Qu'en déduisez-vous pour l'espace des fonctions polynomiales sur $[0,1]$.

Exercice 1.2.7

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $[0,1]$ de points dense dans $[0,1]$ et soit la fonction $f : [0,1] \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ définie par,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \log|x - x_n| \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \quad \text{avec } \log 0 = -\infty.$$

- 1) Montrer que $\forall c \in \mathbb{R}, (f < c)$ est un ouvert de $[0,1]$ c-à-d f est semi-continue supérieurement (scs).
- 2) Montrer que $P \stackrel{\text{def}}{=} (f = -\infty) \subset [0,1]$ est un G_δ dense dans $[0,1]$ (un G_δ est une intersection dénombrable d'ouverts) et de mesure de Lebesgue nulle.
- 3) Montrer que P n'est pas dénombrable (utiliser que $\Theta_n = (f < n) \setminus \{a\}$ est un ouvert dense dans $[0,1]$, pour tout $a \in [0,1]$).

Exercice 1.2.8

Soit $\mathcal{C} = \mathcal{C}([0,1]; \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ muni de la norme uniforme $\|f\|_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|$. Et considérons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble

$$\Theta_n = \{f \in \mathcal{C} \mid \forall x \in [0,1], \exists y \in [0,1] \text{ tel que } |y - x| < \frac{1}{n} \text{ et } |f(y) - f(x)| > n|y - x|\}$$

- 1) Montrer que Θ_n est un ouvert de $\mathcal{C}$.
- 2) Soit $x \in [0,1]$, soit $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $N > 4\pi$, soit $k_x^N \in \mathbb{N}$ tel que $Nx \in [2k_x^N \pi, 2k_x^N \pi + 2\pi[$ (ie $k_x^N = \lfloor \frac{Nx}{2\pi} \rfloor$). Posons

$$y_x^N \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{N} \begin{cases} 2\pi + \frac{3}{2}\pi & \text{si } k_x^N = 0 \text{ et } Nx \in [0, \pi] \\ 2\pi + \frac{1}{2}\pi & \text{si } k_x^N = 0 \text{ et } Nx \in]\pi, 2\pi[\\ 2(k_x^N - 1)\pi + \frac{3}{2}\pi & \text{si } k_x^N \neq 0 \text{ et } Nx \in [2k_x^N \pi, 2k_x^N \pi + \pi] \\ 2(k_x^N - 1)\pi + \frac{1}{2}\pi & \text{si } k_x^N \neq 0 \text{ et } Nx \in]2k_x^N \pi + \pi, 2k_x^N \pi + 2\pi[\end{cases}$$

Montrer que : (i) $y_x^N \in [0,1]$, (ii) $\frac{\pi}{2} \leq |Nx - Ny| \leq 4\pi$ et (iii) $|\sin(Nx) - \sin(Ny_x^N)| \geq 1$.

- 3) Soit $f \in \mathcal{C}$ et $\alpha > 0$, montrer qu'il existe un entier N tel que $x \mapsto f(x) + \alpha \sin(Nx)$ est dans Θ_n .
- 4) Montrer que Θ_n est un ouvert dense dans l'espace de Baire $\mathcal{C}$.
- 5) Montrer que $\{f \in \mathcal{C} \text{ tel que } f \text{ n'est nulle part dérivable}\}$ est dense dans $(\mathcal{C}, \|\cdot\|_\infty)$.

(voir la fonction de Takagi (td topologie) qui est une fonction nulle part dérivable ... ?)

Exercice 1.2.9 (Corominas and Sunyer i Balaguer 1954)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$ il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f^{(n)}(x) = 0$. Montrer que f est une fonction polynomiale.

1.3 Autres

Exercice 1.3.1

Soit $E = \mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2}; a, b \in \mathbb{Q}\}$. Posons

$$N_0(a + b\sqrt{2}) = |a + b\sqrt{2}| \quad \text{et} \quad N_1(a + b\sqrt{2}) = \max\{|a|, |b|\}.$$

Montrer que

- i. E est un $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel de dimension 2.
- ii. N_0 et N_1 sont des normes sur E .
- iii. N_0 et N_1 ne sont pas équivalentes (on peut considérer $x = \sqrt{2} - 1$ et x^n).

Exercice 1.3.2

Soit l'espace $l^1 = \{x = (x_n)_{n \geq 1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*} \text{ tel que } \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty\}$ muni de sa norme habituelle $\|x\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$. Soit l'application

$$\begin{aligned} f: l^1 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} (1 - 2^{-n}) x_n. \end{aligned}$$

Montrer que $\|f\| \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\|x\|_1=1} f(x) = 1$ et que ce sup n'est pas atteint (on ne peut pas remplacer sup par max).

Exercice 1.3.3 (Jauge de Minkowski d'un convexe)

Soit E un espace normé non vide, soit C un convexe non vide de E tel que $0 \in C$. Soit la fonction p , dite jauge de C , définie par

$$\begin{aligned} p = p_C: E &\longrightarrow [0, +\infty] \\ x &\longmapsto \inf\{s > 0 \mid \tfrac{1}{s}x \in C\} \quad \text{avec } \inf \emptyset = +\infty \end{aligned}$$

Montrer que

- 1) a) $p(0) = 0$, b) $\forall \lambda > 0, \forall x \in E, p(\lambda x) = \lambda p(x)$ et c) si C est borné alors $\forall x \in E, p(x) = 0 \Rightarrow x = 0$.
- 2) $\overset{\circ}{C} \subset (p < 1) \subset C \subset (p \leq 1) \subset \overline{C}$.
- 3) $\forall x, y \in E, p(x+y) \leq p(x) + p(y)$.
- 4) Si $0 \in \overset{\circ}{C}$ alors $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in E, 0 \leq p(x) \leq M\|x\|$ et donc $\overset{\circ}{C} = (p < 1)$ et $\overline{C} = (p \leq 1)$.

Chapitre 2

Espaces vectoriels topologiques

2.1 Généralités

Exercice 2.1.1

Soit X un espace vectoriel non trivial.

- i. Montrer que la topologie discrète sur X n'est pas vectoriel. (On peut utiliser $t \mapsto tx_0$, avec $x_0 \in X \setminus \{0\}$).
- ii. Montrer que la topologie grossière sur X est vectoriel non séparée.

Exercice 2.1.2

Soit E un EVT sur $\mathbb{K}$. Montrer que

1. Si $(r_n)_n$ est une suite qui converge vers $+\infty$ et V est un voisinage 0 alors $E = \bigcup_n r_n V$.
2. Si M est un sous espace vectoriel de E alors $\overline{M}$ l'est aussi.
3. Si M est un sous espace vectoriel de E et $\overset{\circ}{M} \neq \emptyset$ alors $M = E$.
4. Si A est un convexe de E alors $\overset{\circ}{A}$ et $\overline{A}$ le sont.
5. Montrer que si A est convexe et $\overset{\circ}{A} \neq \emptyset$ alors $\forall x \in \overline{A}, \forall y \in \overset{\circ}{A}, [y, x[\subset \overset{\circ}{A}$ et en déduire que $\overline{A} = \overline{\text{int}(A)}$.
6. Si A est une partie équilibrée de E alors $\overline{A}$ et $\text{co}(A)$ sont équilibrées.
7. Si A est une partie équilibrée de E et $0 \in \overset{\circ}{A}$ (i.e. A voisinage de 0!) alors $\overset{\circ}{A}$ est équilibrée.
8. A est absolument convexe si et seulement si A est convexe et équilibrée.

Exercice 2.1.3

1. Montrer que l'image directe d'un sous espace vectoriel (resp. d'un convexe, d'une partie équilibrée) par une application linéaire est un sous espace vectoriel (resp. un convexe, une partie équilibrée).
2. Même chose pour l'image réciproque.

Exercice 2.1.4

Soit E un EVT sur $\mathbb{K}$ et $A \subset E$. Montrer que

1. Pour tout voisinage V de 0 il existe un **ouvert équilibré** U tel que $0 \in U \subset \overline{U} \subset U + U \subset V$.
2. Pour tout voisinage **convexe** V de 0 il existe un **ouvert équilibré convexe** W tel que $0 \in W \subset V$.

Exercice 2.1.5

Soit E un EVT sur $\mathbb{K}$ et $A, B \subset E$. Montrer que

1. $B \subset A$ et A précompacte (totale-ment bornée) implique B précompacte (totale-ment bornée).
2. $B \subset A$ et A bornée implique B bornée.
3. A relativement compact ($\overline{A}$ est compact) implique A précompacte (totale-ment bornée).
4. A précompacte (totale-ment bornée) implique $\overline{A}$ bornée.
5. A précompacte (totale-ment bornée) implique $\overline{A}$ précompacte (totale-ment bornée).
6. A bornée implique $\overline{A}$ bornée.
7. A sous espace vectoriel de E borné implique $\{0\} \subset A \subset \overline{\{0\}}$ (donc $A = \{0\}$ si E est séparé).

Exercice 2.1.6

Soit E un EVT sur $\mathbb{K}$ et $A \subset E$ tel que $0 \in A$.

1. Montrer que la réunion quelconque de parties équilibrées est équilibrée.
- Notons $N(A) = \cup_{B \in \Lambda_A} B$ dit le noyau équilibré de A avec

$$\Lambda_A \stackrel{\text{def}}{=} \{B \subset A \text{ tel que } B \text{ est équilibrée}\}.$$

2. Montrer que $N(A)$ est la plus grande partie équilibrée contenue dans A .
3. Soit $x \in E$; $x \in N(A) \iff \forall \lambda \in \mathbb{K} \text{ tel que } |\lambda| \leq 1, \lambda x \in A$.
4. $A \in \mathcal{V}_E(0) \implies N(A) \in \mathcal{V}_E(0)$.

Exercice 2.1.7

Soit E un EVT sur $\mathbb{K}$, soient $A, B \subset E$. Montrer que

1. Si A ou B sont ouverts alors $A + B$ est ouvert.
2. Si A et B sont des parties quasi-compactes (compacité sans séparation!) alors $A + B$ est quasi-compact.
3. Si A est compact et B est fermé alors $A + B$ est fermé et si de plus $A \cap B = \emptyset$ alors il existe un voisinage V de 0 tel que $(A + V) \cap (B + V) = \emptyset$.
4. Si A et B sont fermés a-t-on $A + B$ fermé?
5. $\overline{A + B} \subset \overline{A} + \overline{B}$.

Exercice 2.1.8

Soit E un EVT sur $\mathbb{K}$ et $A \subset E$. Montrer que :

A bornée si et seulement si $\forall (x_n)_n \in A^{\mathbb{N}}, \forall (\alpha_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \text{ tel que } \alpha_n \rightarrow 0; \alpha_n x_n \rightarrow 0$.

Exercice 2.1.9

Soit E un EVT sur $\mathbb{K}$, soit V un voisinage de 0 borné et soit $(\delta_n)_n \in]0, +\infty[^{\mathbb{N}}$ telle que $\delta_n \rightarrow 0$. Montrer que $\{\delta_n V; n \in \mathbb{N}\}$ est une base de voisinage de 0 .

Exercice 2.1.10

Soit $E = \mathcal{C}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ muni de la distance $d(f, g) \stackrel{\text{def}}{=} \min\{1, \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - g(x)|\}$. Montrer que (E, d) est un espace métrique complet mais non vectoriel (Prendre $d(0, af)$ avec f non bornée et a parcourt $\mathbb{R}$).

Exercice 2.1.11

Soit $(X, \mathcal{F}, \nu)$ un espace probabilisé. Posons $\mathcal{M} \stackrel{\text{def}}{=} \{f : X \rightarrow \mathbb{R}, \text{mesurable}\}$ et

$$\begin{aligned} d : \mathcal{M} \times \mathcal{M} &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ (f, g) &\longmapsto \int_X [1 \wedge |f - g|] d\nu. \end{aligned}$$

Montrer que d est une distance et que $(\mathcal{M}, d)$ est un EVT complet.

Exercice 2.1.12

Soit $p \in]0, 1[$ et $L^p = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \text{borélienne tel que } \int_{[0, 1]} |f(t)|^p dt < \infty\}$ et

$$\begin{aligned} d : L^p \times L^p &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ (f, g) &\longmapsto \int_{[0, 1]} |f(t) - g(t)|^p dt. \end{aligned}$$

1. Montrer que d est une métrique et que (L^p, d) est un EVT complet.
2. Soit $r \geq 0$, montrer que $B_d(0, 2^{1-p}r) \subset \text{co } B_d(0, r)$ et que $\forall n \in \mathbb{N}, B_d(0, 2^{n(1-p)}r) \subset \text{co } B_d(0, r)$.
3. Montrer que le seul ouvert convexe non vide de L^p est L^p lui-même (donc (L^p, d) est non localement convexe).
4. Montrer que l'application nulle est la seule forme linéaire continue sur L^p (ie $(L^p)' = \{0\}$, dual topologique).

Exercice 2.1.13

Soit $p \in]0, 1[$ et $l^p = \{(x_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \text{ tel que } \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p < \infty\}$ et $d((x_n)_n, (y_n)_n) = \sum_{n=0}^{\infty} |x_n - y_n|^p$. Montrer que (l^p, d) est un EVT complet non localement convexe.

Exercice 2.1.14 (métrisabilité)

Soit $(E, \mathcal{T})$ un EVT (resp. localement convexe) tel que 0 admet une base de voisinage dénombrable.

1. Montrer qu'il existe une suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de voisinages ouverts équilibrés de 0 et convexes si E est localement convexe telle que $V_{n+1} + V_{n+1} + V_{n+1} + V_{n+1} \subset V_n$ et $\mathcal{B} = \{V_n, n \in \mathbb{N}^*\}$ est une base de voisinage de 0 (utiliser l'exercice 2.1.4). En déduire que, pour toute partie A de E , $\bar{A} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} (A + V_n)$ et en particulier $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} V_n = \{0\}$.
2. Notons $\mathcal{F}$ l'ensemble des parties non vides finies de $\mathbb{N}^*$. Pour $F \in \mathcal{F}$, posons

$$V_F = \sum_{n \in F} V_n = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^F V_i \quad \text{et} \quad p_F = \sum_{n \in F} \frac{1}{2^n} = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^F 2^{-i} \quad \text{avec} \quad \alpha_i^F = \begin{cases} 1 & \text{si } i \in F \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- i) Montrer que, pour $F \in \mathcal{F}$, V_F est un voisinage ouvert équilibré de 0 et convexe si les V_n sont convexes

ii) Montrer que $p_F < \frac{1}{2^k} \implies \forall n \in F, k < n \implies V_F \subset V_{k+1} + \dots + V_{k+q} \subset V_k$ (avec $q = \max F - k$).

iii) Soit $F, G \in \mathcal{F}$ tels que $p_F + p_G < 1$.

a. Montrer qu'il existe $H \in \mathcal{F}$ tel que $p_F + p_G = p_H$.

b. Supposons que $\forall i \in \mathbb{N}^*, \alpha_i^F + \alpha_i^G = \alpha_i^H$; montrer que $V_F + V_G \subset V_H$.

c. Supposons que $\exists i \in \mathbb{N}^*, \alpha_i^F + \alpha_i^G \neq \alpha_i^H$; posons $i_0 = \min\{i \in \mathbb{N}^* \mid \alpha_i^F + \alpha_i^G \neq \alpha_i^H\}$. Montrer que $\alpha_{i_0}^F = \alpha_{i_0}^G = 0$ et $\alpha_{i_0}^H = 1$, que

$$V_F \subset \alpha_1^F V_1 + \dots + \alpha_{i_0-1}^F V_{i_0-1} + V_{i_0+1} + V_{i_0+1} \text{ et } V_G \subset \alpha_1^G V_1 + \dots + \alpha_{i_0-1}^G V_{i_0-1} + V_{i_0+1} + V_{i_0+1}.$$

c. En déduire $V_F + V_G \subset \alpha_1^H V_1 + \dots + \alpha_{i_0-1}^H V_{i_0-1} + V_{i_0} \subset V_H$.

3. Soit la fonction

$$d: E \times E \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto \begin{cases} \inf_{F \in \mathcal{F}} \{p_F : x - y \in V_F\} & \text{si } \exists F_0 \in \mathcal{F}, x - y \in V_{F_0} \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

i) Montrer que d est à valeurs dans $[0, 1]$ et que $d(x, y) = d(x - y, 0) = d(y, x)$.

ii) Démontrer que $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x - y \in \overline{\{0\}}$.

iii) Montrer que $\forall t \in \mathbb{K}, |t| \leq 1 \implies d(tx, ty) \leq d(x, y)$.

iv) Montrer que $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

v) On a d est une pseudo-distance (écart fini) invariante par translation d'après i). Montrer que d est une distance si $(E, \mathcal{T})$ est séparé.

4. Posons, Pour $r > 0$ et $x \in E$, $\mathcal{F}_r = \{F \in \mathcal{F} \text{ tel que } p_F < r\}$, $B_d(x, r) = \{y \in E \text{ tel que } d(x, y) < r\} = x + B(0, r)$ et $\mathcal{T}_d = \{U \subset E \text{ tel que } \forall x \in U, \exists r > 0; B_d(x, r) \subset U\}$ la topologie sur E associée à la pseudo-métrique d .

Montrer que

$$B_d(0, r) = \bigcup_{F \in \mathcal{F}_r} V_F.$$

En déduire que $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$ c-à-d $\mathcal{T}$ est pseudo-métrisable (métrisable s'il est séparé) et que $B_d(0, r)$ est convexe si les V_n sont convexes.

Exercice 2.1.15 (Normabilisable)

Soit $(E, \mathcal{T})$ un EVT. Montrer que

E est semi-normable si et seulement si 0 admet un voisinage convexe borné.

Exercice 2.1.16 (Topologie trace)

Soit $(E, \mathcal{T})$ un EVT et M un sous espace vectoriel de E et posons $\mathcal{T}_M = M \cap \mathcal{T} = \{M \cap \Theta, \Theta \in \mathcal{T}\}$ la topologie trace (induite) de $\mathcal{T}$ sur M .

1. Dites pourquoi $(M, \mathcal{T}_M)$ est un EVT? séparé si E l'est? localement convexe si E l'est?

2. Montrer que si $(E, \mathcal{T})$ est pseudo-métrisable (resp. semi-normable) alors $(M, \mathcal{T}_M)$ l'est aussi.

3. Montrer que si M est fermé et E est complet alors M est complet!

Exercice 2.1.17

Soit $(E_i, \mathcal{T}_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces vectoriels topologiques. Posons $E = \prod_{i \in I} E_i$ qui sera muni de sa topologie produit $\mathcal{T}$.

1. Montrer que E est un EVT. Donner une base de voisinages de 0.
2. Montrer que si E_i sont localement convexe alors E l'est aussi.

Exercice 2.1.18 (Topologie quotient)

Soit $(E, \mathcal{T})$ un EVT sur le corps $\mathbb{K}$ et H un sous espace fermé de E , soit

$$\begin{aligned} \sigma: E &\longrightarrow E/H \\ x &\longmapsto \bar{x} \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in E \text{ tel que } x - y \in H\} = x + H \end{aligned}$$

et $\mathcal{T}' = \{A \subset E/H \text{ tel que } \sigma^{-1}(A) \in \mathcal{T}\}$ (topologie quotient).

1. Montrer que σ est continue ouverte et que $(E/H, \mathcal{T}')$ est un EVT, séparé. En déduire que si F est sous espace vectoriel de dimension finie de E alors $H + F$ est fermé dans $(E, \mathcal{T})$.
2. Montrer que si $\mathcal{B}$ est une base de voisinage de 0 dans E alors $\{\sigma(V), V \in \mathcal{B}\}$ est une base de voisinage de 0 dans E/H .
3. Montrer qu si $(E, \mathcal{T})$ est localement convexe (resp. localement compact, localement bornée-0 a un voisinage borné-, pseudo-métrisable, semi-normable) alors E/H est localement convexe (resp. localement compact, localement bornée, métrisable, normable).
4. Supposons que $(E, \mathcal{T})$ est complet (au sens des espaces vectoriels topologiques) et pseudo-métrisable. Soit d une pseudo-distance sur E invariante par translation telle que $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$. Posons

$$\begin{aligned} \delta: E/H \times E/H &\longrightarrow [0, +\infty[\\ (\sigma(x), \sigma(y)) &\longmapsto \inf_{h \in H} d(x - y, h). \end{aligned}$$

- a. Montrer que δ est une distance sur E/H et que $\mathcal{T}' = \mathcal{T}_\delta$.
- b. Montrer que $(E/H, \mathcal{T}')$ est complet.

2.2 EVT localement convexe**Exercice 2.2.1**

Soit E un espace vectoriel, L un sous espace vectoriel et p, q deux semi-normes sur E . Montrer que $p + q$, $\sup(p, q)$, $\sqrt{p^2 + q^2}$ et $p_L(x) = \inf_{l \in L} p(x + l)$ sont des semi-normes sur E .

Exercice 2.2.2

Soit E un EVT et p une semi-norme sur E . Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

1. p est continue ;
2. $(p < 1)$ est un ouvert ;
3. $0 \in \text{int}(p < 1)$;
4. $0 \in \text{int}(p \leq 1)$;
5. p est continue en 0 ;
6. il existe une semi-norme continue q telle que $p \leq q$.

Exercice 2.2.3

Soit E un espace vectoriel (pas de topologie!), soit V une partie convexe équilibrée de E telle que $\forall x \in V, V - x$ est absorbant. Montrer qu'il existe une unique semi norme sur E telle que $V = \{x \mid p(x) < 1\}$.

Exercice 2.2.4

Soit $S = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\mathcal{P} = \{p_i, i \in \mathbb{N}\}$ avec $p_i(x) = |x_i|$. Montrer que $(S, \mathcal{P})$ est un EVT complet métrisable et localement convexe (est un espace de Fréchet).

Exercice 2.2.5

Soit $(E_n, \|\cdot\|_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'espaces de Banach telle que $\forall n \in \mathbb{N}, E_{n+1} \subset E_n$. Posons $E = \bigcap_n E_n$ et

$$\begin{aligned} p_n: E &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x &\longmapsto \|x\|_n \end{aligned}$$

Montrer que $(E, \mathcal{P} = \{p_n, n \in \mathbb{N}\})$ est un espace de Fréchet

Exercice 2.2.6 (Topologie quotient- suite exercice 2.1.18)

Soit $(E, \mathcal{T})$ un EVT et H un sous espace fermé de E , soit

$$\begin{aligned} \sigma: E &\longrightarrow E/H \\ x &\longmapsto \bar{x} \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in E \text{ tel que } x - y \in H\} \end{aligned}$$

et $\mathcal{T}' = \{A \subset E/H \text{ tel que } \sigma^{-1}(A) \in \mathcal{T}\}$ (topologie quotient).

1. Montrer que si p est une semi norme sur E alors $\bar{p}(\bar{x}) = \inf_{h \in H} p(x + h)$ est une semi norme sur E/H .
2. Montrer que si $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ avec $\mathcal{P}$ une famille de semi-norme sur E alors $\mathcal{T}' = \mathcal{T}_{\bar{\mathcal{P}}}$ avec $\bar{\mathcal{P}} = \{\bar{p}, p \in \mathcal{P}\}$.

Exercice 2.2.7 (Topologie de la convergence compacte)

Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^d$ et $E = \mathcal{C}(U)$ l'espace des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ continues. Soit $\mathcal{K}$ l'ensemble des compacts de U . Pour $K \in \mathcal{K}$, posons $p_K(f) = \max_{x \in K} |f(x)|$.

1. Montrer que p_K est une semi norme sur E et que la famille des semi normes $\mathcal{P} = \{p_K, K \in \mathcal{K}\}$ est séparante filtrante.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $K_n = \{x \in U \text{ tel que } d(x, \mathbb{R}^d \setminus U) \geq \frac{1}{n+1}\} \cap B_{\infty}(0, n)$. Montrer que $\mathcal{T}_{\mathcal{P}} = \mathcal{T}_{\mathcal{Q}}$ avec $\mathcal{Q} = \{p_{K_n}, n \in \mathbb{N}\}$.
3. En déduire que $(E, \mathcal{P})$ est espace localement convexe métrisable et donner une distance δ telle que $\mathcal{T}_{\mathcal{P}} = \mathcal{T}_{\delta}$. Montrer que $(E, \mathcal{P})$ est un espace de Fréchet.
4. Montrer que p_K n'est pas une norme pour $K \in \mathcal{K}$, qu'un ouvert de E contenant 0 contient une droite réelle. En déduire que $(E, \mathcal{P})$ n'est pas normable.

Exercice 2.2.8

Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^d$ et, pour $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $E^k = \mathcal{C}^k(U)$ l'espace des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^k$. Soit $\mathcal{K}$ l'ensemble des compacts de U . Pour $K \in \mathcal{K}$ et $m \in \mathbb{N}$, posons

$$p_{K,m}(f) = \max_{x \in K, \alpha \in \Lambda_m} |D^\alpha f(x)|$$

avec $\Lambda_m = \{\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d \text{ tel que } |\alpha| \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_1 + \dots + \alpha_d \leq m\}$ et $D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial \alpha_1 \dots \partial \alpha_d}$.

1. Montrer que $p_{K,m}$ est une semi norme sur E^k , pour $k \geq m$ et que la famille des semi normes $\mathcal{P}_m = \{p_{K,m}, K \in \mathcal{K}\}$ et $\mathcal{P}_\infty = \{p_{K,m}, K \in \mathcal{K}, m \in \mathbb{N}\} = \bigcup_m \mathcal{P}_m$ sont séparantes respectivement sur E^k et sur E^∞ .
2. Montrer que $(E^k, \mathcal{P}_k)$ est un espace de Fréchet, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.
3. Soit $k, l \in \mathbb{N}$ tels que $l \leq k$. Soit $P = \sum_{|\alpha| \leq l} a_\alpha D^\alpha$ un opérateur différentiel d'ordre l à coefficient $a_\alpha \in \mathcal{C}^{k-l}(U)$. Montrer que P est linéaire continue de E^k dans E^{k-l} .
4. On veut montrer que toute partie fermée bornée de E^∞ est compacte :
 - (i) Soit B une partie bornée de E^l , $l > 0$. En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que B est équicontinue sur tout compact $K \in \mathcal{K}$. En déduire que la restriction à K de toute suite de B admet une sous suite qui converge dans $\mathcal{C}(K)$.
 - (ii) Soit $i : E^l \rightarrow E^0$ l'injection canonique. En utilisant un procédé diagonal et la suite K_n de l'exercice 2.2.7 que $i(B)$ est relativement compacte.
 - (iii) Soit $k, l \in \mathbb{N}$ tels que $k < l$, soit l'injection canonique $i : E^l \rightarrow E^k$ et soit B une partie bornée de E^l . Montrer que $i(B)$ est relativement compacte.
 - (iv) Conclure.
5. Montrer que E^k ne sont pas normables, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

2.3 Applications linéaires

Exercice 2.3.1

Soient E et F deux EVT sur $\mathbb{K}$ et $f : E \rightarrow F$ une application linéaire.

1. Montrer que f est continue si et seulement si f est continue en un point x_0 de E .
2. Montrer que si f est continue alors l'image par f d'un borné est un borné (On dit que f est bornée).
3. Montrer que si E est de dimension finie séparé alors f est continue.

Exercice 2.3.2

Soit E un EVT sur $\mathbb{K}$ et $f : E \rightarrow \mathbb{K}$ une forme linéaire non nulle. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

1. f est continue;
2. $\text{Ker}(f)$ est fermé;
3. $\text{Ker}(f)$ n'est pas dense
4. f est bornée sur un voisinage de 0.

2.4 Autres

Exercice 2.4.1 (Examen de rattrapage topologie 2017)

Soit X un ensemble.

Définition : Une application $\delta : X \times X \rightarrow [0, +\infty]$ est dite un écart sur X si $\forall x, y, z \in X$:

i) $\delta(x, y) = \delta(y, x)$ (symétrie), ii) $x = y \Rightarrow \delta(x, y) = 0$ et iii) $\delta(x, z) \leq \delta(x, y) + \delta(y, z)$ (inégalité triangulaire).
On dit que l'écart δ est fini s'il est à valeurs dans $[0, +\infty]$, On dit qu'il est séparé si la réciproque de ii) est valide. Un écart fini séparé est dit une distance ou une métrique sur X .

- 1) Soit $(\delta_i)_{i \in I}$ une famille d'écarts sur X , montrer que $\delta = \sup_{i \in I} \delta_i$ est un écart sur X .
- 2) Soit $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ une application. Montrer que $\delta_f(x, y) = |f(x) - f(y)|$ est un écart sur X .
- 3) Soit d un écart sur X ; montrer qu'il existe une famille A_d d'applications de X dans $\mathbb{R}$ telle que

$$d = \sup_{f \in A_d} \delta_f.$$

- 4) Soit $\mathcal{P}$ un ensemble (une famille) d'écarts sur X et posons

$$\mathcal{T}_{\mathcal{P}} = \{U \subset X \text{ tel que } \forall x \in U, \exists \varepsilon > 0, J \subset \mathcal{P}, \text{ finie } \bigcap_{\delta \in J} B_{\delta}(x, \varepsilon) \subset U\}.$$

où $B_{\delta}(x, \varepsilon) = \{t \in X \text{ tel que } \delta(x, t) < \varepsilon\}$. Montrer que $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ est une topologie sur X et que

$$\forall \delta \in \mathcal{P}, \forall x \in X, \forall \varepsilon > 0, B_{\delta}(x, \varepsilon) \in \mathcal{T}_{\mathcal{P}}.$$

- 5) Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux familles d'écarts sur X . Montrer que

$$\mathcal{T}_{\mathcal{P}} \subset \mathcal{T}_{\mathcal{Q}} \Leftrightarrow \forall \delta \in \mathcal{P}, \forall x \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists \varepsilon' > 0, J' \subset \mathcal{Q}, \text{ finie } \bigcap_{\lambda \in J'} B_{\lambda}(x, \varepsilon') \subset B_{\delta}(x, \varepsilon).$$

- 6) Soit $\mathcal{P}$ une famille d'écarts sur X et $(\alpha_{\delta})_{\delta \in \mathcal{P}}$ une famille de réels strictement positifs ($\alpha_{\delta} > 0$). Montrer que $\mathcal{Q} = \{\alpha_{\delta}(1 \wedge \delta) ; \delta \in \mathcal{P}\}$ est une famille d'écarts (bornés) sur X telle que $\mathcal{T}_{\mathcal{P}} = \mathcal{T}_{\mathcal{Q}}$.
- 7) Soit $\mathcal{P}$ un ensemble d'écarts sur X et $(\alpha_{\delta})_{\delta \in \mathcal{P}}$ une famille de réels strictement positifs. Posons

$$\lambda = \sup_{\delta \in \mathcal{P}} \alpha_{\delta}(1 \wedge \delta).$$

- i) Montrer que

$$\mathcal{T}_{\mathcal{P}} \subset \mathcal{T}_{\{\lambda\}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{T}_{\lambda}.$$

- ii) Supposons, en plus, que $\forall \varepsilon > 0, \{\delta \in \mathcal{P} ; \alpha_{\delta} \geq \varepsilon\}$ est fini ($\Rightarrow \mathcal{P}$ est dénombrable!). Montrer que

$$\mathcal{T}_{\mathcal{P}} = \mathcal{T}_{\lambda}.$$

- 8) Soit $\mathcal{P}$ une famille d'écarts sur X . Soit K l'ensemble des parties finies de $\mathcal{P}$. Posons $\mathcal{Q} = \{\sup_{\delta \in J} \delta ; J \in K\}$. Montrer que

$$\mathcal{T}_{\mathcal{P}} = \mathcal{T}_{\mathcal{Q}} = \{U \subset X \text{ tel que } \forall x \in U, \exists \varepsilon > 0, \lambda \in K, B_{\lambda}(x, \varepsilon) \subset U\}.$$

- 9) Soit $\mathcal{P}$ une famille d'écarts sur X on le munira de la topologie $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$, soit $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique et $D \subset E$, soit $f : D \rightarrow X$, $a \in E$ et $l \in X$. On dit que f converge « suivant D » vers l lorsque x tend vers a , et on écrit $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in D}} f(x) = l$, si

$$\forall V \in \mathcal{V}_{\mathcal{T}_{\mathcal{P}}}(l), \exists W \in \mathcal{V}_E(a), \text{ tel que } \forall x \in E, (x \in W \cap D \Rightarrow f(x) \in V).$$

Montrer que

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in D}} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \delta \in \mathcal{P}, \forall n \in \mathbb{N}, \exists W \in \mathcal{V}(a), \forall x \in W \cap D, \delta(f(x), l) < \frac{1}{2^n}.$$

Chapitre 3

Théorèmes classiques d'analyse fonctionnelle

3.1 Banach-Steinhaus

Exercice 3.1.1

Soit $p, q \in [1, +\infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Soit $(a_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tel que $\forall (x_n)_n \in l_{\mathbb{C}}^q$, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x_n$ converge. Montrer que $(a_n)_n \in l_{\mathbb{C}}^p$.

Avec

$$l_{\mathbb{C}}^q = \begin{cases} \{(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} ; \sum_{n \in \mathbb{N}} |t_n|^q < +\infty\} & \text{si } q < +\infty \\ \{(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} ; \sup_{n \in \mathbb{N}} |t_n| < +\infty\} & \text{si } q = +\infty \end{cases}$$

muni de sa norme usuel $\|\cdot\|_q$.

Exercice 3.1.2

Soit E un espace de Banach, F, G deux espaces vectoriels normés et $f : E \times F \rightarrow G$ une application bilinéaire.

1. Montrer que f est continue si et seulement si f est continue en $(0,0)$ si et seulement si il existe $C > 0$ tel que

$$\forall (x,y) \in E \times F, \|f(x,y)\| \leq C \|x\| \|y\|.$$

2. Montrer que f est continue si et seulement si elle est séparément continue.

3. Montrer que $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, est séparément continue non continue

$$(x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(non bilinéaire).

4. Soit $E = F = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|x\|_1 = \int_0^1 |x(t)| dt$ (est ce vraiment une norme sur E ?) et $G = \mathbb{R}$ muni de sa topologie usuelle. Soit la fonction $f : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$. Montrer que

$$(x,y) \mapsto \int_0^1 x(t)y(t) dt$$

f est séparément continue bilinéaire non continue.

Exercice 3.1.3

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé et $A \subset E$ telle que $\forall f \in E', f(A)$ est bornée dans $\mathbb{K}$. Montrer que A est bornée dans E . On peut considérer la famille des applications, pour $a \in A$, $T_a : E' \rightarrow \mathbb{K}$

$$f \mapsto f(a).$$

Exercice 3.1.4

Soit $p, q \in [0, +\infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Soit $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ borélienne.

1. Supposons que $f \in L^p(\mathbb{R}^d) = L^p$. En utilisant l'inégalité de Hölder, montrer que

$$\begin{aligned} T_f : L^q(\mathbb{R}^d) = L^q &\longrightarrow \mathbb{R} && \text{est continue} && \text{et} && \|T_f\| = \|f\|_p = \sqrt[p]{\int_{\mathbb{R}^d} |f|^p}. \\ g &\longmapsto \int_{\mathbb{R}^d} fg \end{aligned}$$

2. Dans cette question on suppose que pour tout $g \in L^q, fg \in L^1$. Montrer que $f \in L^p$. On peut appliquer le théorème de Banach-Steinhaus pour la suite $(T_k = T_{f_k})_k$ avec $f_k : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } \|x\| + |f(x)| < k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 3.1.5

Soit $I = [0, 1]$ et $E = C^0(I; \mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme $\|\cdot\|_\infty$ (c'est un espace de Banach!). Soit F un sous espace vectoriel fermé de $(E, \|\cdot\|_\infty)$ tel que pour tout $f \in F$, f est dérivable sur $[0, 1]$. Pour $x, y \in I$ tels que $x \neq y$, on note $T_y^x : F \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par

$$T_y^x(f) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

1. Montrer que T_y^x est linéaire continue.

2. Montrer que pour tout $x \in I$ la famille $(T_y^x)_{y \in I \setminus \{x\}}$ est équicontinue. En déduire que

$$\forall x \in I, \exists C_x > 0, \forall f \in F, \forall y \in I, |f(y) - f(x)| \leq C_x \|f\|_\infty |y - x|.$$

3. Fixons $\varepsilon > 0$ (arbitraire), pour $x \in I$, notons $U_x =]x - \frac{\varepsilon}{8C_x}, x + \frac{\varepsilon}{8C_x}[$.

i. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \dots, x_n \in I$ tels que $I \subset U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_n}$.

ii. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{k} < \frac{\varepsilon}{8}$, pour $j = (j_1, \dots, j_n) \in \{-k, \dots, k\}^n$, posons

$$\Theta_j = \bigcap_{i=1}^n \bigcap_{y \in U_{x_i}} \{f \in F \text{ tel que } |f(y) - \frac{j_i}{k}| < \frac{\varepsilon}{4}\}.$$

Notons $J = \{j \in \{-k, \dots, k\}^n \text{ tel que } \Theta_j \neq \emptyset\}$ et soit une suite finie $(f_j)_{j \in J}$ d'éléments de F telle que

$$\forall j \in J, f_j \in \Theta_j.$$

Montrer que pour tout $j \in J$,

$$\Theta_j \subset B_F(f_j, \varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in F \text{ tel que } \|f - f_j\|_\infty < \varepsilon\}$$

et que

$$B_F(0, 1) \subset \bigcup_{j \in J} B_F(f_j, \varepsilon) = \{f_j, j \in J\} + B_F(0, \varepsilon).$$

4. En déduire que la dimension de F est finie.

3.2 Application ouverte

Exercice 3.2.1

Montrer que $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ surjective continue non ouverte.

$$x \mapsto x^3 - 2x$$

Exercice 3.2.2

Soit E, F deux espaces vectoriels topologiques et $f: E \rightarrow F$ linéaire.

i. Montrer que f est ouverte si et seulement si elle est ouverte en 0 (f est ouverte en x si $\forall V \in \mathcal{V}_E(x)$, $f(V) \in \mathcal{V}_F(f(x))$).

ii. Montrer que si f ouverte alors elle est surjective.

Exercice 3.2.3

Soit E, F deux espaces de Banach et $T: E \rightarrow F$ une application linéaire continue bijective. Montrer que $T^{-1}: F \rightarrow E$ est continue (donc T est un homéomorphisme).

Exercice 3.2.4

Soit $E = l^1 = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \text{ tel que } \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n| < \infty\}$ muni de la norme $\|(x_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|$. On sait que E muni de cette norme est un espace de Banach. Soit $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \in]0, +\infty[^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim_n \alpha_n = 0$. Posons

$$T: \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} & \longmapsto & (\alpha_n x_n)_{n \in \mathbb{N}}. \end{array}$$

1. Montrer que T est bien définie linéaire continue et injective.
2. Montrer que T n'est pas surjective.
3. Montrer qu'il existe $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$ telle que $\sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n^{-1} |u_n|$ diverge.

Exercice 3.2.5

Montrer que $L^2([0,1]; \mathbb{R})$ est maigre dans $(L^1([0,1]; \mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$. On peut utiliser l'injection canonique $i: L^2 \rightarrow L^1$.

Exercice 3.2.6

Soit E un espace vectoriel muni de deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ telles que E est complet pour ces deux normes. Montrer que $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2 \implies \mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$, où $\mathcal{T}_i$ est la topologie sur E associée à la norme $\|\cdot\|_i$ (d'où l'équivalence des deux normes).

Exercice 3.2.7

Soit E un espace de Banach, F un espace vectoriel normé et $T : E \rightarrow F$ une application linéaire continue telle que $\exists C > 0$ tel que $\forall x \in E, \|T(x)\| \geq C\|x\|$. Montrer que T est injective et $\text{Im}T$ est fermé.

3.3 Graphe fermé**Exercice 3.3.1**

1. Montrer que si E, F sont deux espaces vectoriels et $f : E \rightarrow F$ est linéaire alors $G_f \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y) \in E \times F \text{ tel que } y = f(x)\}$ est sous espace vectoriel de $E \times F$.
2. Montrer que si E, F sont deux espaces topologiques avec F séparé et $f : E \rightarrow F$ est continue alors $G_f \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y) \in E \times F \text{ tel que } y = f(x)\}$ est une partie fermée de $E \times F$.
3. Soit $(E, \mathcal{T}_E) = (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ qui est un espace de Banach avec la norme « valeur absolue », soit $(F, \mathcal{T}_F) = (\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ (cet espace est métrisable par une distance invariante par translation et complet pour cette distance, mais la topologie n'est pas vectorielle). Posons $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto x$$

Montrer que G_f est fermé dans $E \times F = \mathbb{R}^2$ mais f n'est pas continue.

Exercice 3.3.2

Soit E, F deux espaces de Fréchet et soit $T : E \rightarrow F$ une application linéaire. Montrer que

$$T \text{ est continue} \iff \forall f \in F', f \circ T \text{ est continue.}$$

Exercice 3.3.3 (Théorème de Hellinger-Toeplitz)

1. Soit H un espace d'Hilbert et $T : H \rightarrow H$ un endomorphisme hermitien (i.e. $\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle$) (symétrique dans le cas réel). Montrer que T est continu.
2. Soit H un $\mathbb{C}$ -espace d'Hilbert et $T : H \rightarrow H$ un endomorphisme positif ($\langle Tx, x \rangle \in \mathbb{R}_+$). Montrer que pour tous $x, y \in H$,

$$4\langle Tx, y \rangle = \left(\langle T(x+y), x+y \rangle - \langle T(x-y), x-y \rangle \right) + i \left(\langle T(x+iy), x+iy \rangle - \langle T(x-iy), x-iy \rangle \right).$$

En déduire que T est continu.

Exercice 3.3.4 (lemme de Alexandre Grothendieck)

Soit $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espace probabilisé. Soit F un sous espace vectoriel fermé de $L^1(X, \mathcal{F}, \mu) = L^1$ tel que $F \subset L^\infty([0, 1])$.

1. Montrer que F est un sous espace vectoriel fermé de $L^p(X, \mathcal{F}, \mu) = L^p$, pour tout $p \geq 1$.
2. En utilisant le théorème du graphe fermé pour la fonction $i : F \rightarrow L^\infty$, montrer qu'il existe

$$C \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall f \in F, \|f\|_{L^\infty} \leq C\|f\|_{L^2}.$$

3. Soit $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ une famille de F orthonormée avec le produit scalaire de L^2 .
 i. Montrer que $\sum_{i=1}^n f_i^2 \leq C^2$ μ -pp. ii. En déduire que F est de dimension finie.

Exercice 3.3.5

Soit F un sous espace vectoriel fermé de $E = L^1([0,1]; \mathbb{R})$ muni de sa norme habituelle tel que F vérifie pour tout $f \in F$ il existe $p_f > 1$ tel que $f \in L^{p_f}([0,1]; \mathbb{R}) = L^{p_f}$.

1. Pour $k, n \in \mathbb{N}^*$, notons $F_{n,k} \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in F; \int_{[0,1]} |f|^{1+\frac{1}{k}} \leq n\}$. Montrer que $F_{n,k}$ est fermé dans F et que

$$F = \bigcup_{(n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*} F_{n,k}.$$

2. En déduire qu'il existe $p > 1$ tel que $F \subset L^p$ et qu'il existe $C > 0$ tel que $\forall f \in F, \|f\|_p \leq C \|f\|_1$.

Chapitre 4

Topologies faibles Espaces réflexifs

Les exercices de ce chapitre ne sont pas encore corrigés pour le moment.

4.1 Dual topologique

Exercice 4.1.1

Soient E et F deux espaces normés. On écrit $E \simeq F$ s'il existe une isométrie linéaire surjective $\psi : E \rightarrow F$ et on dit que E s'identifie à F (via ψ). Montrer que

1. $E \simeq F \implies E' \simeq F'$.
2. si $F \subset E$ et F est dense dans E alors $E' \simeq F'$.

Exercice 4.1.2

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé. On note E'' le bidual de $(E, \|\cdot\|)$ muni de la norme $\|\phi\| = \sup_{\|f\|_{E'} \leq 1} \phi(f)$.

1. Montrer que $J : E \rightarrow E''$ définie par $J(x)(f) = f(x)$ est une isométrie linéaire.
2. Dédire que tout espace normé E est isométrique à un sous espace dense d'un espace complet - Ce dernier espace est dit le complété de E .

Exercice 4.1.3 (Dualité des espaces l^p)

Soit $p \in [1, +\infty]$ et q son exposant conjugué.

1. Pour tout $g \in l^q$, on définit $L_g : l^p \rightarrow \mathbb{C}$ par $L_g(f) = \sum_{n \in \mathbb{N}} f(n)g(n)$. Montrer que $L_g \in (l^p)'$ et $\|L_g\|_{(l^p)'} = \|g\|_{l^q}$.
2. Montrer que $L : l^q \rightarrow (l^p)'$ définie par $L(g) = L_g$ est une isométrie linéaire.
3. Montrer que si $p \neq \infty$ alors L est surjective et par conséquent que $(l^p)^* \simeq l^q$ et que L n'est pas surjective si $p = \infty$ c-à-d $l^1 \simeq L(l^1) \subsetneq (l^\infty)^*$.

Exercice 4.1.4

Montrer que

1. $(c_0)^* \simeq l^1$
2. $(c_{00})^* \simeq l^1$.

Où c_0 est l'espace des suites qui convergent vers 0 et c_{00} l'espace des suites qui s'annulent à partir d'un certain rang.

Exercice 4.1.5

Soit $(E_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite d'espaces vectoriels topologiques et $E = \prod_{n \in \mathbb{N}^*} E_n$. Montrer que

$$L \in E' \iff \exists p \in \mathbb{N}^*, \exists f_1 \in E'_1 \cdots \exists f_p \in E'_p, \forall x \in E, L(x) = \sum_{i=1}^p f_i(x_i).$$

4.2 Topologie faible**Exercice 4.2.1**

Soit C une partie convexe d'un espace normé E . Montrer que C est faiblement fermé si et seulement si elle est fortement fermé.

Exercice 4.2.2

Soit E un espace normé. Montrer que la fermeture de $S = \{x \in E; \|x\| = 1\}$ est $B = \{x \in E; \|x\| \leq 1\}$ et que l'intérieur de $U = \{x \in E; \|x\| < 1\}$ est vide.

Exercice 4.2.3

Soit E un espace normé et $\psi : E \rightarrow]-\infty, \infty]$ une fonction convexe s.c.i. pour la topologie forte. Montrer qu'elle est s.c.i. pour la topologie faible et que si $(x_n)_n \rightarrow x$ alors

$$\psi(x) \leq \liminf \psi(x_n).$$

Exercice 4.2.4

Soit M un sous espace fermé d'un evt E . Montrer que $\sigma(M, M') = \sigma(E, E') \cap M$, autrement dit la topologie faible sur l'espace M muni la topologie trace de E sur M est la topologie trace de la topologie faible de E sur la partie M ?!.

Exercice 4.2.5

Soit E un espace vectoriel normé de dimension infinie. On se propose de montrer que la topologie faible n'est métrisable. Pour cela on suppose qu'il existe une distance d sur E telle que $\sigma(E, E') = \mathcal{T}_d$ (la topologie associée à d).

1. Montrer qu'il existe une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ d'éléments de E' telle que $\forall k \in \mathbb{N}^*, \exists p_k \in \mathbb{N}^*, \exists \varepsilon_k > 0$, tels que

$$\bigcap_{i=1}^{p_k} \{x \in E : |f_i(x)| < \varepsilon_k\} \subset B_d(0, \frac{1}{k}).$$

2. Soit $g \in E'$ et $V_g = \{x \in E : |g(x)| < 1\}$.

a) Montrer que $\exists p_g \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\bigcap_{i=1}^{p_g} \text{Ker } f_i \subset V_g \quad \text{et donc} \quad \bigcap_{i=1}^{p_g} \text{Ker } f_i \subset \text{Ker } g$$

b) En considérant la fonction $F: E \rightarrow \mathbb{R}^{1+p_g}$, $x \mapsto (g(x), f_1(x), \dots, f_{p_g}(x))$, montrer qu'il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_{p_g} \in \mathbb{R}$ tels que $g = \sum_{i=1}^{p_g} \alpha_i f_i$.

3. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $E' = \text{vect}\{f_1, \dots, f_{n_0}\}$.

4. Conclure.

Exercice 4.2.6

Soient E et F deux espaces de Banach et $T: E \rightarrow F$ une application linéaire. Dans la suite E_w veut dire que E est muni de sa topologie faible et même chose pour F_w .

1. Montrer que

(1) $T: E \rightarrow F$ est continue $\iff$ (2) $T: E_w \rightarrow F_w$ est continue $\iff$ (3) $T: E \rightarrow F_w$ est continue.

2. Montrer que $T: E_w \rightarrow F_w$ est continue $\implies \dim \text{Im}(T) < \infty$.

Exercice 4.2.7

Soit $(x_n)_n$ une suite d'un espace de Hilbert H qui converge faiblement vers $x \in H$. Montrer que

$$(x_n)_n \text{ converge} \iff \limsup \|x_n\| \leq \|x\|.$$

Exercice 4.2.8

Dans l'espace $\mathcal{C}([0,1]; \mathbb{R})$ on considère la suite $(f_n)_n$ définie par $f_n(x) = \begin{cases} nx & \text{si } x \in [0, \frac{1}{n}] \\ -nx + 2 & \text{si } x \in [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}] \\ 0 & \text{si } x \in [\frac{2}{n}, 1] \end{cases}$. Montrer que cette suite converge faiblement mais pas fortement vers 0.

Exercice 4.2.9 (Théorème de Schur)

Soit $(x^p)_p$ une suite d'éléments de l^1 qui converge faiblement vers 0.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \lim_{p \rightarrow \infty} x_n^p = 0$.

2. En déduire que la suite $(x^p)_p$ converge fortement.

Exercice 4.2.10

Montrer que si $(x_n)_n$ est une suite bornée d'un Banach E telle que $f(x_n) \rightarrow 0$ pour tout f dans une partie dense dans E' , alors $(x_n)_n$ converge faiblement vers 0. Que peut-on dire si on enlève la

condition de bornitude?

Exercice 4.2.11

Soit la suite des fonctions $f = (f_n)_n$ définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \sqrt{n} 1[n, n + \frac{1}{n}]$.

1. Montrer que f converge simplement vers 0.
2. Montrer que $\forall n, f_n \in L^2(\mathbb{R})$ et calculer sa norme dans $L^2(\mathbb{R})$.
3. Montrer que f converge faiblement dans $L^2(\mathbb{R})$ vers 0 mais ne converge pas fortement.
4. Montrer que f converge fortement dans $L^p(\mathbb{R})$ pour $p \in [1, 2[$.

4.3 Topologie faible étoile

Exercice 4.3.1

Soit E un espace de Banach. Montrer que si $(f_n)_n$ est une suite bornée de E' telle que $f_n(x) \rightarrow 0$ pour tout x dans une partie dense dans E , alors $(f_n)_n$ converge faiblement* vers 0. Que peut-on dire si on enlève la condition de bornitude?

Exercice 4.3.2

Soit $E = l^\infty$. Trouver une suite d'éléments de E' de normes 1 et qui ne possède aucune sous suite convergente pour la topologie faible*. Y-a-il contradiction avec le fait que la boule fermée est compact pour la topologie faible*? Que peut-on dire sur E ?

Exercice 4.3.3

Soient E un espace normé. Montrer que

1. si $f : E' \rightarrow \mathbb{R}$ est une application linéaire et continue pour la topologie faible* alors

$$\exists x \in E, ; \forall h \in E', f(h) = h(x).$$

2. si H est un hyperplan de E' fermé pour la topologie faible* alors

$$\exists x \in E \setminus \{0\}, \exists \alpha \in \mathbb{R}, H = \{h \in E' : h(x) = \alpha\}.$$

3. si J de l'exercice 4.1.2 (ou de cours) n'est pas surjective (E est non réflexif) alors il existe des convexes fermés pour $\sigma(E', E'')$ qui ne sont pas fermés pour $\sigma(E', E)$, en particulier $\sigma(E', E) \subsetneq \sigma(E', E'')$ (on a deux types de convexes fermés!).

Exercice 4.3.4 (Banach-Alaoglu-Bourbaki)

Soit E un espace de Banach. Montrer que $B_{E'} = \{f \in E' : \|f\|_{E'} \leq 1\}$ est compact pour la topologie faible* $\sigma(E', E)$.

Exercice 4.3.5 (Goldstine)

Soit E un espace de Banach. Montrer que $J(B_E)$ est dense dans $B_{E''}$ pour la topologie faible* $\sigma(E'', E')$.

4.4 Réflexivité et séparabilité**Exercice 4.4.1**

Montrer qu'un espace de Hilbert est réflexif.

Exercice 4.4.2

Montrer que les espaces L^p avec $p \in]1, \infty[$ sont réflexifs.

Exercice 4.4.3

Soit E un espace réflexif et soit $f \in E'$, montrer que $\|f\|_{E'}$ est atteinte (un critère pour montrer qu'un espace n'est pas réflexif).

Exercice 4.4.4

Soit E un espace normé.

1. Montrer que E' est séparable implique que E est séparable. que peut-on dire de la réciproque ? Pensez à $E = l^1$.
2. Montrer que E' est réflexif si et seulement si que E est réflexif.
3. Montrer que E' est réflexif séparable si et seulement si que E est réflexif séparable.

Exercice 4.4.5

Soit E un evn réflexif et M un sous espace vectoriel de E . Montrer que M est réflexif si et seulement si M est fermé.

Exercice 4.4.6

Soit E un espace réflexif. Montrer que tout borné est relativement faiblement compact.

Exercice 4.4.7

Montrer que si E et F sont deux evn isomorphes alors E est réflexif si et seulement si F l'est aussi.

Exercice 4.4.8 (Lemme de Helly)

Soient E un espace de Banach, $f_1, \dots, f_n \in E'$ et $s_1, \dots, s_n \in \mathbb{R}$.
 Montrer que (i) $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in E$ tel que $\|x\| \leq 1$ et $\forall i = 1 \cdot \cdot n, |f_i(x) - s_i| < \varepsilon$ si et seulement si $\forall t = 1, \dots, n, \exists t_i \in \mathbb{R}, |\sum_{i=1}^n t_i s_i| \leq \|\sum_{i=1}^n t_i f_i\|$.

Exercice 4.4.9

Soit E un espace de Banach. Montrer que E est réflexif si et seulement si B_E est compact pour la topologie faible $\sigma(E, E')$.

Exercice 4.4.10

Soit E un espace de Banach réflexif. Soit K une partie convexe fermée et bornée de E . Montrer que K est compact pour la topologie faible $\sigma(E, E')$.

Exercice 4.4.11

Soit E un espace de Banach réflexif, soit K une partie convexe fermée de E non vide et soit $\phi : K \rightarrow]-\infty, \infty]$ une fonction convexe s.c.i. telle que $\phi \not\equiv +\infty$ et si K est non bornée alors $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \phi(x) = 0$. Montrer que ϕ atteint son minimum sur K c-à-d $\exists k \in K, \phi(k) = \min_K \phi$.

Exercice 4.4.12

Soit E un espace de Banach. Montrer que

$$B_{E'} \text{ est métrisable pour la topologie faible}^* \sigma(E', E) \iff E \text{ est séparable.}$$

Exercice 4.4.13

Soit E un espace de Banach tel que E' est séparable. Montrer que B_E est métrisable pour la topologie faible $\sigma(E, E')$.

Exercice 4.4.14

Soit E un espace de Banach séparable. Montrer que toute suite $(f_n)_n$ bornée dans E' possède une sous suite convergente pour la topologie $\sigma(E', E)$.

Exercice 4.4.15

Soit E un espace de Banach réflexif. Montrer que toute suite $(x_n)_n$ bornée dans E possède une sous suite convergente pour la topologie $\sigma(E, E')$.

Exercice 4.4.16

Un espace de Banach E est dit uniformément convexe si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que $\forall x, y \in E$,

$$\|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1, \|x - y\| > \varepsilon \implies \left\| \frac{x + y}{2} \right\| < 1 - \delta.$$

1. Montrer que tout espace de Banach uniformément convexe est réflexif.
2. Soit E un espace de Banach uniformément convexe et soit $(x_n)_n$ une suite qui converge faiblement dans E vers x . Montrer que

$$(x_n)_n \text{ converge fortement dans } E \iff \limsup_n \|x_n\| \leq \|x\|.$$

4.5 Devoir libre

Exercice 4.5.1

Montrer que $L^1([0,1])$ n'est pas le dual d'un evn (n'admet pas de préduel!). Cet exercice "difficile" utilise le théorème de Krein-Milman.

CORRECTIONS

Ch. 1 : Théorème de Hahn-Banach et Théorème de Baire

Corrigé de l'exercice 1.1.1

Considérons $\mathcal{F}$ l'ensemble des familles libres de X qui contient L_0 muni de la relation d'ordre « inclusion » $\subset$. On a $(\mathcal{F}, \subset)$ est inductif car $L_0 \in \mathcal{F}$ donc $\mathcal{F} \neq \emptyset$ et si $(L_i)_{i \in I}$ est une famille de $\mathcal{F}$ totalement ordonnée (*) alors $L \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_i L_i$ est un élément de $\mathcal{F}$ qui majore la famille $(L_i)_{i \in I}$. En effet, soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $e_1, \dots, e_n \in L$ et soit $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tels que $\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n = 0$.

Pour $k \in \{1, \dots, n\}$, il existe $i_k \in I$ tel que $e_k \in L_{i_k}$ et par une récurrence finie et l'hypothèse (*), il existe $i_0 \in I$ tel que $L_{i_1} \cup \dots \cup L_{i_n} \subset L_{i_0}$ donc $e_1, \dots, e_n \in L_{i_0}$ ainsi $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$, ceci prouve que $(\mathcal{F}, \subset)$ est inductif.

Le lemme de Zorn affirme l'existence d'un élément maximale $\mathcal{B}$ de $(\mathcal{F}, \subset)$. Supposons que $\text{Vect}_{\mathbb{K}}(\mathcal{B}) \neq X$ donc il existe $f \in X$ tel que $f \notin \text{Vect}_{\mathbb{K}}(\mathcal{B})$, ce qui donne $\mathcal{B} \subset \mathcal{B} \cup \{f\} \in \mathcal{F}$ ce qui absurde part conséquent $\text{Vect}_{\mathbb{K}}(\mathcal{B}) = X$ et par suite $\mathcal{B}$ est une base de X contenant L_0 . $\square$

Corrigé de l'exercice 1.1.2

Considérons $\mathcal{F}$ l'ensemble des sous espaces vectoriels Z de E tels que $Z \cap V = \{0\}$ muni de la relation d'ordre « inclusion » $\subset$. On a $(\mathcal{F}, \subset)$ est inductif car $\{0\} \in \mathcal{F}$ donc $\mathcal{F} \neq \emptyset$ et si $(Z_i)_{i \in I}$ est une famille de $\mathcal{F}$ totalement ordonnée (*) alors $Z \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_i Z_i$ est un élément de $\mathcal{F}$ qui majore la famille $(Z_i)_{i \in I}$. En effet, il reste seulement à vérifier que Z est un sous espace vectoriel de E : soit $x, y \in Z$ et $\alpha, \beta \in K$, donc il existe $i_x, i_y \in I$ tels que $x \in Z_{i_x}$ et $y \in Z_{i_y}$ mais l'hypothèse (*) assure l'existence de $i_0 \in \{i_x, i_y\}$ tel que $Z_{i_x} \cup Z_{i_y} \subset Z_{i_0}$ donc $\alpha x + \beta y \in Z_{i_0} \subset Z$. D'après le lemme de Zorn, il existe un élément maximale W de $(\mathcal{F}, \subset)$. Supposons que $V + W \neq E$ alors il existe $x \in E$ tel que $x_0 \notin V + W$, ceci donne $W \subset W + \mathbb{R}x_0 \in \mathcal{F}$ ce qui contredit le fait que W est maximal. Ainsi $W \oplus V = E$. $\square$

Corrigé de l'exercice 1.1.3

1. Soient $P = \sum_{i=0}^n a_i X^i$ et $Q = \sum_{i=0}^m b_i X^i$ dans A avec $a_n < 0, b_m < 0$ et soit $t \in [0, 1]$. Donc le coefficient dominant de $(1-t)P + tQ$ est dans l'ensemble $\{(1-t)a_n, tb_m, (1-t)a_n + tb_m\} \subset]-\infty, 0]$ d'où $(1-t)P + tQ \in A$ et donc A est convexe.

Soient $P = \sum_{i=0}^n a_i X^i$ et $Q = \sum_{i=0}^m b_i X^i$ dans B avec $a_i \geq 0, b_i \geq 0$ et soit $t \in [0, 1]$. Puisque $(1-t)a_i + tb_i \geq 0$, $(1-t)P + tQ = \sum_{i=0}^n ((1-t)a_i + tb_i) X^i \in B$. Ce qui montre que B est aussi convexe.

2. Soit f une forme linéaire sur E et α un réel tels que $\forall P \in A, \forall Q \in B, f(P) \leq \alpha \leq f(Q)$. Puisque $0 \in B$, on a $\alpha \leq 0$. Soit $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}$ donc $-\varepsilon X^{n+1} + X^n \in A$ ainsi $f(-\varepsilon X^{n+1} + X^n) \leq 0$ la linéarité de f nous donne $0 \leq f(X^n) \leq \varepsilon f(X^{n+1})$. Tendons $\varepsilon \rightarrow 0^+$ pour obtenir $f(X^n) = 0$. La linéarité encore nous permet de dire que f est nulle. $\square$

Corrigé de l'exercice 1.1.4

1) Soit $f_1 \in E$ tel que $f_1 \neq 0$ (f_1 existe car $\dim E = \infty$), posons $e_1 = \frac{f_1}{\|f_1\|}$. Supposons $e_1, \dots, e_n$ donnés dans E tels que $\|e_1\| = \dots = \|e_n\| = 1$ et $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ est libre. Soit $f_{n+1} \in E$ tel que $f_{n+1} \notin \text{Vect}\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ (existe car $\dim E = \infty$) et notons $e_{n+1} = \frac{f_{n+1}}{\|f_{n+1}\|}$, on a $\|e_1\| = \dots = \|e_n\| = \|e_{n+1}\| = 1$ et $\{e_1, e_2, \dots, e_n, e_{n+1}\}$ est libre.

On a ainsi construit, par récurrence, une suite libre $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \|e_n\| = 1$.

Posons $V = \text{Vect}\{e_n; n \in \mathbb{N}^*\}$ et soit g la forme linéaire sur V telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*, g(e_n) = n$. Soit W un sous espace vectoriel de E tel que $V \oplus W = E$ et soit f la forme linéaire sur E définie par

$$\begin{aligned} f: V \oplus W &\longrightarrow \mathbb{K} \\ v + w &\longmapsto g(v). \end{aligned}$$

Si f est continue alors il existe $C \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall x \in E; |f(x)| \leq C\|x\|$ en particulier pour $x = e_{C+1}$, on a $\forall C + 1 \leq C$, ce qui absurde. Ainsi f n'est pas continue.

2) Fixons f une forme linéaire sur E non continue et posons $A = \{f \leq 0\}$ et $B = \{f > 0\}$, on a A et B sont convexes et vérifient $A \cap B = \emptyset, A \cup B = E$. Il reste à montrer que A et B sont denses, pour cela on considère $H = \{f = 0\}$ et supposons que $\overline{H} \neq E$ donc il existe h une forme linéaire continue non nulle qui s'annule sur H (théorème de Hahn-Banach deuxième forme géométrique). Soit $x_0 \notin (h = 0)$, on a $f(x_0) \neq 0$.

Soit $x \in E$ donc $y = x - \frac{f(x)}{f(x_0)} x_0 \in H$ donc $h(x) = \frac{f(x)}{f(x_0)} h(x_0)$ ainsi $f = \frac{f(x_0)}{h(x_0)} h$ et donc f continue, absurde. Par conséquent H est dense dans E .

D'autre part, soit $x_\alpha \in (f = \alpha)$ et $x \in E$, donc la densité de $(f = 0)$ dans E assure l'existence d'une suite $(y_n)_n$ qui converge vers $x - x_\alpha$ donc $(x_\alpha + y_n)_n$ est une suite d'éléments de $(f = \alpha)$ qui converge vers x . ainsi on a montré que $(f = \alpha)$ est dense dans E . Puisque $(f = 0) \subset A$ et $(f = 1) \subset B$, alors A et B sont denses dans E .

3) Supposons qu'on peut séparer A et B avec un hyperplan fermé, donc il existe une forme linéaire h continue non nulle et il existe un réel α tels que $\forall x \in A$ et $\forall y \in B$, on a $h(x) \leq \alpha \leq h(y)$.

Soit $z \in E$, il existe deux suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ qui convergent vers z telles que $\forall n, x_n \in A$ et $y_n \in B$. Ainsi $\forall n, h(x_n) \leq \alpha \leq h(y_n)$ la continuité de h donne $h(z) = \alpha$ et pour $z = 0$ on a $\alpha = 0$ c-à-d h est nulle ce qui contredit les hypothèses sur h . On conclut qu'on ne peut pas séparer A et B . $\square$

Corrigé de l'exercice 1.1.5

i. Notons $\mathcal{F}$ l'ensemble des parties fermées non vides G de K telle que $f(G) \subset G$ muni de l'ordre $\supset$.

On a $(\mathcal{F}, \supset)$ est inductif :

puisque $K \in \mathcal{F}$ donc $\mathcal{F} \neq \emptyset$ et si $(G_i)_i$ est une chaîne de $\mathcal{F}$ alors $G \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_i G_i$ est un élément de $\mathcal{F}$ qui majore pour $\supset$ et minore pour $\subset$ la famille $(G_i)_i$ car l'intersection quelconque de fermés est un fermé donc G est fermé, $G \subset G_i$ donc $f(G) \subset f(G_i) \subset G_i$ ce qui donne $f(G) \subset G$. il reste à montrer que $G \neq \emptyset$, supposons le contraire donc $K = \bigcup_i G_i^c$ or les G_i sont des ouverts de K et ce dernier est compact donc il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et il existe $i_1, \dots, i_n$ tels que $K = G_{i_1}^c \cup \dots \cup G_{i_n}^c$ mais les G_i sont totalement ordonnés donc il existe i_0 tel que $G_{i_0} \subset G_{i_1} \cap \dots \cap G_{i_n} = \emptyset$ absurde puisque G_{i_0} est dans $\mathcal{F}$ donc non vide. On vient de montrer que $G \in \mathcal{F}$ et par suite $(\mathcal{F}, \supset)$ est inductif.

Soit F un élément maximal de $(\mathcal{F}, \supset)$ (l'existence est assurée par le lemme de Zorn) et ce dernier répond à notre question.

ii. Soit $x \in F$. Notons $G_p = \{f^n(x); n \geq p\}$, on a $G_p \subset F$ car $x \in F$ et donc $G_p \subset F$ (F est fermé) et $f(G_p) = G_{p+1} \subset G_p$ la continuité de f nous donne $f(F_p) \subset F_p$. Par la minimalité (pour $\subset$) de F , nous obtenons $F_p = F$ et donc $x \in F = \bigcap_p \{f^n(x); n \geq p\}$ (l'ensemble des valeurs d'adhérences). Puisque on a une topologie métrique x est limite d'une sous suite de $(f^n(x))_n$. $\square$

Corrigé de l'exercice 1.1.6

Considérons

$$\mathcal{F}_{(A,B)} = \{K \subset E \text{ tel que } K \text{ convexe, } A \subset K \text{ et } K \cap B = \emptyset\}$$

muni de la relation d'ordre « inclusion » $\subset$. On a $\mathcal{F}_{(A,B)} \neq \emptyset$ car $A \in \mathcal{F}_{(A,B)}$ et si $(K_i)_i$ est une chaîne de $(\mathcal{F}_{(A,B)}, \subset)$ alors il est facile de voir $\bigcup_i K_i \in \mathcal{F}_{(A,B)}$. Donc $(\mathcal{F}_{(A,B)}, \subset)$ est inductif et d'après le lemme de Zorn $(\mathcal{F}_{(A,B)}, \subset)$ admet un élément maximal C .

De même soit D un élément maximal de $(\mathcal{F}_{(B,C)}, \subset)$.

On a C, D sont convexes, $A \subset C$, $B \subset D$ et $C \cap D = \emptyset$. Il reste à montrer que $C \cup D = E$, supposons le contraire donc il existe $z \in E$ tel que $z \notin C \cup D$.

Posons $C' = co(C \cup \{z\})$ et $D' = co(D \cup \{z\})$ ($co(A)$ est l'enveloppe convexe de A) qui sont deux convexes contenant respectivement et strictement C et D . Donc $C' \notin \mathcal{F}_{(A,B)}$ et $D' \notin \mathcal{F}_{(B,C)}$ ce qui donne $C' \cap D \neq \emptyset$ et $D' \cap C \neq \emptyset$. Donc il existe $d \in D$, il existe $\alpha \in]0, 1]$ et il existe $c' \in C$ tels que $d = (1 - \alpha)c' + \alpha z$. De même il existe $c \in C$, il existe $\beta \in]0, 1]$ et il existe $d' \in D$ tels que $c = (1 - \beta)d' + \beta z$.

On obtient $\frac{\alpha(1-\beta)d' + \beta d}{\beta + \alpha - \alpha\beta} = \frac{\beta(1-\alpha)c' + \alpha c}{\beta + \alpha - \alpha\beta} \in D \cap C = \emptyset$. Absurde, ainsi $C \cup D = E$. $\square$

Corrigé de l'exercice 1.1.7

1. $\checkmark$ G est un sous espace vectoriel de E et g est linéaire.

Soit $x, y \in E$ et $t \in \mathbb{R}$ alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(x_0 + ty_0) + \dots + (x_{n-1} + ty_{n-1})}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_0 + \dots + x_{n-1}}{n} + t \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{y_0 + \dots + y_{n-1}}{n} = g(x) + tg(y).$$

$\checkmark \forall x \in G, g(x) \leq p(x)$.

Soit $x = (x_n)_n \in G$. Soit $m \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} g(x) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_0 + \dots + x_{n-1}}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{\frac{x_0 + \dots + x_{m-1}}{n}}_{=0} + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_m + \dots + x_{n-1}}{n} \\ &\leq \sup_{n \geq m} x_n \underbrace{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n-m}{n}}_{=1}. \end{aligned}$$

D'où $\boxed{g \leq p \text{ sur } G}$.

$\checkmark$ p est sous linéaire sur E .

i. Soit $t > 0$ et $x \in E$, alors

$$p(tx) = \inf_{n \geq n} \sup_{p \geq n} (tx_p) = t \inf_{n \geq n} \sup_{p \geq n} (x_p) = tg(x).$$

ii. Soit $x, y \in E$, on a $\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \geq n$,

$$x_p + y_p \leq \sup_{j \geq n} x_j + \sup_{j \geq n} y_j$$

prenons le sup sur $p \geq n$ et tendons ensuite $n \rightarrow +\infty$, pour obtenir $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$.

2. On a

$$\frac{y_0 + \dots + y_{n-1}}{n} = \frac{1}{n} (x_n - x_0) \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{puisque la suite } (x_n)_n \text{ est bornée.}$$

3. D'après le théorème de Hahn-Banach, il existe une application linéaire définie sur E à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui prolonge g et vérifiant $f \leq p$ sur E . De plus la question 2. affirme que $z - x \in G$ et $f(z - x) = g(z - x) = 0$, ainsi $f(z) = f(x)$ c-à-d f est stable par translation à droite.

D'autre part, $f(-x) \leq p(-x)$ donc $f(x) \geq -p(-x) = \liminf_n x_n$. □

Remarque :

✓ Si $\lim_n x_n = l$ alors $x = (x_n)_n \in G$ et $f(x) = g(x) = l$.

✓ $x = ((-1)^n)_n \in G \subset E$ et $f(x) = 0$.

Corrigé de l'exercice 1.1.8

Considérons la fonction

$$\begin{aligned} f: X &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ x &\longmapsto (\psi(x), \psi_1(x), \dots, \psi_n(x)) \end{aligned}$$

On a $f(X)$ est sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^{1+n}$ et $a \stackrel{\text{def}}{=} (1, 0, \dots, 0) \notin f(X)$ donc il existe $w = (w_0, w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{R}^{1+n}$ tel que $\forall x \in X$

$$\langle w, f(x) \rangle < \langle w, a \rangle = w_0.$$

En mettant $x = 0$, on obtient $w_0 > 0$. En prenant tx à la place de x puis tendons $t \rightarrow 0^+$ pour obtenir $\langle w, f(x) \rangle \leq 0$ et avec $-x$ à la place de x on a $\langle w, f(x) \rangle = 0$. par conséquent

$$\psi = \sum_{i=1}^n \lambda_i \psi_i$$

où $\lambda_i = -\frac{w_i}{w_0}$. □

Corrigé de l'exercice 1.1.9

On a A est un sous espace vectoriel de E et B est un singleton donc ils sont convexes. On a $A \cap B = \emptyset$ car f_0 n'est pas un polynôme.

Supposons qu'on peut séparer A et B au sens large. donc il existe une forme linéaire continue non nulle h et un réel α tels que $\forall P \in A, h(P) \leq \alpha \leq h(f_0)$.

Soit $P \in A$ et $t > 0$, on a $h(tP) \leq \alpha$ donc $h(P) \leq \frac{\alpha}{t}$. Tendons $t \rightarrow 0^+$ pour avoir $h(P) \leq 0$ et en prenant $-P$ au lieu de P , on retrouve $h(P) = 0$ c-à-d h s'annule sur A (et continue non nulle sur E).

Soit $f \in E$ telle que $h(f) > 0$. Donc

$$\forall P \in A, \quad 0 < h(f) = h(f - P) \leq \|h\| \|f - P\|_\infty.$$

D'où

$$\beta \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{\|f - P\|_\infty; P \in A\} > 0.$$

Or le théorème de Weierstrass (voir un cours de topologie ou le td de topologie en S5) assure l'existence d'un polynôme Q tel que $\|f - Q\|_\infty < \beta$, ce qui est absurde.

On ne peut pas séparer A et B au sens large.

□

Corrigé de l'exercice 1.1.10

1) On a A_0 et B sont deux sous espaces vectoriel de l^1 .

Soit $(x^k)_k$ une suite d'éléments de A_0 qui converge vers x dans l^1 . Donc $\sum_{n=1}^\infty |x_n^k - x_n| \rightarrow 0$ quand $k \rightarrow \infty$, en particulier $\forall n \in \mathbb{N}^*, x_{2n} = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{2n}^k = 0$ donc $x \in A_0$ et par suite A_0 est fermé.

D'autre part, Soit $(x^k)_k$ une suite d'éléments de B qui converge vers x dans l^1 . Donc $\sum_{n=1}^\infty |x_n^k - x_n| \rightarrow 0$ quand $k \rightarrow \infty$, en particulier $\forall n \in \mathbb{N}^*, x_{2n} = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{2n}^k = 2^{-n} \lim_{k \rightarrow \infty} x_{2n-1}^k = 2^{-n} x_{2n-1}$ donc $x \in B$ et par suite B est fermé.

Montrons maintenant que $l^1 = \overline{A_0 + B}$. Pour cela on considère la suite d'éléments $(e^k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$$e_n^k = \begin{cases} 1 & \text{si } n = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in l^1$, on a $\|x - \sum_{k=1}^p x_k e^k\|_1 \leq \sum_{k=p+1}^{\infty} |x_k| \rightarrow 0$ quand $p \rightarrow \infty$. Ce qui prouve que

$$l^1 = \overline{\text{Vect}\{e^k; k \in \mathbb{N}^*\}}.$$

Il suffit donc de montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*, e^k \in A_0 + B$.

Or si k est impair alors $e^k \in A_0 \subset A_0 + B$ et si k est pair alors $e^k = b - 2^{\frac{k}{2}} e^{k-1}$ avec

$$b_n = \begin{cases} 2^{\frac{k}{2}} & \text{si } n = k-1 \\ 1 & \text{si } n = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a $b \in B$ et $-2^{\frac{k}{2}} e^{k-1} \in A_0$ donc $e^k \in A_0 + B$.

2) Supposons que $c \in A_0 + B$ alors il existe $a \in A_0$ et $b \in B$ tels que $c = a + b$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, 2^{-n} = b_{2n} = 2^{-n} b_{2n-1}$ d'où $b_{2n-1} = 1$ qui ne converge pas vers 0 ce qui absurde puisque $b \in l^1$.

$$\begin{aligned} x \in A \cap B &\implies x + c \in A_0 \text{ et } x \in B \\ &\implies \forall n \in \mathbb{N}^*; x_{2n} + 2^{-n} = 0 \text{ et } x_{2n} = 2^{-n} x_{2n-1} \\ &\implies \forall n \in \mathbb{N}^*; x_{2n-1} = -1 \\ &\implies x \notin l^1. \end{aligned}$$

D'où $A \cap B = \emptyset$.

3) Supposons qu'on peut séparer au sens large A et B par un hyperplan affine fermé, donc il existe une forme linéaire continue non nulle h sur l^1 et un réel α tels que $\forall a \in A_0, \forall b \in B,$

$$h(a) - h(c) \leq \alpha \leq h(b).$$

Mais B est un sous espace vectoriel de l^1 donc h s'annule sur B et par suite $\forall z \in A_0, h(z) \leq h(c)$ d'où h s'annule aussi sur A_0 car A_0 est aussi un sous espace vectoriel de l^1 . Ainsi on a h s'annule sur $A_0 + B$ et ce dernier est dense dans l^1 et grâce à la continuité, h s'annule sur l^1 absurde. On conclut qu'on ne peut pas séparer au sens large A et B par un hyperplan affine fermé. □

Corrigé de l'exercice 1.1.11

Prenons la fonction

$$g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, 0) & \longmapsto & x \end{array}$$

On a g linéaire (continue!) et $\|g\| = 1$. Soit

$$f_1: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x + y \end{array}$$

et

$$f_2: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x - y \end{array}$$

On a f_1 et f_2 deux applications linéaires qui prolongent g et telles que $\|f_1\| = \|f_2\| = \|g\| = 1$ (avec la norme $\|(x, y)\|_1 = |x| + |y|$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$). □

Corrigé de l'exercice 1.1.12

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une famille libre de E . Notons $V = \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$. Soit g_i la forme linéaire (continue!) sur V définie par

$$g_i: \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n & \longmapsto & \lambda_i \end{array}$$

Soit f_i un prolongement de g_i à E tel que $\|g_i\| = \|f_i\|$ (qui existe d'après le théorème de Hahn-Banach).

Soit $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tel que $\alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_n f_n = 0 = 0_{E'}$. Soit $i \in \{1, \dots, n\}$, on a $(\alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_n f_n)(e_i) = 0_{E'}(e_i) = 0_{\mathbb{K}}$ donc $\alpha_i = 0_{\mathbb{K}}$. Ainsi $(f_1, \dots, f_n)$ est une famille libre de E' .

On en déduit que si $\dim E = \infty$ alors $\dim E' = \infty$. □

Corrigé de l'exercice 1.1.13

$\Rightarrow$: Soit $(f_n)_n$ une suite de Cauchy de $L(E;F)$. Soit $x \in E$, alors $(f_n(x))_n$ est une suite de Cauchy de F . Puisque F est de Banach, il existe un élément $f(x)$ de F tel que la suite $(f_n(x))_n$ converge vers $f(x)$. On obtient ainsi une application de E dans F qui limite simple de $(f_n(x))_n$. L'unicité de la limite et la linéarité de f_n nous donne f est linéaire.

Soit $\varepsilon > 0$, soit $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n, m \geq N_0, \forall y \in E \|f_n(y) - f_m(y)\| \leq \varepsilon \|y\|$. En tendant $m \rightarrow \infty$, on obtient $\forall n \geq N_0, \forall y \in E \|f_n(y) - f(y)\| \leq \varepsilon \|y\|$ et $\forall y \in E \|f(y)\| \leq (\|f_{N_0}\| + \varepsilon) \|y\|$

Donc f est continue c-à-d $f \in L(E;F)$ et la suite $(f_n)_n$ converge vers f dans $L(E;F)$.

$\Leftarrow$: Soit $e \in E \setminus \{0\}$ et $g \in E' \stackrel{\text{def}}{=} L(E; \mathbb{R})$ tel que $\|g\| = g(e) = 1$.

Soit $(y_n)_n$ une suite de Cauchy de F et considérons la suite des fonctions

$$\begin{aligned} f_n: E &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto g(x) y_n \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$ donc il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ telle que $\forall n, m \geq N_0, \|y_n - y_m\| \leq \varepsilon$. Soit $x \in E$ donc

$$\|f_n(x) - f_m(x)\| = \|g(x)\| \|y_n - y_m\| \leq \varepsilon \|x\|$$

d'où $(f_n)_n$ est une suite de Cauchy de $L(E;F)$ donc elle converge vers un élément f de $L(E;F)$, en particulier $(y_n)_n$ converge vers $f(e)$ dans F . $\square$

Corrigé de l'exercice 1.1.14

0) Soit $(A, \leq)$ bien ordonné, soient $x, y \in A$ donc $\{x, y\}$ est une partie de A non vide donc admet un plus petit élément, deux cas se présentent x est le plus petit élément de $\{x, y\}$ et dans ce cas $x \leq y$ sinon y est le plus petit élément de $\{x, y\}$ est donc $y \leq x$. Ainsi tous les éléments de A sont comparables c-à-d $(A, \leq)$ est totalement ordonnée.

1) Pour $A \in \mathcal{C}$, notons $\mathcal{M}_A = \{x \in X \setminus A \text{ tel que } \forall a \in A, a \leq x\}$. On a $\mathcal{M}_A \neq \emptyset$ sinon tout majorant de A appartient à A . Soit m un majorant de A , qui existe puisque X est inductif, donc m est un élément maximale de X ce qui contredit les hypothèses.

D'autre part, d'après l'axiome du choix, il existe une fonction (choix) $f : \mathcal{P}(X) \rightarrow X$ telle que

$$\forall Y \in \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}, f(Y) \in Y.$$

Posons $h : \mathcal{C} \rightarrow X$ définie par $h(A) = f(\mathcal{M}_A)$ cette dernière répond à la question 1).

2) Soit $A \in \mathcal{C}$ et $x \in A$. Soit C une partie de $A \cup \{h(A)\}$ non vide. Selon que $C \cap A$ est vide ou non, on a $\min C$ existe et vaut $h(A)$ ou $\min(C \cap A)$ donc $A \cup \{h(A)\} \in \mathcal{C}$. Pour le deuxième ensemble, il suffit de voir que $\{t \in A \text{ tel que } t < x\} \subset A$.

3) Soit A une h -chaîne, on a d'après 2), $A \cup \{h(A)\} \in \mathcal{C}$. Soit $x \in A \cup \{h(A)\}$, on a

$$\{t \in A \cup \{h(A)\} \text{ tel que } t < x\} = \{t \in A \text{ tel que } t < x\}$$

et vaut A si $x = h(A)$.

D'où $h(\{t \in A \cup \{h(A)\} \text{ tel que } t < x\}) = x$ et par suite $A \cup \{h(A)\}$ une h -chaîne.

4) Soit $\mathcal{S} \stackrel{\text{def}}{=} \{S \subset A \cap B \text{ tel que } S \text{ est un segment initial de } A \cup B\}$. Posons $C = \bigcup \mathcal{S} = \bigcup_{S \in \mathcal{S}} S$. On a C est le plus grand élément de $(\mathcal{C}, \subset)$ et donc c'est segment initial de A et aussi de B .

Supposons $C \neq A$ et $C \neq B$ alors $A \setminus C \neq \emptyset$ et $B \setminus C \neq \emptyset$, posons donc $a = \min(A \setminus C)$ et $b = \min(B \setminus C)$ qui existent puisque A et B sont bien ordonnés par définition de h -chaîne.

On a $C = \{x \in A \text{ tel que } x < a\} = \{y \in B \text{ tel que } y < b\}$ car, soit $x \in C$ donc $x \in A$ et si on n'a pas $x < a$ alors $a \leq x$ puisque A est totalement ordonnée et donc $a \in C$ puisque C est un segment initial de A ce qui contredit la définition de a ainsi $C \subset \{x \in A \text{ tel que } x < a\}$. Réciproquement, soit $x \in A$ tel que $x < a$, par définition de a , on a $x \in C$. D'où $C = \{x \in A \text{ tel que } x < a\}$ de même $C = \{y \in B \text{ tel que } y < b\}$. Or A et B sont deux h -chaînes alors $a = h(C) = b$ et donc $C' \stackrel{\text{def}}{=} C \cup \{a\} \subset A \cap B$.

Soit $s \in C'$ et $t \in A \cup B$ tels que $t < s$. Si $s \in C$ alors $t \in C \subset C'$, sinon $s = a = b$ donc

$$t \in \{x \in A \text{ tel que } x < a\} \cup \{y \in B \text{ tel que } y < b\} = C \subset C'$$

d'où $C' \in \mathcal{S}$ et par suite $C' \subset C$ donc $a \in C$. Absurde.

On vient de montrer que $C = A$ ou $C = B$, d'où A est segment initial de B ou B est un segment initial de A .

5) Soit $\mathcal{H}$ l'ensemble des h -chaînes de X et notons $H \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup \mathcal{H}$, on a $H \in \mathcal{C}$ (car $\mathcal{H} \subset \mathcal{C}$). Soit $x \in H$ donc il existe $A \in \mathcal{H}$ tel que $x \in A$ donc $x = h(\{t \in A \text{ tel que } t < x\})$. On a aussi $\{t \in A \text{ tel que } t < x\} \subset \{t \in H \text{ tel que } t < x\}$ car $A \subset H$. Supposons que $\{t \in A \text{ tel que } t < x\} \neq \{t \in H \text{ tel que } t < x\}$ alors il existe $t_0 \in X$ tel que $t_0 \in H, t_0 \notin A$ et $t_0 < x$. Soit $B \in \mathcal{H}$ tel que $t_0 \in B$.

D'après la question 2), A est un segment initial de B (on ne peut pas avoir l'autre cas car $B \not\subset A$) et donc $t_0 \in A$ car $x \in A$. Absurde et par conséquent $\{t \in A \text{ tel que } t < x\} = \{t \in H \text{ tel que } t < x\}$ et donc $x = h(\{t \in H \text{ tel que } t < x\})$, ce qui montre que H est une h -chaîne c-à-d $H = \bigcup \mathcal{H} \in \mathcal{H}$.

6) Considérons $H' \stackrel{\text{def}}{=} H \cup \{h(H)\}$ qui est une h -chaîne donc inclut dans H c-à-d $h(H) \in H$ ce qui contredit la définition de la fonction h .

Conclusion (Lemme de Zorn) :

Tout ensemble ordonné non vide inductif admet un élément maximal.

□

Corrigé de l'exercice 1.2.1

Fixons $x \in \mathbb{R}$. Soit $t \in \mathbb{R}$ et la suite $(t_n)_n$ définie par $t_n = \begin{cases} t & \text{si } t \neq x \\ x + \frac{1}{n+1} & \text{sinon} \end{cases}$. On a la suite $(t_n)_n$ est à valeurs dans U_x et

converge vers t . Donc U_x est un ouvert dense dans $\mathbb{R}$.

Soit $t \in \mathbb{R}$, $t \in \bigcap_{x \in \mathbb{R}} U_x \implies t \in U_t \implies t \neq t$. Ainsi $\bigcap_{x \in \mathbb{R}} U_x = \emptyset$.

On a $\bigcap_{x \in \mathbb{R}} U_x = \emptyset \neq \mathbb{R}$. Ici on ne peut pas appliquer le théorème de Baire car l'ensemble des indices $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable. □

Corrigé de l'exercice 1.2.2

Soit $n \in \mathbb{N}$, On F_n est sous espace vectoriel de dimension $n+1$ de E donc il est fermé (voir cours d'AF chapitre 2).

Supposons que $\overset{\circ}{F}_n \neq \emptyset$, alors il existe P_0 , il existe $r > 0$ tels que $B(P_0, r) \subset F_n$, en particulier $P_0 + \frac{r}{2}x^{n+1} \in F_n$. Absurde, donc $\overset{\circ}{F}_n = \emptyset$. Par conséquent $(E, \|\cdot\|_\infty)$ est un exemple d'espace vectoriel normé qui n'est pas de Baire, sinon $E = \overset{\circ}{E} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overset{\circ}{F}_n = \emptyset$ ce qui est incorrect et donc $(E, \|\cdot\|_\infty)$ n'est ni complet ni localement compact... □

Corrigé de l'exercice 1.2.3

Voir aussi le cours.

1) Pour $k, p \in \mathbb{N}^*$, Posons $F_{k,p} = \bigcap_{n, m \geq p} \{x \in I \text{ tel que } |f_n(x) - f_m(x)| \leq \frac{1}{k}\}$. On a les $F_{k,p}$ sont fermés (car les f_n sont continues)

et $I = \bigcup_p F_{k,p}$ puisque $(f_n)_n$ converge simplement vers f . Mais I est un espace de Baire ! Donc $\Omega_k = \bigcup_p \overset{\circ}{F}_{k,p}$ est un ouvert dense dans I . De nouveau I est de Baire, nous obtenons $\Omega = \bigcap_k \Omega_k$ est un G_δ dense dans I .

Soit $x \in \Omega$, soit $\varepsilon > 0$, soit $k_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{k_\varepsilon} < \frac{\varepsilon}{3}$ et soit $p_{\varepsilon, x} \in \mathbb{N}^*$ tel que $x \in \overset{\circ}{F}_{k_\varepsilon, p_{\varepsilon, x}} \stackrel{\text{def}}{=} V$.

Soit $t \in V$ alors $\forall n, m \geq p_{\varepsilon, x}$, $|f_n(t) - f_m(t)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$. En faisant $m \rightarrow \infty$, nous obtenons $|f_{p_{\varepsilon, x}}(t) - f(t)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Mais $f_{p_{\varepsilon, x}}$ est continue en x donc il existe un voisinage W de x tel que $\forall t \in W$, $|f_{p_{\varepsilon, x}}(t) - f_{p_{\varepsilon, x}}(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$.

Posons $U = V \cap W$, on a U est un voisinage de x tel que $\forall t \in U$

$$|f(t) - f(x)| \leq |f(t) - f_{p_{\varepsilon, x}}(t)| + |f_{p_{\varepsilon, x}}(t) - f_{p_{\varepsilon, x}}(x)| + |f_{p_{\varepsilon, x}}(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Conclusion f est continue sur Ω un G_δ dense dans I .

2) Si f est dérivable alors elle est continue et la fonction dérivée f' et la limite de la suite des fonctions continues $(f_n)_n$ définies par $f_n(x) = n(f(0 \vee (x + \frac{1}{n}) \wedge 1) - f(x))$ et d'après la question 1),

f' est continue sur un G_δ dense dans I .

□

Corrigé de l'exercice 1.2.4

Supposons que $\mathbb{Q}$ est un G_δ de $\mathbb{R}$, donc il existe une suite d'ouverts $(U_n)_n$ de $\mathbb{R}$ telle que $\mathbb{Q} = \bigcap_n U_n$, donc

$$\mathbb{R} = \bigcup_n U_n^c \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{q\}.$$

Or $\mathbb{R}$ est de Baire, et $\overset{\circ}{U}_n^c = \{q\} = \emptyset$. Absurde, ainsi $\mathbb{Q}$ n'est un G_δ de $\mathbb{R}$.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}$ l'ensemble des points où f est continue. Soit $x \in \mathcal{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ donc il existe un voisinage ouvert de x U_n tel que $t \in U_n \implies d(f(y), f(x)) < \frac{1}{n}$. On a $\mathcal{C} = \bigcap_n \bigcup_{x \in \mathcal{C}} U_n$ est G_δ de $\mathbb{R}$. Donc $\mathcal{C} \neq \emptyset$. □

Corrigé de l'exercice 1.2.5

Soit $\varepsilon > 0$, puisque f est continue, on a $\forall p \in \mathbb{N}$,

$$F_p \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{n \geq p} \{a \geq 0 \text{ tel que } |f(na)| \leq \varepsilon\}$$

est fermé de $[0, +\infty[$. De plus $\forall a > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(na) = 0$ donc $[0, +\infty[= \bigcup_p F_p$, ainsi il existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\overset{\circ}{F}_{p_0} \neq \emptyset$. Soit $a, b \in]0, +\infty[$ tel que $a < b$ et $[a, b] \subset F_{p_0}$. Posons $A = (p_0 + \frac{b}{b-a})a$, alors $\forall x \geq A$, $\frac{x}{n} \in [a, b] \subset F_{p_0}$ avec $n = \lfloor \frac{x}{a} \rfloor \leq p_0$, d'où $|f(x)| = |f(n \frac{x}{n})| \leq \varepsilon$.

Par conséquent $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$. □

Corrigé de l'exercice 1.2.6

1) Soit l'application linéaire bijective suivante

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & F_n \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \end{array}$$

On a $\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\|f(x)\| \leq \max_i |x_i| \max_i \|e_i\| \leq M \|x\|_\infty,$$

ainsi f est continue. En particulier

$$g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & \|x_1 e_1 + \dots + x_n e_n\| \end{array}$$

est continue. Soit $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \|x\|_\infty = 1\}$, on a $\mathcal{S}$ est un compact de $\mathbb{R}^n$, donc $g(\mathcal{S})$ est compact de $\mathbb{R}_+$, d'où $\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \min g(\mathcal{S}) > 0$. Soit $y \in F_n \setminus \{0_E\}$ donc il existe un unique $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ tel que $y = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$ d'où $\frac{1}{\|\lambda\|_\infty} \lambda \in \mathcal{S}$ et par suite $\|f(\frac{1}{\|\lambda\|_\infty} \lambda)\| \geq \alpha$ donc

$$\|f^{-1}(y)\|_\infty \leq \frac{1}{\alpha} \|y\|,$$

d'où la continuité de la fonction réciproque f^{-1} donc f est une fonction fermée. Ce qui montre en particulier que $F_n = f(\mathbb{R}^n)$ est fermé. (et l'équivalence des normes sur un espace vectoriel de dimension finie)!

Supposons que $\overset{\circ}{F}_n \neq \emptyset$ alors il existe $x_0 \in F_n$ et un réel $r > 0$ tels que $B(x_0, r) \subset F_n$ donc

$$x_0 + \frac{r}{2\|e_{n+1}\|} e_{n+1} \in F_n$$

d'où $e_{n+1} \in F_n$. Absurde, car $L = \{e_n, n \in \mathbb{N}^*\}$ une famille libre, ce qui prouve que F_n est d'intérieur vide.

2) Supposons que E admet une base dénombrable $\mathcal{B} = \{e_n, n \in \mathbb{N}^*\}$, alors $E = \bigcup_n F_n$ et puisque E est un espace de Banach il est de Baire ce qui donne $E = \overset{\circ}{E} = \bigcup_n \overset{\circ}{F}_n = \emptyset$. Absurde, donc E ne possède pas une base algébrique dénombrable. Pour $\mathbb{R}[X]$ qui est un espace vectoriel qui possède une base dénombrable ne peut pas être muni d'une norme qui le rend complet. $\square$

Corrigé de l'exercice 1.2.7

1) Notons $g_n: [0,1] \longrightarrow [-\infty, 0]$ et $f_p: [0,1] \longrightarrow [-\infty, 0]$
 $x \longmapsto \log|x - x_n|$ $x \longmapsto \sum_{n=0}^p \frac{1}{2^n} g_n(x)$

On a donc $f = \lim_p f_p = \inf_p f_p$, d'où $(f < c) = \bigcup_p (f_p < c)$. Ainsi si les f_p sont scs alors f l'est aussi en particulier f est borélienne.

D'autre part, si h et $\bar{h}$ sont scs et à valeurs dans $[-\infty, 0]$ alors $h + \bar{h}$ est scs, car

$$(h + \bar{h} < c) = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} ((f < q) \cap (g < q - c)).$$

De plus si $\alpha > 0$ alors αh est aussi scs $((\alpha h < c) = (h < \frac{c}{\alpha}))$.

Or $(g_n < c) =]x_n - e^c, x_n + e^c[\cap [0,1]$, donc g_n est scs. En déduit que f_p sont scs et donc f est scs.

2) On a $\{x_n; n \in \mathbb{N}\} \subset P = (f = -\infty) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} (f < -k)$ donc P est un G_δ dense dans $[0,1]$.

D'autre part,

$$\int_0^1 |f(t)| dt = \int_0^1 -f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} a_n$$

avec $a_n \stackrel{\text{def}}{=} -\int_0^1 \log|t - x_n| dt$, mais

$$\begin{aligned} a_n &= -\left(\int_0^{x_n} \log(-t + x_n) dt + \int_{x_n}^1 \log(t - x_n) dt \right) = -\left(\int_0^{x_n} \log t dt + \int_0^{1-x_n} \log t dt \right) \\ &= -\left(\int_0^{x_n} (t \log t - t)' dt + \int_0^{1-x_n} (t \log t - t)' dt \right) = 1 - x_n \log x_n - (1 - x_n) \log(1 - x_n) \in [0, 1 + 2e^{-1}]. \end{aligned}$$

Donc

$$\lambda(f = -\infty) = \lim_k \lambda(f < -k) = \lim_k \int_0^1 1_{(f < -k)}(t) dt \leq \frac{1}{k} \int_0^1 |f(t)| dt = 0.$$

Ainsi P est de mesure de Lebesgue nulle.

3) Supposons que P est dénombrable donc il existe une suite $(p_n)_n$ telle que $P = \{p_n; n \in \mathbb{N}\}$.

On a, pour $n \in \mathbb{N}$, $\Theta_n \stackrel{\text{def}}{=} (f < -n) \setminus \{p_n\}$ est un ouvert dense dans $[0,1]$ (car pour tout $x \in [0,1]$, il existe $a_k, b_k \in \{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ tels que $x - \frac{1}{k} < a_k < x < b_k < x + \frac{1}{k}$). Or $[0,1]$ est complet donc il est de Baire, d'où $\bigcap_n \Theta_n$ est dense dans $[0,1]$, mais $x \in \bigcap_n \Theta_n$ implique $\forall n, f(x) < -n$ et $x \neq p_n$ donc $x \in P$ et $\forall n, x \neq p_n$. Absurde, P n'est pas dénombrable. $\square$

Corrigé de l'exercice 1.2.8

1) Montrons que $F_n = \mathcal{C} \setminus \Theta_n$ est un fermé de $\mathcal{C}$. Soit $(f_p)_p$ une suite d'éléments de F_n qui converge vers f dans $\mathcal{C}$. Or, pour $p \in \mathbb{N}$, il existe $x_p \in [0,1]$ tel que $\forall y \in [0,1]$

$$|y - x_p| < \frac{1}{n} \implies |f_p(y) - f_p(x_p)| \leq n|y - x_p|.$$

La compacité de $[0,1]$ nous assure l'existence de $x \in [0,1]$ et d'une application $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante tels que $x_{\phi(k)} \rightarrow x$.

Soit $y \in [0,1]$ tel que $|y - x| < \frac{1}{n}$ donc il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \geq k_0$ on a $|y - x_{\phi(k)}| < \frac{1}{n}$.

D'où, $\forall k \geq k_0$,

$$\begin{aligned} |f(y) - f(x)| &\leq |f(y) - f_{\phi(k)}(y)| + |f_{\phi(k)}(y) - f_{\phi(k)}(x_{\phi(k)})| + |f_{\phi(k)}(x_{\phi(k)}) - f(x_{\phi(k)})| + |f(x_{\phi(k)}) - f(x)| \\ &\leq n|y - x_{\phi(k)}| + 2\|f_{\phi(k)} - f\|_{\infty} + |f(x_{\phi(k)}) - f(x)| \end{aligned}$$

Tendons $k \rightarrow \infty$, pour obtenir $|f(y) - f(x)| \leq n|y - x|$ et donc $f \in F_n$, ainsi F_n est fermé et par suite Θ_n est un ouvert de $\mathcal{C}$.

2) (i) Si $k_x = 0$ on a $y_x^N \in [0,1]$ d'après le choix de l'entier N qui est supérieur à 4π . Pour le cas $k_x^N \geq 1$, on a $y_x^N \geq 0$ et $Ny_x^N \leq Nx \leq N$ donc $y_x^N \in [0,1]$.

(ii)

Cas 1 : $k_x^N = 0$ et $Nx \in [0, \pi]$:

$$|Nx - Ny_x^N| = Ny_x^N - Nx = 2\pi + \frac{3}{2}\pi - Nx \in [\pi + \frac{3}{2}\pi, 2\pi + \frac{3}{2}\pi] \subset [\frac{1}{2}\pi, 4\pi]$$

Cas 2 : $k_x^N = 0$ et $Nx \in]\pi, 2\pi[$:

$$|Nx - Ny_x^N| = Ny_x^N - Nx = 2\pi + \frac{1}{2}\pi - Nx \in [\frac{1}{2}\pi, \pi + \frac{1}{2}\pi] \subset [\frac{1}{2}\pi, 4\pi]$$

Cas 3 : $k_x^N \neq 0$ et $Nx \in [2k_x^N\pi, 2k_x^N\pi + \pi]$:

$$|Nx - Ny_x^N| = Nx - Ny_x^N = Nx - 2(k_x^N - 1)\pi - \frac{3}{2}\pi \in [2\pi - \frac{3}{2}\pi, 3\pi - \frac{3}{2}\pi] \subset [\frac{1}{2}\pi, 4\pi]$$

Cas 4 : $k_x^N \neq 0$ et $Nx \in]2k_x^N\pi + \pi, 2k_x^N\pi + 2\pi[$:

$$|Nx - Ny_x^N| = Nx - Ny_x^N = Nx - 2(k_x^N - 1)\pi - \frac{1}{2}\pi \in [3\pi - \frac{1}{2}\pi, 4\pi - \frac{1}{2}\pi] \subset [\frac{1}{2}\pi, 4\pi]$$

(iii) On a si $\sin(Nx) \geq 0$ alors $\sin(Ny_x^N) = -1$ et si $\sin(Nx) < 0$ alors $\sin(Ny_x^N) = 1$. Donc

$$|\sin(Nx) - \sin(Ny_x^N)| = |\sin(Nx)| + 1 \geq 1.$$

3) Soit $N > 4\pi$ donc il existe $y_x^N \in [0,1]$ tel que $\frac{\pi}{2N} \leq |y_x^N - x| \leq \frac{4\pi}{N}$ et $|\sin(Nx) - \sin(Ny_x^N)| \geq 1$.

D'autre part f est continue sur le compact $[0,1]$ alors elle est uniformément continue d'après le théorème de Heine.

Donc il existe $\eta > 0$ tel que $\forall t, s \in [0,1], |t - s| < \eta \implies |f(t) - f(s)| < \frac{\alpha}{2}$.

Prenons N un entier tel que $N > \frac{4\pi}{\eta} + \frac{n\pi}{\alpha} + 4\pi(n+1)$.

Donc

$$|(f(x) + \alpha \sin(Nx)) - (f(y_x^N) + \alpha \sin(Ny_x^N))| \geq \alpha - |f(x) - f(y_x^N)| \geq \frac{\alpha}{2} \geq \frac{N\alpha}{\pi} |y_x^N - x| > n|y_x^N - x|.$$

Ainsi, Pour N assez grand $x \mapsto f(x) + \alpha \sin(Nx)$ est un élément de Θ_n .

4) Soit $f \in \mathcal{C}$, soit $n \in \mathbb{N}^*$. d'après la question précédente, il existe $N^n \in \mathbb{N}$ tel que la fonction $f_n : x \mapsto f(x) + \frac{1}{n} \sin(N^n x)$ soit dans Θ_n . Mais la fonction sinus est bornée, donc la suite $(f_n)_n$ converge vers f dans $\mathcal{C}$ c-à-d uniformément.

D'où la densité de Θ_n dans $\mathcal{C}$.

5) Puisque $\mathcal{C}$ est un espace de Banach alors c'est un espace de Baire, donc $\Omega \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_n \Theta_n$ est dense dans $\mathcal{C}$.

Soit $f \in \Omega$, soit $x \in [0,1]$, donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$ il existe $y_n \in [0,1]$ tel que $|x - y_n| < \frac{1}{n}$ et $|f(x) - f(y_n)| > n|x - y_n|$ donc $y^n \neq x$, $\lim_n y^n = x$ et $\lim_n \left| \frac{f(x) - f(y^n)}{x - y^n} \right| = \infty$. donc f n'est pas dérivable en x .

Ainsi

$$\Omega \subset \{f \in \mathcal{C} \text{ tel que } f \text{ n'est nulle part dérivable}\} \text{ est dense dans } (\mathcal{C}, \|\cdot\|_{\infty}) \text{ (il est même résiduel).}$$

$\square$

Corrigé de l'exercice 1.3.1

i. On sait que $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ est $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et que $\mathbb{Q}$ est un sous corps de $\mathbb{R}$ donc $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ est $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel. Soit $a + b\sqrt{2}, a' + b'\sqrt{2} \in E$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$, on a
 $\alpha(a + b\sqrt{2}) + \beta(a' + b'\sqrt{2}) = (\alpha a + \beta a') + (\alpha b + \beta b')\sqrt{2} \in E$ donc $(E, +, \cdot)$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ et par suite $(E, +, \cdot)$ est un $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel.

Remarquons qu'on peut aussi vérifier les 8 axiomes d'espaces vectoriels, c'est facile mais c'est long.

D'autre part, le couple $(1, \sqrt{2})$ est une famille génératrice de E (par définition) et pour montrer qu'il est libre on utilise le fait que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Ainsi E est $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel de dimension 2.

ii. a) Soit $x = a + b\sqrt{2} \in E$ et $\lambda \in \mathbb{Q}$, on a

$$N_0(\lambda x) = |\lambda x| = |\lambda| N_0(x) \text{ et } N_1(\lambda x) = \max\{|\lambda a|, |\lambda b|\} = |\lambda| \max\{|a|, |b|\} = |\lambda| N_1(x).$$

b) Soit $x = a + b\sqrt{2} \in E$, on a

$$N_0(x) = 0 \implies |x| = 0 \implies x = 0 \text{ et } N_1(x) = 0 \implies \max\{|a|, |b|\} = 0 \implies |a| = |b| = 0 \implies x = 0.$$

c) Soit $x = a + b\sqrt{2}, x' = a' + b'\sqrt{2} \in E$, on a $N_0(x + x') = |x + x'| \leq |x| + |x'| = N_0(x) + N_0(x')$ et $N_1(x + x') = \max\{|a + a'|, |b + b'|\} \leq \max\{|a|, |b|\} + \max\{|a'|, |b'|\}$ car $|a + a'| \leq |a| + |a'| \leq \max\{|a|, |b|\} + \max\{|a'|, |b'|\}$ et $|b + b'| \leq |b| + |b'| \leq \max\{|a|, |b|\} + \max\{|a'|, |b'|\}$. On conclut que N_0 et N_1 sont deux normes sur le $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel E .

iii. On a $\forall x = a + b\sqrt{2} \in E, N_0(x) = |a + b\sqrt{2}| \leq |a| + |b|\sqrt{2} \leq (1 + \sqrt{2}) \max\{|a|, |b|\} \leq 4N_1(x)$.

Supposons que N_0 et N_1 sont deux normes équivalentes, alors il existe un réel $C > 0$ tel que

$$\forall x \in E, N_1(x) \leq CN_0(x) = |x|.$$

Or $\forall x = a + b\sqrt{2}, x' = a' + b'\sqrt{2} \in E$, on a $xx' = (aa' + 2bb') + (ab' + a'b)\sqrt{2} \in E$.

Soit la suite $((a_n, b_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*, (-1 + \sqrt{2})^n = -a_n + b_n\sqrt{2}$. On a $(a_1, b_1) = (1, 1)$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, (a_{n+1}, b_{n+1}) = (a_n + 2b_n, a_n + b_n)$. Ainsi, par récurrence, on obtient $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n, b_n \in \mathbb{N}^*$ et $a_n > b_n$.

On obtient donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n \leq C(\sqrt{2} - 1)^n$. Choisissons n_0 tel que $C(\sqrt{2} - 1)^{n_0} < 1$ donc $a_{n_0} = 0$ ce qui absurde.

On conclut que

Les deux normes ne sont pas équivalentes. Attention donc au corps associé à l'espace vectoriel.

□

Corrigé de l'exercice 1.3.2

Soit $x = (x_n)_{n \geq 1} \in l^1$, on a

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (1 - 2^{-n}) x_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} (1 - 2^{-n}) |x_n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |x_n| = \|x\|_1.$$

Donc f est continue et $\|f\| \leq 1$.

D'autre part, soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $x^k = (x_n^k)_{n \geq 1} \in l^1$ définie par

$$x_n^k = \begin{cases} 1 & \text{si } n = k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On obtient donc

$$1 - 2^{-k} = f(x^k) \leq \|f\| \|x^k\|_1 = \|f\|.$$

En tendant $k \rightarrow \infty$, on trouve $\sup_{\|x\|_1=1} f(x) = \|f\| = 1$.

Supposons qu'il existe $a \in l^1$ tel que $\|a\|_1 = 1$ et $f(a) = 1$ alors

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} (1 - 2^{-n}) a_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} (1 - 2^{-n}) |a_n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = 1.$$

Donc $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} |a_n| = 0$ ce qui donne $a = 0_{l^1}$ et $\|a\|_1 = 1$ absurde. Ce qui prouve que le sup dans la définition de $\|f\|$ n'est pas atteint en général.

□

Corrigé de l'exercice 1.3.3

1) a) $p(0) = \inf\{s > 0; \frac{1}{s} 0 \in C\} = \inf]0, +\infty[= 0$.

b) Soit $\lambda > 0$ et $x \in E$, supposons que $p(\lambda x) > \lambda p(x)$ donc il existe $s > 0$ tel que $\frac{1}{s} x \in C$ et $s < \frac{p(\lambda x)}{\lambda}$, ainsi $\frac{1}{\lambda s} \lambda x \in C$ par suite $p(\lambda x) \leq \lambda s < p(\lambda x)$ ce qui est absurde et par conséquent $p(\lambda x) \leq \lambda p(x)$. Mais aussi on a $p(x) = p(\frac{1}{\lambda} \lambda x) \leq \frac{1}{\lambda} p(\lambda x)$. Ce qui montre $p(\lambda x) = \lambda p(x)$.

c) Supposons que C est borné par un réel K c-à-d $\forall x \in C, \|x\| \leq K$.

Soit $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $p(x) = 0$, donc $\forall \varepsilon > 0$ il existe $s \in]0, \varepsilon[$ tel que $\frac{1}{s}x \in C$ d'où $\|x\| \leq \varepsilon K$ tendons $\varepsilon \rightarrow 0^+$ pour obtenir $x = 0$.

2) $\overset{\circ}{C} \subset (p < 1)$: Soit $x \in \overset{\circ}{C}$ donc il existe $r \in]0, 1[$ tel que $B(x, r) \subset C$ d'où $(1 - \frac{r}{2(1+\|x\|)})x \in C$ ce qui prouve que $p(x) \leq \frac{1}{1 - \frac{r}{2(1+\|x\|)}} < 1$.

$(p < 1) \subset C$: Soit $x \in (p < 1)$ donc il existe $s \in]0, 1[$ tel que $\frac{1}{s}x \in C$ et puisque $0 \in C$ et C convexe on a $x = (1-s)0 + s(\frac{1}{s}x) \in C$.

$C \subset (p \leq 1)$: Soit $x \in C$ donc $p(x) = 1$ par définition de p .

$(p \leq 1) \subset \overline{C}$: Supposons le contraire donc il existe $x \in (p \leq 1)$ tel que $x \notin \overline{C}$ donc $p(x) = 1$ (sinon voir deuxième cas). Donc pour $k \in \mathbb{N}^*$, il existe $s_k \in [1, 1 + \frac{1}{k}]$ tel que $\frac{1}{s_k}x \in C$. Un passage à la limite permet d'écrire $x \in \overline{C}$, absurde.

3) Soit $x, y \in E$ et supposons que $p(x+y) > p(x) + p(y)$ donc en particulier $p(x)$ et $p(y)$ sont finis. Soit $\varepsilon > 0$ arbitraire ;

On a l'existence de $s \in [p(x), p(x) + \varepsilon] \cap \mathbb{R}^*$ et $t \in [p(y), p(y) + \varepsilon] \cap \mathbb{R}^*$ tels que $\frac{1}{s}x \in C$ et $\frac{1}{t}y \in C$. puisque C est convexe on a

$$\frac{1}{s+t}(x+y) = \frac{s}{s+t}(\frac{1}{s}x) + \frac{t}{s+t}(\frac{1}{t}y) \in C.$$

Ainsi $p(x+y) \leq s+t \leq p(x) + p(y) + 2\varepsilon$. En tendant ε vers 0, on obtient une contradiction.

4) Soit $r > 0$ tel que $B(0, r) \subset C$. Soit $x \in E \setminus \{0\}$, on a $\frac{r}{2\|x\|}x \in C$ donc $p(x) \leq \frac{2}{r}\|x\|$ (cette inégalité est triviale pour $x = 0$), on prend donc $M = \frac{2}{r}$ (remarquons que $\forall x, p(x) < +\infty$).

Soit $x, y \in E$, d'après 3) $p(x) \leq p(x-y) + p(y)$ donc $p(x) - p(y) \leq M\|x-y\|$ et aussi $p(y) - p(x) \leq M\|x-y\|$ et par conséquent

$$|p(x) - p(y)| \leq M\|x - y\|.$$

En particulier p est continue.

D'après 2) et le fait que p est continue on a $\overset{\circ}{C} = (p < 1)$ et $\overline{C} = (p = 1)$. □

Ch. 2 : Espaces vectoriels topologiques

Corrigé de l'exercice 2.1.1

i. Supposons que X avec la topologie discrète est topologique alors la fonction $t \mapsto tx_0$, avec $x_0 \in X \setminus \{0\}$ est continue de $\mathbb{K} = (\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ dans X . Donc $\{0\} = f^{-1}(\{0\})$ est un ouvert de $\mathbb{K}$. Absurde, donc la topologie discrète n'est pas topologique que si $X = \{0\}$.

ii. La topologie grossière n'est pas séparée car on ne peut pas séparé topologiquement 0 et x_0 . D'autre part, toute fonction est continue si l'ensemble d'arrivé est muni de la topologie grossière, ainsi la somme et le produit extérieur sont continues, d'où $(E, \{\emptyset, X\})$ est un EVT non séparé. $\square$

Corrigé de l'exercice 2.1.2

1. Soit $x \in E$ donc il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall \lambda \in \mathbb{K}, |\lambda| \leq \alpha \implies \lambda x \in V$, puisque tout voisinage de 0 est absorbant. Soit donc $N \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{r_N} \leq \alpha$, donc $\frac{1}{r_N}x \in V$, d'où $x \in r_N V \subset \bigcup_n r_n V$. Ce qui montre que $E = \bigcup_n r_n V$.

2. Soit $x, y \in \bar{M}$, soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Soit $V \in \mathcal{V}_E(0)$, donc il existe $W \in \mathcal{V}_E(0)$ tel que $W + \lambda W \subset V$. Or $\bar{M} \subset M + W$ donc $x + \lambda y \in M + \lambda M + W + \lambda W \subset M + W + \lambda W \subset M + V$. Puisque V est arbitraire, on a $x + \lambda y \in \bigcap_{V \in \mathcal{V}_E(0)} M + V = \bar{M}$. Ce qui permet de dire que $\bar{M}$ est un sous espace vectoriel de E si M l'est.

3. Soit $m \in \bar{M}$ donc il existe $V \in \mathcal{V}_E(0)$ tel que $m + V \subset M$ d'où $V \subset M$. Soit $x \in E$ donc il existe $\alpha > 0$ tel que $\alpha x \in V \subset M$ ainsi $x \in M$, car M est un sous espace vectoriel, donc $M = E$.

4. Soit $x, y \in \overset{\circ}{A}$ et $\alpha \in [0, 1]$. On a $V_z \stackrel{\text{def}}{=} \overset{\circ}{A} - z \in \mathcal{V}_E(0)$ et $z + V_z \subset A$, pour $z \in \{x, y\}$. Donc

$$\alpha x + (1 - \alpha)y + \alpha V_x + (1 - \alpha)V_y \subset \alpha A + (1 - \alpha)A \subset A$$

puisque A est convexe. Or $\alpha V_x + (1 - \alpha)V_y \in \mathcal{V}_E(0)$ d'où $x + \lambda y \in \overset{\circ}{A}$. Donc $\overset{\circ}{A}$ est convexe.

Soit $x, y \in \bar{A}$ et $\alpha \in [0, 1]$.

Soit $V \in \mathcal{V}_E(0)$, il existe donc $W \in \mathcal{V}_E(0)$ équilibré tel que $W + W \subset V$. On a $x, y \in A + W$ donc

$$\alpha x + (1 - \alpha)y \in \alpha A + (1 - \alpha)A + \alpha W + (1 - \alpha)W \subset A + W + W \subset A + V,$$

ainsi $\alpha x + (1 - \alpha)y \in \bar{A}$ c-à-d $\bar{A}$ est convexe une fois que A est convexe.

5. Soit $x \in \bar{A}$ et $y \in \overset{\circ}{A}$. Soit $z = (1 - \alpha)y + \alpha x \in [y, x[$ avec $\alpha \in [0, 1[$

Soit $V \in \mathcal{V}_E(0)$ tel que $y + V \subset A$, soit $W \in \mathcal{V}_E(0)$ équilibré tel que $\frac{1}{1-\alpha} [W + W] \subset V$. On a $x \in A + W$ donc il existe $a \in A$ et $w_z \in W$ tel que $x = a + w_z$.

Soit $w \in W$, donc $z + w = (1 - \alpha)\left[y + \frac{\alpha w_z + w}{1 - \alpha}\right] + \alpha a \in A$, car $\left[y + \frac{\alpha w_z + w}{1 - \alpha}\right] \in y + V \subset A, a \in A$ et A convexe. Ainsi $z \in \overset{\circ}{A}$.

On a $\overset{\circ}{A} \subset A$ donc $\overline{\text{int}(A)} \subset \bar{A}$. Soit $x_0 \in \bar{A}$ fixé.

Soit $x \in \bar{A}$, soit $V \in \mathcal{V}_E(0)$ donc il existe $W \in \mathcal{V}_E(0)$ tel que $W + W \subset V$ or il existe $\alpha \in [0, 1[$ tel que $(1 - \alpha)x \in W$ et $-(1 - \alpha)x_0 \in W$ et d'après la question précédente $(1 - \alpha)x_0 + \alpha x + (1 - \alpha)x \in \overset{\circ}{A} + W$ d'où $x \in \overset{\circ}{A} + W + W \subset \overset{\circ}{A} + V$. V est arbitraire, donc $x \in \overline{\text{int}(A)}$. Ainsi si A est convexe et $\overset{\circ}{A} \neq \emptyset$ alors $\bar{A} = \overline{\text{int}(A)}$.

6. Soit $x \in \bar{A}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $|\lambda| \leq 1$.

Soit $V \in \mathcal{V}_E(0)$ équilibré, donc $x \in A + V$ d'où $\lambda x \in \lambda A + \lambda V \subset A + V$, V est quelconque... $\lambda x \in \bar{A}$, c-à-d $\bar{A}$ est équilibré.

Soit $x \in \text{co}(A)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $|\lambda| \leq 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*, t_1, \dots, t_n \in [0, 1], x_1, \dots, x_n \in A$ tels que $\sum_{i=1}^n t_i x_i = x$ et $\sum_{i=1}^n t_i = 1$ donc

$$\lambda x = \sum_{i=1}^n t_i \lambda x_i \in \text{co}(A).$$

Ainsi $\text{co}(A)$ est équilibré.

7. Soit $x \in \overset{\circ}{A}$ et $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tel que $|\lambda| \leq 1$.

Soit $V \in \mathcal{V}_E(0)$ équilibré tel que $x + V \subset A$ donc $\lambda x + \lambda V \subset \lambda A \subset A$, puisque A est équilibré. De plus $\lambda V \in \mathcal{V}_E(0)$ d'où

$\lambda x \in \overset{\circ}{A}$. Ainsi $\overset{\circ}{A}$ est équilibré une fois que A est une partie équilibrée de E et $0 \in \overset{\circ}{A}$.

8. $\Rightarrow$) Supposons que A est absolument convexe.

Soit $x, y \in A$ et $t \in [0, 1]$ alors $|1 - t| + |t| = 1 \leq 1$ donc $(1 - t)x + ty \in A$ d'où A est convexe (c'est simple!)

Soit $x \in A$ et $t \in \mathbb{K}$ tel que $|t| \leq 1$ donc $|0| + |t| = |t| \leq 1$ donc $tx = 0x + tx \in A$ ainsi A est équilibrée.

$\Leftarrow$) Supposons que A est convexe et équilibrée.

Soit $x, y \in A$ et $s, t \in \mathbb{K}$ tels que $|s| + |t| \leq 1$. Si $s = 0$ ou $t = 0$ alors $sx + ty \in \{sx, ty\} \subset A$ car A est équilibrée. Sinon $\frac{sx}{|s|}, \frac{ty}{|t|} \in A$ (A est équilibrée), A convexe, équilibrée et $|s| + |t| \leq 1$ nous obtenons

$$sx + ty = (|s| + |t|) \left(\frac{|s|}{|s| + |t|} \frac{sx}{|s|} + \frac{|t|}{|s| + |t|} \frac{ty}{|t|} \right) \in A,$$

donc A est absolument convexe. □

Corrigé de l'exercice 2.1.3

Soit E, F deux espaces vectoriels sur le corps $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ (pas de topologies) et soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. Soit $A \subset E$ et $B \subset F$.

1. Supposons que A est un sous espace vectoriel de E :

Soit $x, y \in f(A)$ et $t \in \mathbb{K}$, on a l'existence de $a, b \in A$ tels que $x = f(a)$ et $y = f(b)$. Donc $x + ty = f(a + tb) \in f(A)$ d'où

$$f(A) \text{ est un sous espace vectoriel de } F \text{ si } A \text{ est un sous espace vectoriel de } E.$$

Supposons que A est convexe :

Soit $x, y \in f(A)$ et $t \in [0, 1]$, on a l'existence de $a, b \in A$ tels que $x = f(a)$ et $y = f(b)$. Donc $x + ty = f((1-t)a + tb) \in f(A)$ d'où

$$f(A) \text{ est un convexe de } F \text{ si } A \text{ est un convexe de } E.$$

Supposons que A est équilibrée :

Soit $x \in f(A)$ et $t \in \mathbb{K}$ tel que $|t| \leq 1$, on a l'existence de $a \in A$ tels que $x = f(a)$. Donc $tx = f(ta) \in f(A)$ d'où

$$f(A) \text{ est une partie équilibrée de } F \text{ si } A \text{ l'est.}$$

2. Supposons que B est un sous espace vectoriel de F :

Soit $x, y \in f^{-1}(B)$ et $t \in \mathbb{K}$, on a $f(x), f(y) \in B$ donc $f(x + ty) = f(x) + tf(y) \in B$ ainsi $x + ty \in f^{-1}(B)$ d'où

$$f^{-1}(B) \text{ est un sous espace vectoriel de } E \text{ si } B \text{ est un sous espace vectoriel de } F.$$

Supposons que B est convexe :

Soit $x, y \in f^{-1}(B)$ et $t \in [0, 1]$, on a $f(x), f(y) \in B$ donc $f((1-t)x + ty) = f(x) + tf(y) \in B$ ainsi $(1-t)x + ty \in f^{-1}(B)$ d'où

$$f^{-1}(B) \text{ est un convexe de } E \text{ si } B \text{ est un convexe de } F.$$

Supposons que B est équilibrée :

Soit $x \in f^{-1}(B)$ et $t \in \mathbb{K}$ tel que $|t| \leq 1$, on a $f(tx) = tf(x) \in B$ d'où

$$f^{-1}(B) \text{ est une partie équilibrée de } E \text{ si } B \text{ l'est dans } F.$$

□

Corrigé de l'exercice 2.1.4

1. Soit $V \in \mathcal{V}_E(0)$. On a $f : (t, x) \rightarrow tx$ est continue en $(0, 0)$ donc $f^{-1}(V) \in \mathcal{V}_{\mathbb{K} \times E}(0, 0)$ d'où l'existence d'un réel $\theta > 0$ et d'un ouvert W de E tels que $(0, 0) \in B^f(0, \theta) \times W \subset f^{-1}(V)$. Posons $\Theta = B^f(0, \theta) \times W = \bigcup_{|\lambda| \leq \theta} \lambda W$, on a $\Theta \in \mathcal{V}_E(0)$ car $\theta W \in \mathcal{V}_E(0)$ et $\theta W \subset \Theta$. D'autre part, si $x \in \Theta$ et $t \in \mathbb{K}$ tel que $|t| \leq 1$, or il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ et $w \in W$ tels que $x = \lambda w$ donc $tx = (t\lambda)w \in \Theta$ car $|t\lambda| \leq \theta$. Ainsi Θ est un voisinage de 0 équilibré et par suite $U \stackrel{\text{def}}{=} \overset{\circ}{\Theta}$ est un voisinage ouvert de 0 équilibré d'après l'exercice 2.1.2.

2. Soit $V \in \mathcal{V}_E(0)$ convexe. D'après la question 1., on l'existence d'un ouvert équilibré U tel que $0 \in U \subset V$ donc $W \stackrel{\text{def}}{=} co(U)$ répond à la question. □

Corrigé de l'exercice 2.1.5

1. Soit $V \in \mathcal{V}_E(0)$ donc il existe $F \subset E$ finie telle que $A \subset F + V$ donc $B \subset F + V$ ainsi

$$B \text{ est précompact si } A \text{ l'est et } B \subset A.$$

2. Soit $V \in \mathcal{V}_E(0)$, donc il existe $t > 0$ tel que $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ tel que $|\lambda| \leq t$, $\lambda A \subset V$ donc $\lambda B \subset V$. Ainsi

B est bornée si A l'est et $B \subset A$.

3. Soit A relativement compact c-à-d $\overline{A}$ est compact.

Soit $V \in \mathcal{V}_E(0)$, Soit $W \in \mathcal{V}_E(0)$ tel que $W + W \subset V$ donc il existe une partie F finie de E telle que $A \subset F + W$ d'où $\overline{A} \subset A + W \subset F + W + W \subset F + V$. Ainsi $\overline{A}$ est précompacte.

4. Soit A précompacte (totalement bornée).

Soit $V \in \mathcal{V}_E(0)$ donc il existe $W \in \mathcal{V}_E(0)$ équilibré tel que $W + W \subset V$. Soit donc F une partie finie de E telle que $A \subset F + W$.

Pour $x \in F$, soit $t_x > 0$ tel que $\forall s \in \mathbb{K}$ tel que $|s| \leq t_x$, $sx \in W$. Posons $\alpha \stackrel{\text{def}}{=} 1 \wedge \min_{x \in F} t_x$, on a $\alpha > 0$, $\forall s \in \mathbb{K}$ tel que $|s| \leq \alpha$, $sF \subset W$. Donc $\forall s \in \mathbb{K}$ tel que $|s| \leq \alpha$, $sA \subset V$.

A est bornée s'elle est précompact.

5. Soit A précompacte (totalement bornée). Soit $V \in \mathcal{V}_E(0)$, donc il existe $W \in \mathcal{V}_E(0)$ équilibré tel que $W + W \subset V$. Soit donc F une partie finie de E telle que $A \subset F + W$. D'où

$$\overline{A} \subset A + W \subset F + W + W \subset F + V.$$

Ainsi

A est précompacte implique $\overline{A}$ précompacte.

6. Soit A bornée. Soit $V \in \mathcal{V}_E(0)$, soit $W \in \mathcal{V}_E(0)$ équilibré tel que $W + W \subset V$. Soit donc $t > 0$ tel que $\forall s \in \mathbb{K}$ tq $|s| \leq t$, $sA \subset W$. D'où $\forall s \in \mathbb{K}$ tel que $|s| \leq 1 \wedge t$,

$$s\overline{A} \subset sA + sW \subset W + W \subset V$$

A bornée implique $\overline{A}$ bornée.

7. Soit A sous espace vectoriel de E borné.

Soit $V \in \mathcal{V}_E(0)$, soit $t > 0$ tel que $tA \subset V$ donc $A \subset V$ d'où $A \subset \bigcap_{V \in \mathcal{V}_E(0)} V = \{0\}$.

A sous espace vectoriel de E borné implique $\{0\} \subset A \subset \{0\}$.

□

Remarque : A, B bornées $\implies A \cup B$ bornée et A, B précompactes $\implies A \cup B$ précompacte.

Corrigé de l'exercice 2.1.6

1. Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties équilibrées de E . Soit $t \in \mathbb{K}$ tel que $|t| \leq 1$, soit $x \in \bigcup_i A_i$ donc il existe $i_0 \in I$ tel que $x \in A_{i_0}$ d'où $tx \in A_{i_0} \subset \bigcup_i A_i$. Ainsi $\bigcup_i A_i$ est équilibrée.

Notons $N(A) = \bigcup_{B \in \Lambda_A} B$ dit le noyau équilibré de A avec $\Lambda_A \stackrel{\text{def}}{=} \{b \subset A \text{ tel que } b \text{ est équilibrée}\}$.

2. Soit C une partie équilibrée incluse dans A donc $C \in \Lambda_A$ d'où $C \subset N(A)$ et d'après la question 1. $N(A)$ est équilibrée. Ainsi, $N(A)$ est la plus grande partie équilibrée contenue dans A .

3. Soit $x \in E$;

$\implies$) Supposons que $x \in N(A)$.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $|\lambda| \leq 1$, donc $\lambda x \in N(A) \subset A$.

$\Leftarrow$) Supposons que $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ tel que $|\lambda| \leq 1$, $\lambda x \in A$.

Donc $N(A) \cup \{x\}$ est une partie équilibrée incluse dans A d'où $N(A) \cup \{x\} \subset N(A)$ ainsi $x \in N(A)$

4. Soit $A \in \mathcal{V}_E(0)$. Donc il existe $W \in \mathcal{V}_E(0)$ équilibré tel que $W \subset A$ ainsi $W \subset N(A)$ d'où $N(A) \in \mathcal{V}_E(0)$. □

Corrigé de l'exercice 2.1.7

1. Supposons que A est ouvert alors $A + B = \bigcup_{x \in B} (x + A)$ est ouvert (puisque réunion d'ouverts est ouvert).

2. Soient A et B sont quasi-compacts. On a $A \times B$ est un quasi-compact de $E \times E$ et $\psi : (x, y) \rightarrow x + y$ est continue de $E \times E$ dans E donc $A + B = \psi(A \times B)$ est quasi-compact de E .

3. Supposons que A est quasi-compact et B est fermé.

✓ Méthode 1 : Montrons que $\overline{A + B} \subset A + B$.

Soit $x \in \overline{A + B} = \bigcap_{V \in \mathcal{V}_E(0)} (A + B + V)$, donc $\forall W \in \mathcal{V}_E(0)$ il existe $a_W \in A$, $b_W \in B$ et $\theta_W \in W$ tels que $x = a_W + b_W + \theta_W$. Mais la quasi-compacité de A implique que

$$\bigcap_{V \in \mathcal{V}_E(0)} \overline{\{a_W; W \in \mathcal{V}_E(0), W \subset V\}}^E \neq \emptyset.$$

Soit donc $a \in \bigcap_{V \in \mathcal{V}_E(0)} \overline{\{a_W; W \in \mathcal{V}_E(0), W \subset V\}}^E$.

Soit $U \in \mathcal{V}_E(0)$ arbitraire. Donc il existe $V \in \mathcal{V}_E(0)$ tel que $V + V \subset U$. On a $a \in \overline{\{a_W; W \in \mathcal{V}_E(0), W \subset V\}}^E$, d'où $a + V \cap \{a_W; W \in \mathcal{V}_E(0), W \subset V\} \neq \emptyset$ c-à-d il existe $t \in V$ et $W \in \mathcal{V}_E(0)$ tels que $W \subset V$ et $a+t = a_W$ donc $x = a+b_W+t+\theta_W \in a+B+U$ d'où $x \in a+B = a+B \subset A+B$. Ceci nous donne $A+B$ est fermé dans E .

Si de plus $A \cap B = \emptyset$. Alors pour tout $a \in A$, $B^c \stackrel{\text{def}}{=} E \setminus B$ est un ouvert qui contient a donc il existe $V_a \in \mathcal{V}_E(0)$ équilibré tel que $a+V_a+V_a \subset B^c$. Or $A \subset \bigcup_{a \in A} (a+V_a)$ donc il existe $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $a_1, \dots, a_n \in A$ tel que $A \subset (a_1+V_{a_1}) \cup \dots \cup (a_n+V_{a_n})$. Posons $V = V_{a_1} \cap \dots \cap V_{a_n}$, on a $V \in \mathcal{V}_E(0)$ et si $x \in (A+V) \cap (B+V)$ alors il existe $a \in A$, $w \in V$, $b \in B$ et $v \in V$ tels que $x = a+w = b+v$ mais il existe $k \in \{1, \dots, n\}$ et $w' \in V_{a_k}$ tels que $a = a_k + w'$. Donc $a_k + w' + w + (-v) = b$, mais $w', w, -v \in V_{a_k}$ donc $b \in a_k + V_{a_k} + V_{a_k} + V_{a_k} \subset B^c$, absurde. Donc $(A+V) \cap (B+V) = \emptyset$.

✓ Méthode 2 (plus simple!) : Montrons que $E \setminus (A+B)$ est un ouvert.

Soit $x \in E \setminus (A+B)$, donc $\forall a \in A$, $x-a \in E \setminus B$ d'où l'existence de $V_a \in \mathcal{V}_E(0)$ équilibré tel que $x-a+V_a+V_a \subset E \setminus B$. D'autre part, $A \subset \bigcup_{a \in A} (a - \overset{\circ}{V}_a)$ et puisque A est compact il existe $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $a_1, \dots, a_n \in A$ tel que $A \subset (a_1 - \overset{\circ}{V}_{a_1}) \cup \dots \cup (a_n - \overset{\circ}{V}_{a_n})$. Posons $V = V_{a_1} \cap \dots \cap V_{a_n}$, on a $V \in \mathcal{V}_E(0)$ et supposons que $x+V \not\subset E \setminus (A+B)$, alors il existe $a \in A$, $b \in B$ et $v \in V$ tels que $a+b = x+v$. Mais il existe $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ et $v' \in V_{a_{i_0}}$ tels que $a = a_{i_0} - v'$, ainsi $x - a_{i_0} + v + v' = b \in B \cap E \setminus B = \emptyset$. Absurde, donc $x+V \subset E \setminus (A+B)$ et par conséquent $A+B$ est fermé.

supposons de plus que $A \cap B = \emptyset$,

donc $\forall a \in A$, $a \in E \setminus B$ d'où l'existence de $V_a \in \mathcal{V}_E(0)$ équilibré tel que $a+V_a+V_a \subset E \setminus B$. D'autre part, $A \subset \bigcup_{a \in A} (a + \overset{\circ}{V}_a)$ et puisque A est compact il existe $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $a_1, \dots, a_n \in A$ tel que $A \subset (a_1 + \overset{\circ}{V}_{a_1}) \cup \dots \cup (a_n + \overset{\circ}{V}_{a_n})$.

Posons $V = V_{a_1} \cap \dots \cap V_{a_n}$, on a $V \in \mathcal{V}_E(0)$ et supposons que $(A+V) \cap (B+V) \neq \emptyset$. Donc il existe $a \in A$, $b \in B$ et $v, w \in V$ tel que $a+v = b+w$, mais il existe $i \in \{1, \dots, n\}$ et $v' \in V_{a_i}$ tels que $a = a_i + v'$, donc $a_i + v' + v + (-w) = b \in B \cap E \setminus B = \emptyset$, absurde. Ainsi

$$(A+V) \cap (B+V) = \emptyset.$$

4. Prenons $E = \mathbb{R}^2$ et posons $A = \{(x, \frac{1}{x}); x \neq 0\}$ et $B = \{(t, 0); t \in \mathbb{R}\}$. On a A et B sont deux fermés de $E = \mathbb{R}^2$. Mais $A+B = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ qui n'est pas fermé dans $E = \mathbb{R}^2$. Donc,

si A et B sont fermés alors $A+B$ n'est pas fermé en général.

5. Soit $U \in \mathcal{V}_E(0)$ arbitraire. Il existe, donc, $V \in \mathcal{V}_E(0)$ tel que $V+V \subset U$. Ainsi, $\overline{A+B} \subset A+B+U$, d'où $\overline{A+B} \subset A+B$. □

Corrigé de l'exercice 2.1.8

⇒) Supposons que A est bornée. Soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments de A et $(\alpha_n)_n$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$ qui converge vers 0.

Soit $V \in \mathcal{V}_E(0)$, donc il existe $t > 0$ tel que $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ avec $|\lambda| \leq t$, on a $\lambda A \subset V$, soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $|\alpha_n| \leq t$. D'où $\forall n \geq N$, $\alpha_n x_n \in V$ c-à-d $\alpha_n x_n \rightarrow 0$.

⇐) Supposons que $\forall (x_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$, $\forall (\alpha_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tel que $\alpha_n \rightarrow 0$; $\alpha_n x_n \rightarrow 0$.

Soit $V \in \mathcal{V}_E(0)$, soit $W \in \mathcal{V}_E(0)$ équilibré tel que $W \subset V$.

Supposons que $\forall n > 0$, $\frac{1}{n} A \not\subset W$, donc il existe une suite $(x_n)_n$ d'éléments de A telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n} x_n \notin W$. Mais, d'après l'hypothèse, $\frac{1}{n} x_n \rightarrow 0$ donc il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \geq N$, $\frac{1}{n} x_n \in W$, absurde. Donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que si $|\lambda| \leq \frac{1}{n_0} \stackrel{\text{def}}{=} t$ alors $\lambda A = \frac{\lambda}{t} t A \subset \frac{\lambda}{t} W \subset V$ c-à-d A est bornée. □

Corrigé de l'exercice 2.1.9

Soit $W \in \mathcal{V}_E(0)$, puisque V est borné, il existe $t > 0$ tel que $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ avec $|\lambda| \leq t$, on a $\lambda V \subset W$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\delta_N < t$ d'où $\delta_N V \subset W$ □

Corrigé de l'exercice 2.1.10

✓ d est une distance :

$d(f, g) = 0 \Leftrightarrow \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - g(x)| = 0 \Leftrightarrow f = g$ (séparation).

$d(f, g) = \min\{1, \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - g(x)|\} = \min\{1, \sup_{x \in \mathbb{R}} |g(x) - f(x)|\} = d(g, f)$ (symétrie).

Soit $f, g, h \in E$. Supposons que $d(f, h) > d(f, g) + d(g, h)$. Donc, $d(f, g) + d(g, h) < 1$ d'où $d(f, g) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - g(x)|$ et $d(g, h) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |g(x) - h(x)|$. Or $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$|f(x) - h(x)| \leq |f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - g(x)| + \sup_{x \in \mathbb{R}} |g(x) - h(x)| = d(f, g) + d(g, h).$$

Ainsi $d(f, h) \leq d(f, g) + d(g, h)$, absurde. Donc d vérifie l'inégalité triangulaire.

Conclusion : d est une distance sur $E = \mathcal{C}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$

✓ (E, d) est Complet :

Soit $(f_n)_n$ une suite de Cauchy de (E, d) . Donc $\forall \varepsilon \in]0, 1[$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n, m \geq N, d(f_n, f_m) < \varepsilon$.

Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé! On a $\forall \varepsilon \in]0, 1[$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n, m \geq N, |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$. Mais l'ensemble $\mathbb{R}$ est complet, donc il existe $f(x) \in \mathbb{R}$ tel que $f_n(x) \rightarrow f(x)$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

D'autre part, soit $\varepsilon \in]0, 1[$ donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n, m \geq N, \forall x \in \mathbb{R} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$. En tendant $m \rightarrow \infty$, on obtient $\forall n \leq N, \forall x \in \mathbb{R} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$. Ce qui prouve que

$$\min_{x \in \mathbb{R}} \{1, \sup |f_n(x) - f(x)|\} \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

Soit $a \in \mathbb{R}$, soit $\varepsilon > 0$. On a f_N est continue en a donc il existe $\eta > 0$ tel que $|x - a| < \eta \implies |f_N(x) - f_N(a)| < \varepsilon$. Ainsi $|f(x) - f(a)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(a)| + |f_N(a) - f(a)| < 3\varepsilon$. Ce qui montre que f est continue en a arbitraire donc $f \in E$.

On conclue que toute suite de Cauchy de (E, d) converge et par suite (E, d) est complet.

✓ $(E, \mathcal{T}_d)$ n'est pas vectoriel :

Considérons la fonction $f : x \mapsto e^x$. On a $d(0, tf) = 1$ si $t \neq 0$ et 0 sinon. Donc $t \mapsto tf$ n'est pas continue et par suite $(E, \mathcal{T}_d)$ n'est pas vectoriel. $\square$

Corrigé de l'exercice 2.1.11

✓ d est une distance :

$d(f, g) = 0 \iff 1 \wedge |f - g| = 0$ ps $\iff f = g$ (séparation).

$d(f, g) = \int_X [1 \wedge |f - g|] d\nu = \int_X [1 \wedge |g - f|] d\nu = d(g, f)$ (symétrie).

Soit $f, g, h \in \mathcal{M}$. On a $[1 \wedge |f - h|] \leq [1 \wedge |f - g|] + [1 \wedge |g - h|]$ ps. Ainsi $\int_X [1 \wedge |f - h|] d\nu \leq \int_X [1 \wedge |f - g|] d\nu + \int_X [1 \wedge |g - h|] d\nu$.

Donc d vérifie l'inégalité triangulaire.

Conclusion : d est une distance sur $\mathcal{M}$

✓ $(\mathcal{M}, d)$ est Complet :

Soit $(f_n)_n$ une suite de Cauchy de $(\mathcal{M}, d)$. Donc $\forall \varepsilon \in]0, 1[$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n, m \geq N, d(f_n, f_m) < \varepsilon$.

Soit $k \in \mathbb{N}$, donc il existe $N_k \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n, m \geq N_k, \int_X [1 \wedge |f_n - f_m|] d\nu < \frac{1}{2^k}$. Posons

$$n_k \stackrel{\text{def}}{=} k + N_k + \dots + N_0 \quad \text{et} \quad g : x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} [1 \wedge |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|]$$

On a, grâce au théorème de Beppo-Levi,

$$\int_X g d\nu = \sum_{k=0}^{\infty} \int_X [1 \wedge |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|] d\nu < 2.$$

Par conséquent, $\nu(g = \infty) = 0$ et $\forall x \in (g < \infty)$, $\lim_k [1 \wedge |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|] = 0$ donc il existe k_x tel que $\forall k \geq k_x, |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| \leq 1$. Ainsi, $\forall x \in (g < \infty)$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| < \infty.$$

Or $\mathbb{R}$ est complet donc la série $\sum_{k=0}^{\infty} (f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x))$ converge. Posons

$$f : \begin{array}{ll} X & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \begin{cases} f_{n_0}(x) + \sum_{k=0}^{\infty} (f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)) & \text{si } g(x) < \infty \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}$$

On obtient $f \in \mathcal{M}$ et f_{n_k} converge ps vers f , d'où $1 \wedge |f_{n_k} - f|$ converge vers 0 pp et dominée par 1. Le théorème de Lebesgue affirme que $d(f_{n_k}, f) = \int_X [1 \wedge |f_{n_k} - f|] d\nu$ converge vers 0. Et puisque $(f_n)_n$ est de Cauchy alors toute la suite converge vers f !?

On conclut que $(\mathcal{M}, d)$ est complet.

✓ $(\mathcal{M}, \mathcal{T}_d)$ est vectoriel :

Notons

$$\begin{array}{ll} \psi : \mathcal{M} \times \mathcal{M} & \longrightarrow \mathcal{M} & \text{et} & \phi : \mathbb{R} \times \mathcal{M} & \longrightarrow \mathcal{M} \\ (f, g) & \longmapsto f + g & & (t, f) & \longmapsto tf \end{array}$$

On a $d(\psi(f, g), \psi(f_0, g_0)) \leq d(f, f_0) + d(g, g_0)$ et par suite ψ est continue. D'autre part, soit une suite $((s_n, g_n)_n)$ une suite d'éléments de $\mathbb{R} \times \mathcal{M}$ qui converge vers (t, f) dans $\mathbb{R} \times \mathcal{M}$. Donc, en posant $\alpha = \sup_n |s_n| + 1$,

$$d(\phi(s_n, g_n), \phi(t, f)) = \int_X [1 \wedge |s_n g_n - t f|] d\nu \leq \alpha \int_X [1 \wedge |g_n - f|] d\nu + \int_X [1 \wedge |s_n - t| |f|] d\nu.$$

Par le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on a $d(\phi(s_n, g_n), \phi(t, f))$ converge vers 0. D'où la continuité de ϕ .

On conclue que $(\mathcal{M}, \mathcal{T}_d)$ est un espace métrique complet vectoriel. $\square$

Corrigé de l'exercice 2.1.12

1. ✓ d est une distance :

$d(f, g) = 0 \Leftrightarrow |f - g|^p = 0$ ps $\Leftrightarrow f = g$ pp (séparation).

$d(f, g) = \int_{[0,1]} |f - g|^p d\lambda = \int_{[0,1]} |g - f|^p d\lambda = d(g, f)$ (symétrie).

Soit $f, g, h \in \mathcal{M}$. On a $|f - h|^p \leq |f - g|^p + |g - h|^p$ car $s \mapsto s^p$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et $(s+t)^p \leq s^p + t^p$. Donc d vérifie l'inégalité triangulaire.

Conclusion : d est une distance sur L^p .

✓ (L^p, d) est Complet :

Soit $(f_n)_n$ une suite de Cauchy de (L^p, d) . Donc $\forall \varepsilon \in]0, 1[$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n, m \geq N$, $d(f_n, f_m) < \varepsilon$.

Soit $k \in \mathbb{N}$, donc il existe $N_k \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n, m \geq N_k$, $\int_{[0,1]} |f_n - f_m|^p d\nu < \frac{1}{2^k}$. Posons

$$n_k \stackrel{\text{def}}{=} k + N_k + \dots + N_0 \quad \text{et} \quad g : x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|.$$

On a, grâce au théorème de beppo-Levi,

$$\int_{[0,1]} g^p d\nu \leq \sum_{k=0}^{\infty} \int_{[0,1]} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|^p d\nu < 2.$$

Par conséquent, $\lambda(g = \infty) = 0$ et $\forall x \in (g < \infty)$, la série $\sum_{k=0}^{\infty} (f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x))$ converge. Posons

$$\begin{aligned} f : X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} f_{n_0}(x) + \sum_{k=0}^{\infty} (f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)) & \text{si } g(x) < \infty \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

On obtient $f \in L^p$ (car $|f| \leq g + |f_{n_0}|$) et f_{n_k} converge ps vers f , d'où $|f_{n_k} - f|$ converge vers 0 ps et dominée par $2g + 2|f_{n_0}| \in L^p$.

Le théorème de Lebesgue affirme que $d(f_{n_k}, f) = \int_{[0,1]} |f_{n_k} - f|^p d\nu$ converge vers 0. Et puisque $(f_n)_n$ est de Cauchy alors toute la suite converge vers f .

On conclue que (L^p, d) est complet.

✓ $(L^p, \mathcal{T}_d)$ est vectoriel :

Notons

$$\begin{aligned} \psi : L^p \times L^p &\longrightarrow L^p & \text{et} & & \phi : \mathbb{R} \times L^p &\longrightarrow L^p \\ (f, g) &\longmapsto f + g & & & (t, f) &\longmapsto tf \end{aligned}$$

On a $d(\psi(f, g), \psi(f_0, g_0)) \leq d(f, f_0) + d(g, g_0)$ et par suite ψ est continue.

D'autre part, soit $(t, f), (s, g)$ dans $\mathbb{R} \times L^p$ tels que $|t - s| \leq 1$. Donc, $d(\phi(t, f), \phi(s, g)) \leq (|s| + 1)d(f, g) + |t - s|d(0, g)$, ainsi ϕ est continue.

Conclusion

(L^p, d) est un espace métrique vectoriel complet.

2. Soit $f \in B_d(0, 2^{1-p}r)$ donc $l = \int_0^1 |f|^p < 2^{1-p}r$. Soit $a \in [0, 1]$ tel que $\int_0^a |f|^p = \frac{1}{2} < 2^{-p}r$. Posons $g = 2f1_{[0,a]}$ et $h = 2f1_{[a,1]}$, on a $g, h \in B_d(0, r) \subset co B_d(0, r)$ donc $f = \frac{1}{2}g + \frac{1}{2}h \in co B_d(0, r)$.

D'autre part, par une récurrence simple et l'utilisation de la question précédente on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, B_d(0, 2^{n(1-p)}r) \subset co B_d(0, 2^{n(1-p)}r) \subset co B_d(0, r).$$

3. Soit U un ouvert convexe non vide de (L^p, d) . Soit $f \in U$ et $r > 0$ tels que $B_d(0, r) \subset U - f$ et puisque $U - f$ est convexe, on a $co B_d(0, r) \subset U - f$.

Soit $g \in L^p$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\int_0^1 |g - f|^p < 2^{n(1-p)}r$ donc $g - f \in B_d(0, 2^{n(1-p)}r) \subset co B_d(0, r) \subset U - f$. Ainsi $g \in U$, on déduit que $U = L^p$.

La fonction constante 2 appartient à L^p . Si ce dernier est localement convexe alors il existe un ouvert convexe qui contient 0 incluse dans $B_d(0, 1)$ d'où $L^p = B_d(0, 1)$. Absurde, $2 \notin B_d(0, 1)$. Et par suite L^p n'est pas localement convexe.

4. Soit T une forme linéaire continue sur L^p . Soit $\varepsilon > 0$, donc $T^{-1}(]-\varepsilon, \varepsilon[)$ est un ouvert convexe non vide (contient 0). La question précédente affirme que $T^{-1}(]-\varepsilon, \varepsilon[) = L^p$ donc

$$\forall f \in L^p, |T(f)| < \varepsilon$$

en tendant $\varepsilon \rightarrow 0^+$, on obtient $T = 0$.

Conclusion : le dual topologique de L^p est $(L^p)' = \{0\}$.

□

Corrigé de l'exercice 2.1.13

On a pour tout $r \geq 0$, $B_d(0, r) = \sqrt[p]{r} B_d(0, 1)$. Donc (l^p, d) est localement convexe si et seulement si $\exists r > 0$ tel que

$$co B_d(0, r) = \sqrt[p]{r} co B_d(0, 1) \subset B_d(0, 1).$$

(donc $0 < r \leq 1$).

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{r}{2} n_0^{1-p} > 1$ et considérons la suite $x = (x_n)_n$ définie par

$$x_n = \frac{1}{n_0} \sqrt[p]{\frac{r}{2}} \times \begin{cases} 1 & \text{si } n \in \{1, \dots, n_0\} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour $i \in \mathbb{N}$, notons e^i la suite définie par

$$e_n^i = \begin{cases} \sqrt[p]{\frac{r}{2}} & \text{si } n = i \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a $d(0, e^i) = \frac{r}{2}$ donc $e^i \in B_d(0, r)$, $d(0, x) = \frac{r}{2} n_0^{1-p} > 1$ d'où $x \notin B_d(0, 1)$ et $x = \frac{1}{n_0} \sum_{i=1}^{n_0} e^i \in co B_d(0, r)$. Ainsi (l^p, d) n'est pas localement convexe.

□

Corrigé de l'exercice 2.1.14

1. Soit $\mathcal{B}^0 = \{U_n, n \in \mathbb{N}^*\}$ est une base de voisinage de 0 dénombrable qui existe d'après les hypothèses. On va construire par récurrence la suite $(V_n)_n$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, V_n un ouvert équilibré (resp. convexe si $(E, \mathcal{T})$ est localement convexe) et vérifie $V_n + V_n + V_n + V_n \subset V_{n-1} \cap U_n$ avec $V_0 = E$.

✓ Cas non localement convexe :

Soit W un voisinage de 0 équilibré tel que $W \subset U_1$ donc $V_1 = \overset{\circ}{W}$ est un ouvert équilibré tel que $V_1 \subset U_1$. Supposons que, pour $n \geq 1$, V_n est défini tel que V_n un ouvert équilibré et vérifie $V_n + V_n + V_n + V_n \subset V_{n-1} \cap U_n$. Soit Θ un voisinage de 0 équilibré tel que $\Theta + \Theta + \Theta + \Theta \subset V_n \cap U_{n+1}$. Posons $V_{n+1} = \overset{\circ}{\Theta}$ donc V_{n+1} est un ouvert équilibré tel que $V_{n+1} + V_{n+1} + V_{n+1} + V_{n+1} \subset V_n \cap U_{n+1}$.

✓ Cas localement convexe :

Soit C un voisinage convexe de 0 tel que $C \subset U_1$. Soit W un voisinage de 0 équilibré tel que $W \subset C$ donc $V_1 = co(\overset{\circ}{W})$ est un ouvert équilibré convexe tel que $V_1 \subset U_1$. Supposons que, pour $n \geq 1$, V_n est défini tel que V_n un ouvert équilibré convexe et vérifie $V_n + V_n + V_n + V_n \subset V_{n-1} \cap U_n$. Soit Θ un voisinage de 0 équilibré tel que $\Theta + \Theta + \Theta + \Theta \subset V_n \cap U_{n+1}$. Soit V_{n+1} un ouvert équilibré convexe tel que donc $V_{n+1} \subset \Theta$ (prendre Θ à la place de U_1), ainsi $V_{n+1} + V_{n+1} + V_{n+1} + V_{n+1} \subset V_n \cap U_{n+1}$. Dans les deux cas $\mathcal{B} = \{V_n, n \in \mathbb{N}^*\}$ est une base de voisinage de 0, en effet, soit U un voisinage de 0 donc il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $U_n \subset U$ d'où $V_n \subset U$.

On a $\overline{A} = \bigcap_{U \in \mathcal{V}_E(0)} (A + U) \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} (A + V_n)$ et si $U \in \mathcal{V}_E(0)$ alors il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $V_n \subset U$ donc

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} (A + V_n) \subset A + U,$$

mais U est arbitraire ainsi on obtient $\overline{A} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} (A + V_n)$ et pour $A = \{0\}$ on a $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} V_n = \{\overline{0}\}$.

2. i) Soit $i_0 \in F$, donc $V_{i_0} \subset V_F = \bigcap_{x \in V_F \setminus \{i_0\}} x + V_{i_0}$ d'où V_F est ouvert contenant 0. Notons $m = \max F$, soit $x \in V_F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $|\lambda| \leq 1$; donc il existe $x_1, \dots, x_m \in E$ tels que $x_i \in V_i$ et $x = \sum_{i=1}^m \alpha_i^F x_i$ ainsi $\lambda x = \sum_{i=1}^m \alpha_i^F \lambda x_i$ mais $\lambda x_i \in V_i$ (car les V_i sont équilibrés) et par suite $\lambda x \in V_F$ c-à-d V_F est équilibré.

Supposons que les V_n sont convexes, soit $x, y \in V_F$ et $t \in [0, 1]$ or il existe $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m \in E$ tels que $x_i, y_i \in V_i$, $x = \sum_{i=1}^m \alpha_i^F x_i$ et $y = \sum_{i=1}^m \alpha_i^F y_i$ ainsi $(1-t)x + ty = \sum_{i=1}^m \alpha_i^F ((1-t)x_i + ty_i) \in V_F$ car V_i est convexe donc V_F est convexe.

ii) Supposons que $p_F < \frac{1}{2^k}$, donc $\forall q \in F$, $2^{k-q} \leq \sum_{n \in F} 2^{k-n} < 1$ d'où $k < q$.

Supposons que $\forall n \in F$, $k < n$, donc $V_F = \sum_{i=k+1}^{m=k+q} \alpha_i^F V_i \subset V_{k+1} + \dots + V_{k+q}$.

Montrons par récurrence que $\forall q \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}_q : (\forall k \in \mathbb{N}^*, V_{k+1} + \dots + V_{k+q} \subset V_k)$.

On a $\mathcal{P}_1$ est vraie. Supposons que $\mathcal{P}_q$ est vraie, alors

$$V_{k+1} + \dots + V_{k+q+1} = V_{k+1} + (V_{(k+1)+1} + \dots + V_{(k+1)+q}) \subset V_{k+1} + V_{k+1} \subset V_k$$

donc $\mathcal{P}_{q+1}$ est vraie. Ceci termine la preuve de $p_F < 2^{-k} \implies V_F \subset V_k$.

iii) Soit $F, G \in \mathcal{F}$ tels que $p_F + p_G < 1$.

a. Notons $m = \max F \cup G$, donc $2^m(p_F + p_G) \in \mathbb{N}^*$, d'où il existe $q \in \mathbb{N}^*$ et $\gamma_0, \dots, \gamma_q \in \{0, 1\}$ tels que

$$2^m(p_F + p_G) = \sum_{i=0}^q \gamma_i 2^i$$

donc $p_F + p_G = \sum_{j=m-q}^m \gamma_{m-j} 2^{-j} \in]0, 1[$ ainsi si $j \leq 0$ alors $\gamma_{m-j} = 0$ et donc $p_F + p_G = \sum_{j=1}^m \gamma_{m-j} 2^{-j} \in]0, 1[$. Posons $H = \{j \in \{1, \dots, m\} \mid \gamma_{m-j} = 1\}$, on a donc $H \in \mathcal{F}$ et $p_F + p_G = \sum_{j=1}^m \gamma_{m-j} 2^{-j} = p_H$

b. Supposons que $\forall i \in \mathbb{N}^*, \alpha_i^F + \alpha_i^G = \alpha_i^H \in \{0, 1\}$; donc $\alpha_i^F \alpha_i^G = 0$ et $\alpha_i^F V_i + \alpha_i^G V_i = \alpha_i^H V_i$. D'où

$$V_F + V_G = \sum_{i=1}^m (\alpha_i^F V_i + \alpha_i^G V_i) = \sum_{i=1}^m \alpha_i^H V_i = V_H.$$

c. Supposons que $\exists i \in \mathbb{N}^*, \alpha_i^F + \alpha_i^G \neq \alpha_i^H$; posons $i_0 = \min\{i \in \mathbb{N}^* \mid \alpha_i^F + \alpha_i^G \neq \alpha_i^H\}$. Montrer que $\alpha_{i_0}^F = \alpha_{i_0}^G = 0$ et $\alpha_{i_0}^H = 1$,

On a $p_F + p_G = p_H$ donc $(\alpha_{i_0}^F + \alpha_{i_0}^G - \alpha_{i_0}^H) = 2^{i_0} \sum_{i=i_0+1}^m (\alpha_i^H - \alpha_i^F - \alpha_i^G) 2^{-i} < 2^{i_0} \sum_{i=i_0+1}^{\infty} 2^{-i} = 1$. Ainsi

$$0 \leq \alpha_{i_0}^F + \alpha_{i_0}^G < \alpha_{i_0}^H \leq 1$$

d'où

$$\alpha_{i_0}^F + \alpha_{i_0}^G = 0 \text{ et } \alpha_{i_0}^H = 1.$$

On a, d'après i)

$$\begin{aligned} V_F &= \alpha_1^F V_1 + \dots + \alpha_{i_0-1}^F V_{i_0-1} + \alpha_{i_0+1}^F V_{i_0+1} + \dots + \alpha_m^F V_m \\ &\subset \alpha_1^F V_1 + \dots + \alpha_{i_0-1}^F V_{i_0-1} + V_{i_0+1} + V_{i_0+2} + \dots + V_m \\ &\subset \alpha_1^F V_1 + \dots + \alpha_{i_0-1}^F V_{i_0-1} + V_{i_0+1} + V_{i_0+1} \end{aligned}$$

Avec un argument similaire, on a

$$V_G \subset \alpha_1^G V_1 + \dots + \alpha_{i_0-1}^G V_{i_0-1} + V_{i_0+1} + V_{i_0+1}.$$

De plus on a, pour $i < i_0$, $\alpha_i^F + \alpha_i^G = \alpha_i^H$; donc $\alpha_i^F \alpha_i^G = 0$ et $\alpha_i^F V_i + \alpha_i^G V_i = \alpha_i^H V_i$. D'où

$$\begin{aligned} V_F + V_G &\subset (\alpha_1^F V_1 + \alpha_1^G V_1) + \dots + (\alpha_{i_0-1}^F V_{i_0-1} + \alpha_{i_0-1}^G V_{i_0-1}) + V_{i_0+1} + V_{i_0+1} + V_{i_0+1} + V_{i_0+1} \\ &\subset \alpha_1^H V_1 + \dots + \alpha_{i_0-1}^H V_{i_0-1} + V_{i_0} = \alpha_1^H V_1 + \dots + \alpha_{i_0-1}^H V_{i_0-1} + \alpha_{i_0}^H V_{i_0} \subset V_H. \end{aligned}$$

3. i) On a $\forall F \in \mathcal{F}, p_F \in]0, 1[$ et en regardant la définition de d , il est clair que d est à valeurs dans $[0, 1]$ et $d(x, y) = d(x - y, 0)$. D'autre part V_F est équilibré donc si $x - y \in V_F$ alors $y - x \in V_F$ d'où $d(x, y) = d(x - y, 0) = d(y - x, 0) = d(y, x)$. En particulier, d est invariante par translation.

ii) Soit $x, y \in E$ tels que $d(x, y) = 0$, soit $n \in \mathbb{N}^*$ donc il existe $F \in \mathcal{F}$ tel que $p_F < 2^{-n}$ et $x - y \in V_F \subset V_n$ (d'après i)), ainsi $x - y \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} V_n = \{0\}$.

iii) Soient $x, y \in E$ et $t \in \mathbb{K}$ tel que $|t| \leq 1$ Supposons que $d(tx, ty) > d(x, y)$ donc il existe $F \in \mathcal{F}$ tel que $x - y \in V_F$ et $p_F < d(tx, ty)$, or V_F est équilibré donc $tx - ty \in V_F$ d'où $d(tx, ty) \leq p_F$, absurde. Donc $d(tx, ty) \leq d(x, y)$.

iv) Soient $x, y, z \in E$. Supposons que $d(x, z) > d(x, y) + d(y, z)$.

Donc $d(x, y) < 1$, $d(y, z) < 1$ et il existe $\varepsilon > 0$ tel que $d(x, z) > d(x, y) + d(y, z) + 2\varepsilon$. Soit donc $F, G \in \mathcal{F}$ tels que $p_F < d(x, y) + \varepsilon$, $p_G < d(y, z) + \varepsilon$, $x - y \in V_F$ et $y - z \in V_G$. D'après 2) il existe $H \in \mathcal{F}$ tel que $p_H = p_F + p_G$ et $V_F + V_G \subset V_H$, donc $x - z \in V_H$ ce qui donne $d(x, z) \leq p_H = p_F + p_G < d(x, y) + d(y, z) + 2\varepsilon < d(x, z)$, absurde. Ainsi

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

v) On a d est une pseudo-distance (écart fini) invariante par translation d'après i). Supposons que (E, T) est séparé.

Soit $x, y \in E$ tels que $d(x, y) = 0$. Alors $x - y \in \overline{\{0\}} = \{0\}$, d'où $x = y$ et par conséquent d est une distance.

4. Soit $r > 0$, on a

$$x \in B_d(0, r) \iff d(x, 0) < r \iff \exists F \in \mathcal{F} \text{ tel que } p_F < r \text{ et } x \in V_F \iff x \in \bigcup_{F \in \mathcal{F}_r} V_F.$$

Donc

$$B_d(0, r) = \bigcup_{F \in \mathcal{F}_r} V_F.$$

Soit $U \in \mathcal{T}$, soit $x \in U$ donc il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x + V_n \subset U$ mais $B_d(0, \frac{1}{2^n}) = \bigcup_{F \in \mathcal{F}_{\frac{1}{2^n}}} V_F \subset V_n$ ainsi $x + B_d(0, \frac{1}{2^n}) \subset U$ et par suite $U \in \mathcal{T}_d$, c-à-d $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_d$. Réciproquement, soit $U \in \mathcal{T}_d$ et soit $x \in U$. Donc il existe $r > 0$ tel que $x + B_d(0, r) \subset U$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{2^n} < r$ donc $V_n \subset \bigcup_{F \in \mathcal{F}_r} V_F = B_d(0, r)$, ainsi $x + V_n \subset U$ et par conséquent $U \in \mathcal{T}$. Ceci prouve que $\mathcal{T}_d \subset \mathcal{T}$. On conclut que

$\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$ c-à-d $\mathcal{T}$ est pseudo-métrisable (métrisable s'il est séparé).

Supposons que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, V_n est convexe. Donc, $\forall H \in \mathcal{F}$, V_H est convexe. Soient $x, y \in B_d(0, r)$ et $t \in [0, 1]$, donc il existe $F, G \in \mathcal{F}_r$ tels que $x \in V_F$ et $y \in V_G$. Soit $H \in \mathcal{F}$ tel que $p_H = p_F + p_G$ et $V_F + V_G \subset V_H$, donc $H \in \mathcal{F}_r$ et $(1-t)x + ty \in V_H \subset B_d(0, r)$. Alors $B_d(0, r) = \bigcup_{F \in \mathcal{F}_r} V_F$ est convexe. □

Corrigé de l'exercice 2.1.15

$\Rightarrow$ Soit δ une semi-norme sur E (une norme sans $\delta(x=0) \Rightarrow x=0$) telle que $\mathcal{T} = \mathcal{T}_\delta$. Donc la boule de centre 0 et de rayon 1 $B_\delta(0, 1) \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in E \text{ tel que } \delta(y) < 1\}$ est un voisinage de 0 convexe borné!!.

$\Leftarrow$ Soit W un voisinage convexe borné de 0, soit U un voisinage de 0 équilibré tel que $U \subset W$. Notons $V = \text{int}(co(U))$ qui est un ouvert convexe équilibré borné contenant 0. Posons

$$\begin{aligned} p: E &\longrightarrow [0, +\infty] \\ x &\longmapsto \inf\{s \in [0, +\infty[\text{ tel que } \frac{1}{s}x \in V\} \quad \inf \emptyset = +\infty \end{aligned}$$

On a :

a) $p(0) = \inf\{s > 0; \frac{1}{s}0 = 0 \in V\} = \inf]0, +\infty[= 0$ et pour tout $x \in E$, il existe $t_x > 0$ tel que $x \in t_x V$, car V est absorbant. Ainsi $p(x) < +\infty$.

b) Soit $x \in E$ tel que $p(x) = 0$. Soit $W \in \mathcal{V}_E(0)$, donc il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ tel que $|\lambda| \leq \alpha$, $\lambda V \subset W$ car V est borné donc il existe $s \in]0, \alpha]$ tel que $\frac{1}{s}x \in V$ d'où $x \in W$. On déduit que $x \in \{0\}$.

c) (i) Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in E$, supposons que $p(\lambda x) > |\lambda|p(x)$ donc $\lambda \neq 0$ et il existe $s > 0$ tel que $\frac{1}{s}x \in V$ et $s < \frac{p(\lambda x)}{|\lambda|}$, ainsi $\frac{1}{|\lambda|s}|\lambda|x \in V$, mais V est équilibré donc $\frac{1}{|\lambda|s}\lambda x = \frac{\lambda}{|\lambda|} \frac{1}{|\lambda|s}|\lambda|x \in V$, par suite $p(\lambda x) \leq |\lambda|s < p(\lambda x)$ ce qui est absurde et par conséquent $p(\lambda x) \leq |\lambda|p(x)$. Mais aussi on a, pour $\lambda \neq 0$, $p(x) = p(\frac{1}{\lambda}\lambda x) \leq \frac{1}{|\lambda|}p(\lambda x)$. Ce qui montre $p(\lambda x) = |\lambda|p(x)$ (même pour $\lambda = 0$).

(ii) Soient $x, y \in E$. Soit $\varepsilon > 0$ arbitraire ;

On a l'existence de $s \in]0, p(x) + \varepsilon]$ et $t \in]0, p(y) + \varepsilon]$ tels que $\frac{1}{s}x \in V$ et $\frac{1}{t}y \in V$. Mais V est convexe, donc

$$\frac{1}{s+t}(x+y) = \frac{s}{s+t}(\frac{1}{s}x) + \frac{t}{s+t}(\frac{1}{t}y) \in V.$$

Ainsi $p(x+y) \leq s+t \leq p(x) + p(y) + 2\varepsilon$. En tendant ε vers 0, on obtient $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$.

On conclut que p est une semi-norme sur E et c'est une norme si E est séparé.

d) (i) $V \subset B_p(0, 1) = (p < 1)$: Soit $x \in V$ donc il existe $W \in \mathcal{V}_E(0)$ tel que $x + W \subset V$, mais il existe $t > 0$ tel que $tx \in W$ d'où $(1+t)x \in V$ ce qui prouve que $p(x) \leq \frac{1}{1+t} < 1$.

(ii) $B_p(0, 1) = (p < 1) \subset V$: Soit $x \in B_p(0, 1) = (p < 1)$ donc il existe $s \in]0, 1[$ tel que $\frac{1}{s}x \in V$ et puisque $0 \in V$ et V convexe on a $x = (1-s)0 + s(\frac{1}{s}x) \in V$.

$$V = B_p(0, 1).$$

e) Soit $U \in \mathcal{T}$, soit $x \in U$ donc il existe $W \in \mathcal{V}_E(0)$ tel que $x + W \subset U$. Mais il existe $r > 0$ tel que $rV \subset W$ (V est borné) donc $x + rV = B_p(x, r) \subset U$, ce qui prouve que $U \in \mathcal{T}_p$.

Réciproquement, Soit $U \in \mathcal{T}_p$, soit $x \in U$ donc il existe $r > 0$ tel que $B_p(x, r) = x + rV \subset U$, d'où $U \in \mathcal{T}$.

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_p.$$

□

Corrigé de l'exercice 2.1.16

1. $\checkmark$ $(M, \mathcal{T}_M)$ est un EVT :

On a les topologies produits sur $M \times M$ et sur $\mathbb{K} \times M$ coïncident les topologies traces des topologies produits sur $E \times E$ et $\mathbb{K} \times E$ respectivement. Donc l'addition et le produit externe sur M sont continues puisqu'ils sont les restrictions de l'addition et du produit externe sur E qui sont continues car E est un EVT.

$\checkmark$ M est séparé si E l'est : Soit $\{0_M\} = \{0\} = \{0_E\} \cap M = \{0\} \cap M$ donc $\{0\}$ est fermé dans M car $\{0\}$ est fermé dans E .

$\checkmark$ M est localement convexe si E l'est : Soit $x \in M$ et V un voisinage de x dans M donc il existe $\Theta \in \mathcal{T}$ tel que $x \in \Theta \cap M \subset V$, or E est localement convexe donc il existe un voisinage convexe W de x tel que $W \subset \Theta$. Ainsi $W \cap M$ est un voisinage convexe tel que $W \cap M \subset V$, ceci montre que M est localement convexe si E l'est aussi.

2. S'il existe une pseudo-distance $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}^+$ sur E telle que $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$ alors sa restriction d_M à $M \times M$ est une pseudo-distance sur M telle que $\mathcal{T}_M = \mathcal{T}_{d_M}$. Même chose pour les semi-normes.

Remarque : La structure d'espace vectoriel est inutile pour cette question.

3. Soit $(x_n)_n$ une suite de Cauchy dans M donc c'est une suite de Cauchy sur E , ce dernier est complet donc il existe $x \in E$ tel que $(x_n)_n \rightarrow x$ dans E . Mais M est fermé d'où $x \in M$ (pourquoi?) et $(x_n)_n \rightarrow x$ dans M .

□

Corrigé de l'exercice 2.1.17

1. $E = \prod_{i \in I} E_i \stackrel{\text{def}}{=} \{f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} E_i \text{ tel que } \forall i \in I, f(i) \in E_i\}$ et $\mathcal{T}$ est la plus petite topologie sur E qui rend continue les projections, lorsque i décrit I ,

$$\begin{aligned} p_i : E &\longrightarrow E_i \\ f &\longmapsto f(i). \end{aligned}$$

Une base de la topologie $\mathcal{T}$ est

$$\mathcal{B} = \{\cap_{i \in J} p_i^{-1}(U_i), J \subset I \text{ tel que } J \text{ finie et } U_i \in \mathcal{B}_i\}$$

avec $\mathcal{B}_i$ une base topologique de $\mathcal{T}_i$ (eg $\mathcal{B}_i = \mathcal{T}_i$).

Une fonction g à valeurs dans E est continue si la fonction à valeurs dans E_i $p_i \circ g$ est continue quelque soit $i \in I$. Donc

$$\begin{aligned} \psi : E \times E &\longrightarrow E & \text{et } \phi : \mathbb{K} \times E &\longrightarrow E \\ (f, g) &\longmapsto f + g & (k, f) &\longmapsto kf \end{aligned}$$

sont continues si $\forall i \in I$

$$\begin{aligned} \psi_i : E \times E &\longrightarrow E_i & \text{et } \phi_i : \mathbb{K} \times E &\longrightarrow E_i \\ (f, g) &\longmapsto f(i) + g(i) & (k, f) &\longmapsto kf(i) \end{aligned}$$

sont continues

Soit $i \in I$ fixé! arbitraire.

$\checkmark$ Continuité de ψ_i :

Soit $(f_0, g_0) \in E \times E$. Soit $W \in \mathcal{V}_{E_i}(\psi_i(f_0, g_0))$, donc il existe $V \in \mathcal{V}_{E_i}(0)$ tel que $f_0(i) + g_0(i) + V + V \subset W$ d'où

$$\psi_i(p_i^{-1}(f_0(i) + V) \times p_i^{-1}(g_0(i) + V)) \subset W.$$

$\checkmark$ Continuité de ϕ_i :

Soit $(k_0, g_0) \in \mathbb{K} \times E$. Soit $W \in \mathcal{V}_{E_i}(\phi_i(k_0, g_0))$, donc il existe $V \in \mathcal{V}_{E_i}(0)$ et $\varepsilon > 0$ tels que $B(k_0, \varepsilon)[g_0(i) + V] \subset W$ d'où

$$\phi_i(B(k_0, \varepsilon) \times p_i^{-1}(g_0(i) + V)) \subset W.$$

Ceci termine la continuité de ψ et ϕ . Par conséquent $(E, \mathcal{T})$ est un EVT.

Une base de voisinage de 0 pour la topologie produit est

$$\mathcal{B}(0) = \{\cap_{i \in J} p_i^{-1}(U_i), J \subset I \text{ tel que } J \text{ finie et } U_i \in \mathcal{B}_i(0)\}$$

avec $\mathcal{B}_i(0)$ une base de voisinage de 0 pour la topologie $\mathcal{T}_i$ (eg $\mathcal{B}_i(0) = \mathcal{V}_{E_i}(0)$).

2. Supposons que $\forall i \in I, E_i$ est localement convexe.

Soit $U \in \mathcal{V}_E(0)$ donc il existe $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $i_1, \dots, i_n \in I$ et $V_1 \in \mathcal{V}_{E_{i_1}}, \dots, V_n \in \mathcal{V}_{E_{i_n}}$ tels que

$$\cap_{k=1}^n p_{i_k}^{-1}(V_k) \subset U \text{ et } V_1, \dots, V_n \text{ sont convexes.}$$

Mais l'intersection de convexes est convexe et l'image réciproque d'un convexe par une application linéaire est convexe. D'où $\cap_{k=1}^n p_{i_k}^{-1}(V_k)$ est convexe. Ainsi E est localement convexe.

Remarque : Puisque p_i sont linéaires ouvertes alors on a la réciproque c-à-d

E est localement convexe si et seulement si les E_i le sont.

Corrigé de l'exercice 2.1.18

1. Par définition de la topologie quotient, on a σ est continue.

Soit $U \in \mathcal{T}$. On a $\sigma^{-1}(\sigma(U)) = U + H = \cup_{h \in H} (U + h) \in \mathcal{T}$ donc $\sigma(U) \in \mathcal{T}'$ ainsi σ est une application ouverte.

On a E/H est un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ avec les opérations $\bar{x} + \bar{y} \stackrel{\text{def}}{=} \overline{x+y}$ et $k\bar{x} \stackrel{\text{def}}{=} \overline{kx}$.

Notons

$$\begin{aligned} \bar{\psi}: E/H \times E/H &\longrightarrow E/H & \bar{\phi}: \mathbb{K} \times E/H &\longrightarrow E/H \\ (s, t) &\longmapsto t + s & (k, t) &\longmapsto kt \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \psi: E \times E &\longrightarrow E & \phi: \mathbb{K} \times E &\longrightarrow E \\ (s, t) &\longmapsto t + s & (k, t) &\longmapsto kt \end{aligned}$$

Soit $V \in \mathcal{T}'$, donc $\sigma^{-1}(V) \in \mathcal{T}$ d'où $\psi^{-1}(\sigma^{-1}(V)) \in \mathcal{T}_{E \times E}$ et $\phi^{-1}(\sigma^{-1}(V)) \in \mathcal{T}_{\mathbb{K} \times E}$. De plus on montre facilement que les applications

$$\begin{aligned} \sigma_2: E \times E &\longrightarrow E/H \times E/H & \text{et} & \sigma_1: \mathbb{K} \times E &\longrightarrow \mathbb{K} \times E/H \\ (x, y) &\longmapsto (\bar{x}, \bar{y}) & & (k, y) &\longmapsto (k, \bar{y}) \end{aligned}$$

sont continues et ouvertes.

Donc,

$$\bar{\psi}^{-1}(V) = \sigma_2(\psi^{-1}(\sigma^{-1}(V))) \in \mathcal{T}_{E/H \times E/H}$$

et

$$\bar{\phi}^{-1}(V) = \sigma_1(\phi^{-1}(\sigma^{-1}(V))) \in \mathcal{T}_{\mathbb{K} \times E/H}.$$

Donc $\bar{\psi}$ et $\bar{\phi}$ sont continues et par suite E/H est un EVT.

Soient $s, t \in E/H$ tel que $s \neq t$. Donc il existe $x, y \in E$ tels que $s = x + H$, $t = y + H$ et $y \notin x + H$. Donc il existe un voisinage V de 0 tel que $y + V - V \subset E \setminus (x + H)$ et donc $(y + H + V) \cap (x + H + V) = \emptyset$, ainsi $\sigma(y + V)$ et $\sigma(x + V)$ sont deux voisinages disjoints respectivement de t et s dans E/H ainsi $(E/H, \mathcal{T}')$ est séparé.

Soit F un sous espace vectoriel de E de dimension finie, alors $\sigma(F)$ est un sous espace vectoriel de dimension finie de E/H qui est séparé. Ainsi $\sigma(F)$ est fermé, d'où $H + F = \sigma^{-1}(\sigma(F))$ est un fermé de E car σ est continue (très joli!).

2. Soit $\mathcal{B}$ est une base de voisinage de 0 dans E .

Soit $W \in \mathcal{V}_{E/H}(\bar{0})$, donc $\sigma^{-1}(W) \in \mathcal{V}_E(0)$ ainsi il existe $V \in \mathcal{B}$ tel que $V \subset \sigma^{-1}(W)$ donc $\sigma(V) \subset W$, σ est une application ouverte donc $\sigma(V) \in \mathcal{V}_{E/H}(\bar{0})$.

3. ✓ Supposons que $(E, \mathcal{T})$ est localement convexe :

Si V est convexe alors $\sigma(V)$ est convexe (car σ est linéaire), d'où $(E/H, \mathcal{T}')$ est localement convexe d'après 2.

✓ Supposons que $(E, \mathcal{T})$ est localement compact :

Si V est compact alors $\sigma(V)$ est compact (l'image d'un compact par une application continue à valeurs dans un séparé est compact), d'où $(E/H, \mathcal{T}')$ est localement compact d'après 2.

✓ Supposons que $(E, \mathcal{T})$ est localement bornée :

Si V est borné alors $\sigma(V)$ est borné (car σ est linéaire continue), d'où $(E/H, \mathcal{T}')$ est borné d'après 2.

✓ Supposons que $(E, \mathcal{T})$ est pseudo-métrisable :

Soit δ une pseudo-distance telle que $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{E/H \times E/H} \delta$, donc $\{B_\delta(0, \frac{1}{n}); n \in \mathbb{N}^*\}$ est base de voisinage de 0 dénombrable dans $(E, \mathcal{T})$. Ainsi, $\{\sigma(B_\delta(0, \frac{1}{n})); n \in \mathbb{N}^*\}$ est base de voisinage de 0 dénombrable dans $(E/H, \mathcal{T}')$ et d'après l'exercice 2.1.14 il existe une distance d sur E/H invariante par translation ($\mathcal{T}'$ est séparé) telle que $\mathcal{T}' = \mathcal{T}_d$.

✓ Supposons que $(E, \mathcal{T})$ est semi-normable :

Donc 0 admet un voisinage convexe borné V dans $(E, \mathcal{T})$ donc $\sigma(V)$ est un voisinage convexe borné de 0 dans $(E/H, \mathcal{T}')$ et ce dernier est séparé donc d'après l'exercice 2.1.15 $(E/H, \mathcal{T}')$ est normalisable.

4. a. ✓ δ est une distance sur E/H :

(i) Soit $\bar{x}, \bar{y} \in E/H$ tels que $\delta(\bar{x}, \bar{y}) = 0$, donc $\forall r > 0$, il existe $h \in H$ tel que $d(x - y, h) < r$ d'où $x - y \in H + B_d(0, r)$ ainsi $x - y \in \bar{H} = H$ et par suite $\bar{x} = \bar{y}$.

D'autre part $0 \in H$ donc $0 \leq \delta(\bar{x}, \bar{x}) \leq d(0, 0) = 0$. ceci prouve que δ sépare les points de E/H .

(ii) Soit $\bar{x}, \bar{y} \in E/H$ donc $\delta(\bar{x}, \bar{y}) = \inf_{h \in H} d(x - y, h) = \inf_{h \in H} d(-h, y - x) = \inf_{h \in H} d(y - x, -h) = \delta(\bar{y}, \bar{x})$, ainsi δ est symétrique.

(iii) Soit $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in E/H$. Supposons que $\delta(\bar{x}, \bar{z}) > \delta(\bar{x}, \bar{y}) + \delta(\bar{y}, \bar{z})$

donc il existe $r > 0$ tel que $\delta(\bar{x}, \bar{z}) > \delta(\bar{x}, \bar{y}) + \delta(\bar{y}, \bar{z}) + 2r$. Soit $h, k \in H$ tels que $d(x - y, h) < \delta(\bar{x}, \bar{y}) + r$ et $d(y - z, k) < \delta(\bar{y}, \bar{z}) + r$.

Ainsi

$$\delta(\bar{x}, \bar{z}) \leq d(x - z, h + k) = d(x - h, z + k) \leq d(x - h, y) + d(y, z + k) = d(x - y, h) + d(y - z, k) < \delta(\bar{x}, \bar{y}) + \delta(\bar{y}, \bar{z}) + 2r.$$

Absurde, donc δ vérifie l'inégalité triangulaire.

Par conséquent, δ est une distance sur E/H .

Pour montrer que $\mathcal{T}' = \mathcal{T}_\delta$ il suffit de remarquer que $\sigma(B_d(0, r)) = H + B_d(0, r) = B_\delta(\bar{0}, r)$.

b. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $(E/H, T')$, donc $\forall k \in \mathbb{N}$, il existe $N_k \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n, m \geq N_k$,

$$\delta(a_n, a_m) < 2^{-k}.$$

Posons

$$n_k = k + N_k + \dots + N_0$$

donc $\forall k \in \mathbb{N}$, $\delta(a_{n_{k+1}}, a_{n_k}) < 2^{-k}$. Soit une suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de E et une suite $(h_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de H telles que $\forall k \in \mathbb{N}$, $a_{n_k} = \sigma(x_k) = x_k + H$ et $d(x_{k+1} - x_k, h_{k+1}) < 2^{-k}$.

Posons

$$y_k = x_k - \sum_{i=0}^k h_i$$

donc $\forall k \in \mathbb{N}$, $d(y_{k+1}, y_k) < 2^{-k}$ et par suite $\forall k, m \in \mathbb{N}$, $d(y_{k+m}, y_k) < 2^{-k}(2^{m-1} + \dots + 1)$. Ceci prouve que la suite $(y_k)_k$ est de Cauchy dans (E, d) qui est complet donc il existe $y \in E$ tel que $(y_k)_k$ converge vers y . La continuité de σ assure que $(a_{n_k})_k$ qui est une sous suite de la suite de Cauchy $(a_n)_n$ converge vers $a = \sigma(y)$. Ainsi la suite $(a_n)_n$ converge vers $a = \sigma(y)$. On vient de montrer que $(E/H, T')$ est complet métrisable si (E, T) est complet pseudo-métrisable. $\square$

Corrigé de l'exercice 2.2.1

i. • $(p+q)(0) = p(0) + q(0) = 0$

• $\sup(p, q)(0) = \sup(p(0), q(0)) = 0$

• $\sqrt{p^2 + q^2}(0) = \sqrt{p^2(0) + q^2(0)} = 0$

• $p_L(0) = \inf_{l \in L} p(0+l) = 0$ car $0 \in L$, $p(0) = 0$ et $p \geq 0$.

ii. Soit $x \in E$ et $t \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.

• $(p+q)(tx) = p(tx) + q(tx) = |t|p(x) + |t|q(x) = |t|(p+q)(x)$

• $\sup(p, q)(tx) = \sup(p(tx), q(tx)) = |t|\sup(p, q)(x)$

• $\sqrt{p^2 + q^2}(tx) = \sqrt{t^2 p^2(x) + t^2 q^2(x)} = |t|\sqrt{p^2 + q^2}(x)$

• $p_L(tx) = \inf_{l \in L} p(tx+l) = |t|\inf_{l \in L} p(x+t^{-1}l) = |t|\inf_{l \in L} p(x+l) = |t|p_L(x)$ puisque L est un sous espace vectoriel.

iii. Inégalité triangulaire : Soient $x, y \in E$.

• $(p+q)(x+y) = p(x+y) + q(x+y) \leq p(x) + p(y) + q(x) + q(y) \leq (p+q)(x) + (p+q)(y)$

• $p(x+y) \leq p(x) + p(y) \leq \sup(p(x), q(x)) + \sup(p(y), q(y))$ de même pour q ce qui donne $\sup(p, q)(x+y) = \sup(p(x+y), q(x+y)) \leq \sup(p, q)(x) + \sup(p, q)(y)$.

• $\sqrt{p^2 + q^2}(x+y) = \sqrt{p^2(x+y) + q^2(x+y)} \leq \sqrt{[p(x) + p(y)]^2 + [q(x) + q(y)]^2} \leq \sqrt{p(x)^2 + q(x)^2} + \sqrt{p(y)^2 + q(y)^2} = \sqrt{p^2 + q^2}(x) + \sqrt{p^2 + q^2}(y)$.

• Supposons que $p_L(x+y) > p_L(x) + p_L(y)$ donc il existe $r > 0$ tel que

$$p_L(x+y) > p_L(x) + p_L(y) + 2r.$$

Soit $l, l' \in L$ tels que $p_L(x) + r > p(x+l)$ et $p_L(y) + r > p(y+l')$ d'où $p_L(x+y) \leq p(x+y+l+l') \leq p_L(x) + p_L(y) + 2r < p_L(x+y)$, absurde. Donc

$$p_L(x+y) \leq p_L(x) + p_L(y).$$

$\square$

Corrigé de l'exercice 2.2.2

1. $\Rightarrow$ 2. car $(p < 1) = p^{-1}(-\infty, 1[)$.

2. $\Rightarrow$ 3. car $0 \in (p < 1) = \text{int}(p < 1)$.

3. $\Rightarrow$ 4. car $\text{int}(p < 1) \subset \text{int}(p \leq 1)$.

4. $\Rightarrow$ 5. Soit $\varepsilon > 0$, on a $V = \varepsilon(p \leq 1) \in \mathcal{V}_E(0)$ et pour tout $x \in V$,

$$|p(x) - p(0)| = \varepsilon p(\varepsilon^{-1}x) \leq \varepsilon,$$

donc p est continue en 0.

5. $\Rightarrow$ 6. On a $|p(x) - p(y)| \leq p(x-y)$ et p continue en 0, donc p est continue. Ainsi, pour $q = p$ on a q est une semi-norme continue qui domine p .

6. $\Rightarrow$ 1. q est continue en 0 donc p est continue en 0 est par suite p est continue par tout. $\square$

Corrigé de l'exercice 2.2.3

Posons

$$\begin{aligned} p: E &\longrightarrow [0, +\infty] \\ x &\longmapsto \inf\{s \in [0, +\infty[\text{ tel que } \frac{1}{s}x \in V\} \quad \inf \emptyset = +\infty \end{aligned}$$

On a :

a) $p(0) = \inf\{s > 0; \frac{1}{s}0 = 0 \in V\} = \inf]0, +\infty[= 0$ (V est équilibré donc $0 \in V$) et pour tout $x \in E$, il existe $t_x > 0$ tel que $x \in t_x V$, car V est absorbant. Ainsi $p(x) \leq t_x < +\infty$.

b) (i) Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in E$, supposons que $p(\lambda x) > |\lambda|p(x)$ donc $\lambda \neq 0$ et il existe $s > 0$ tel que $\frac{1}{s}x \in V$ et $s < \frac{p(\lambda x)}{|\lambda|}$, ainsi $\frac{1}{|\lambda|s}|\lambda|x \in V$, mais V est équilibré donc $\frac{1}{|\lambda|s}\lambda x = \frac{\lambda}{|\lambda|} \frac{1}{s}|\lambda|x \in V$, par suite $p(\lambda x) \leq |\lambda|s < p(\lambda x)$ ce qui est absurde et par conséquent $p(\lambda x) \leq |\lambda|p(x)$. Mais aussi on a, pour $\lambda \neq 0$, $p(x) = p(\frac{1}{\lambda}\lambda x) \leq \frac{1}{|\lambda|}p(\lambda x)$. Ce qui montre $p(\lambda x) = |\lambda|p(x)$ (même pour $\lambda = 0$).

(ii) Soient $x, y \in E$. Soit $\varepsilon > 0$ arbitraire ;

On a l'existence de $s \in]0, p(x) + \varepsilon]$ et $t \in]0, p(y) + \varepsilon]$ tels que $\frac{1}{s}x \in V$ et $\frac{1}{t}y \in V$. Mais V est convexe, donc

$$\frac{1}{s+t}(x+y) = \frac{s}{s+t}\left(\frac{1}{s}x\right) + \frac{t}{s+t}\left(\frac{1}{t}y\right) \in V.$$

Ainsi $p(x+y) \leq s+t \leq p(x) + p(y) + 2\varepsilon$. En tendant ε vers 0, on obtient $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$.

p est une semi-norme sur E .

c) (i) $V \subset B_p(0,1) = \{p < 1\}$: Soit $x \in V$ donc il existe $t > 0$ tel que $tx \in V - x$ d'où $(1+t)x \in V$ ce qui prouve que $p(x) \leq \frac{1}{1+t} < 1$.

(ii) $B_p(0,1) = \{p < 1\} \subset V$: Soit $x \in B_p(0,1) = \{p < 1\}$ donc il existe $s \in]0,1[$ tel que $\frac{1}{s}x \in V$ et puisque $0 \in V$ et V convexe on a $x = (1-s)0 + s(\frac{1}{s}x) \in V$.

$$V = B_p(0,1) = \{p < 1\}.$$

□

Corrigé de l'exercice 2.2.4

On a $\mathcal{P}$ est une suite de semi-norme séparante, donc $(S, \mathcal{P})$ est un EVT métrisable par la distance invariante par translation $d(x,y) = \sup_{i \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^i} (1 \wedge |x_i - y_i|)$ et localement convexe. Montrons qu'il est complet : Soit $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy. Soit $k \in \mathbb{N}$ (fixé!), soit $\varepsilon > 0$, donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n, m \geq N, \forall i \in \mathbb{N}, \frac{1}{2^i} (1 \wedge |x_i^n - x_i^m|) < \frac{\varepsilon \wedge 1}{2^k}$ et donc

$$|x_k^n - x_k^m| < \varepsilon.$$

$\mathbb{C}$ est complet donc il existe $x_k \in \mathbb{C}$ tel que $(x_k^n)_n$ converge vers x_k dans $\mathbb{C}$. Ainsi on a construit une suite $x = (x_k)_k \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tel que $\forall k \in \mathbb{N}, (x_k^n)_n$ converge vers x_k .

Soit $\varepsilon > 0$, donc il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n, m \geq N, \forall i \in \mathbb{N}, \frac{1}{2^i} (1 \wedge |x_i^n - x_i^m|) \leq \varepsilon$ et en tendant $m \rightarrow \infty$, on obtient $\forall n \leq N, \forall i \in \mathbb{N}, \frac{1}{2^i} (1 \wedge |x_i^n - x_i|) \leq \varepsilon$. Ce qui prouve que la suite $(x^n)_n$ converge vers x dans $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. □

Corrigé de l'exercice 2.2.5

La topologie sur E est engendrée par une suite de semi norme séparante, donc E est un EVT métrisable localement convexe. Il reste à montrer que (E, d) est complet avec

$$d(x,y) = \sup_n \frac{1}{2^n} (1 \wedge \|x - y\|_n).$$

Soit $(x_k)_k$ une suite de Cauchy dans E , soit $n \in \mathbb{N}$ (fixé!), soit $\varepsilon > 0$ donc il existe $N_{\varepsilon,n} \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k, l \geq N_{\varepsilon,n}$ on a $d(x_k, x_l) < \frac{\varepsilon \wedge 1}{2^n}$ donc $\|x_k - x_l\|_n < \varepsilon$. Ainsi $(x_k)_k$ une suite de Cauchy dans $(E_n, \|\cdot\|_n)$ et par suite il existe $a^n \in E_n$ tel que $(x_k)_k$ converge vers a^n dans $(E_n, \|\cdot\|_n)$. L'unicité de la limite assure que $\forall n, a^n = a^0 \stackrel{\text{def}}{=} x$.

D'autre part, $\forall k, l \geq N_{\varepsilon,0}, \forall n \in \mathbb{N}$, on a $\frac{1}{2^n} (1 \wedge \|x_k - x_l\|_n) < \varepsilon$. Tendons $l \rightarrow +\infty$ pour avoir $\forall k \geq N_{\varepsilon,0}, \forall n \in \mathbb{N}$, on a $\frac{1}{2^n} (1 \wedge \|x_k - x\|_n) \leq \varepsilon$. Ainsi, $(x_k)_k$ converge dans E et par conséquent E est complet. □

Corrigé de l'exercice 2.2.6

1. Soit p est une semi norme sur E . On a $0 \in H$, donc $\bar{p}(0) = 0$. Soit $t \in \mathbb{K} \setminus \{0\}, x \in E$,

$$\bar{p}(t\bar{x}) = \inf_{h \in H} p(tx + h) = |t| \inf_{h \in H} p(x + t^{-1}h) = |t|\bar{p}(\bar{x}).$$

Soit $x, y \in E$. Supposons que $\bar{p}(\bar{x} + \bar{y}) > \bar{p}(\bar{x}) + \bar{p}(\bar{y})$ donc il existe $r > 0$ tel que $\bar{p}(\bar{x} + \bar{y}) > \bar{p}(\bar{x}) + \bar{p}(\bar{y}) + 2r$. Soit $h, k \in H$ tels que $p(x+h) < \bar{p}(\bar{x}) + r$ et $p(y+k) < \bar{p}(\bar{y}) + r$ donc

$$\bar{p}(\bar{x} + \bar{y}) \leq p(x+y+h+k) \leq p(x+h) + p(y+k) < \bar{p}(\bar{x}) + \bar{p}(\bar{y}) + 2r < \bar{p}(\bar{x} + \bar{y}),$$

absurde. Donc $\bar{p}(\bar{x} + \bar{y}) \leq \bar{p}(\bar{x}) + \bar{p}(\bar{y})$.

$\bar{p}$ est une semi norme sur E/H .

2. Supposons que $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\bar{p}}$. Il suffit de remarquer que pour $p \in \mathcal{P}$, $\sigma(p < 1) = (\bar{p} < 1)$. □

Corrigé de l'exercice 2.2.7

1. $\checkmark p_K$ est une semi norme sur E :

$$p_K(0) = \max_{x \in K} |0| = 0, \quad p_K(tf) = \max_{x \in K} |tf(x)| = |t| \max_{x \in K} |f(x)| = |t| p_K(f) \text{ et } p_K(f+g) = \max_{x \in K} (|f(x)| + |g(x)|) \leq \max_{x \in K} |f(x)| + \max_{x \in K} |g(x)| \leq p_K(f) + p_K(g).$$

$\checkmark$ La famille $\mathcal{P} = \{p_K, K \in \mathcal{K}\}$ est séparante.

Soit $f \in E$ tel que $\forall K \in \mathcal{K}, p_K(f) = 0$. Soit $x \in U$ o $\{x\}$ est compact de U donc $|f(x)| = p_{\{x\}}(f) = 0$ d'où $f = 0$.

$\checkmark$ La famille $\mathcal{P} = \{p_K, K \in \mathcal{K}\}$ est filtrante.

On a, pour tous $K, K' \in \mathcal{K}$, $p_K \leq p_{K \cup K'}$ et $p_{K'} \leq p_{K \cup K'}$, CQFD.

2. On a $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}$ donc $\mathcal{T}_{\mathcal{Q}} \subset \mathcal{T}_{\mathcal{P}}$.

Réciproquement, soit $K \in \mathcal{K}$, donc K est borné et $d(K, \mathbb{R}^d \setminus U) > 0$. D'où il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $K \subset B_d^f(0, n)$ et $d(K, \mathbb{R}^d \setminus U) \geq \frac{1}{n+1}$ ainsi $K \subset K_n$ et par suite $p_K \leq p_{K_n}$. Ceci prouve que $\mathcal{T}_{\mathcal{P}} \subset \mathcal{T}_{\mathcal{Q}}$. Donc

$$\mathcal{T}_{\mathcal{Q}} = \mathcal{T}_{\mathcal{P}}.$$

3. On a $(E, \mathcal{P})$ est espace localement convexe puisque sa topologie est définie par une famille de semi-norme et cette topologie est métrisable car elle est engendrée aussi par une suite de semi-norme à savoir $\mathcal{Q}$. La distance δ définie par $\delta(f, g) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n} (1 \wedge p_{K_n}(f - g))$ engendre la topologie $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ c-à-d $\mathcal{T}_{\mathcal{P}} = \mathcal{T}_{\delta}$ et elle est invariante par translation.

Il reste à montrer que (E, δ) est complet pour affirmer $(E, \mathcal{P})$ est un espace de Fréchet. Pour cela, soit $(f_k)_k$ une suite de Cauchy de (E, δ) . Donc $\forall \varepsilon > 0, \forall i \in \mathbb{N}$, il existe $N_{\varepsilon, i} \in \mathbb{N}$ telle que $\forall k, l \geq N_{\varepsilon, i}$,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{2^n} (1 \wedge p_{K_n}(f_k - f_l)) < \frac{1 \wedge \varepsilon}{2^i}.$$

Soit $x \in U$ donc il existe $i_x \in \mathbb{N}$ tel que $x \in K_{i_x}$ d'où $\forall k, l \geq N(\varepsilon, i_x), |f_k(x) - f_l(x)| < \varepsilon$. Ceci montre que la suite $(f_k(x))_k$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$ donc il existe $f(x) \in \mathbb{R}$ tel que la suite $(f_k(x))_k$ converge vers $f(x)$ dans $\mathbb{R}$.

Soit $\varepsilon > 0$, on a $\forall k, l \geq N_{\varepsilon, 0}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in K_n, \frac{1}{2^n} (1 \wedge |f_k(x) - f_l(x)|) < \varepsilon$. Tendons $l \rightarrow +\infty$, pour avoir $\forall k \geq N_{\varepsilon, 0}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in K_n, \frac{1}{2^n} (1 \wedge |f_k(x) - f(x)|) \leq \varepsilon$. Donc

$$u_k \stackrel{\text{def}}{=} \max_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n} (1 \wedge p_{K_n}(f_k - f)) \rightarrow 0. \quad (4.1)$$

Soit $a \in U$ donc il existe $r_a > 0$ tel que $B_d^f(a, r_a) \subset U$, soit $n_a \in \mathbb{N}$ tel que $B_d^f(a, r_a) \subset K_{n_a}$. D'après 4.1, $p_{K_{n_a}}(f_k - f) \rightarrow 0$ et donc

$$\sup_{x \in B_d^f(a, r_a)} |f_k(x) - f(x)| \rightarrow 0.$$

Ceci prouve que f est continue en a arbitraire dans U . Ainsi, $f \in E$ et $u_k = \delta(f_k, f) \rightarrow 0$ cqfd.

4. Montrons que p_K n'est pas une norme pour $K \in \mathcal{K}$.

Soit $x_K \in U \setminus K$ ($U \setminus K \neq \emptyset$ car $\mathbb{R}^d$ est connexe) et posons $A = B_d^f(x_K, r)$ avec $r = \frac{d(x_K, K)}{2}$ qui est un compact vérifiant $x_K \in A$ et $A \cap K = \emptyset$.

Soit $g_K : t \mapsto \frac{d(t, A)}{d(t, A) + d(t, K)}$, on a $g_K \in E$, $g_K \neq 0$ ($g_K(x_K) = 1$) et $p_K(g_K) = 0$. On vient de montrer que p_K n'est pas une norme sur E .

Soit un ouvert V de E contenant 0. Donc il existe $\varepsilon > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $\varepsilon (p_{K_n} < 1) \subset V$. Ainsi

$$\{t g_{K_n}, t \in \mathbb{R}\} \subset \varepsilon (p_{K_n} < 1) \subset V.$$

Donc V contient une droite réelle.

Supposons que $(E, \mathcal{P})$ est normable. Donc il existe une norme $\|\cdot\|$ sur E tel que $\{x \in E \text{ tel que } \|x\| < 1\}$ est un ouvert de $(E, \mathcal{P})$ contenant 0, d'où il existe $g \in E \setminus \{0\}$ tel que $\{tg, t \in \mathbb{R}\} \subset \{x \in E \text{ tel que } \|x\| < 1\}$ qui implique que $\|g\| = 0$, absurde. Ainsi $(E, \mathcal{P})$ n'est pas normable. □

Corrigé de l'exercice 2.2.8

1. On a, puisque D^α est linéaire, $\forall f, g \in E^k, \forall \lambda \in \mathbb{R}, p_{K, m}(\lambda f) = |\lambda| p_{K, m}(f)$ et $p_{K, m}(f + g) \leq p_{K, m}(f) + p_{K, m}(g)$. Donc $p_{K, m}$ est une semi norme sur E^k avec $k \geq m$.

Soit $f \in E^k$ ($k \geq m$) telle que, $\forall K \in \mathcal{K}, p_{K, m}(f) = 0$ alors, en particulier, $\forall K \in \mathcal{K}, p_{K, 0}(f) = 0$. Ce qui donne, d'après l'exercice 2.2.7 question 1., que $f = 0$. ainsi $\mathcal{P}_m$ et $\mathcal{P}_\infty$ sont séparantes respectivement sur E^k et sur E^∞ .

2. Comme dans l'exercice 2.2.7 question 2., soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $K_n = \{x \in U \text{ tel que } d(x, \mathbb{R}^d \setminus U) \geq \frac{1}{n+1}\} \cap B_\infty(0, n)$. On a $\mathcal{T}_{\mathcal{P}_k} = \mathcal{T}_{\mathcal{Q}_k}$ avec $\mathcal{Q}_k = \{p_{K_n, k}, n \in \mathbb{N}\}$ si $k \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{Q}_\infty = \{p_{K_n, k}, n, m \in \mathbb{N}\}$. Donc $(E^k, \mathcal{P}_k)$ est un EVT localement convexe métrisable.

Il reste à montrer que $(E^k, \mathcal{P}_k)$ est complet. Pour cela, soit $(f_n)_n$ une suite de Cauchy dans $(E^k, \mathcal{P}_k)$. Donc, $\forall \alpha \in \Delta_k$, $(D^\alpha f_n)_n$ est une suite de Cauchy dans $(E^0, \mathcal{P}_0)$ qui est complet d'après l'exercice 2.2.7 question 3., ainsi, il existe $g^\alpha \in E^0$ telle que

$$(D^\alpha f_n)_n \rightarrow g^\alpha \text{ dans } (E^0, \mathcal{P}_0).$$

En déduit que $f \stackrel{\text{def}}{=} g^0 \in E^k$, $g^\alpha = D^\alpha f$ et que la suite $(f_n)_n$ converge vers f dans $(E^k, \mathcal{P}_k)$

$(E^k, \mathcal{P}_k)$ un espace de Fréchet, pour tout $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

3. On a, pour $\alpha \in \Delta_l$, D^α est linéaire de E^k dans $E^{k-|\alpha|} \subset E^{k-l}$ et $a_\alpha \in \mathcal{C}^{k-l}(U)$, donc P est linéaire E^k dans E^{k-l} .

✓ Continuité :

Soit $K \in \mathcal{K}$, soit $f \in E^k$. Donc, pour $x \in K$ et $\beta \in \Delta_{k-l}$,

$$|D^\beta P(f)(x)| \leq \sum_{|\alpha| \leq l} |D^\beta (a_\alpha D^\alpha f)(x)|$$

Mais, une récurrence sur $|\beta|$, permet de montrer que $\forall f, g \in E^{|\beta|}, \forall y \in U$,

$$|D^\beta (fg)(y)| \leq 2^{|\beta|} \left[\sum_{|\lambda| \leq |\beta|} |D^\lambda f(y)| \times \sum_{|\lambda| \leq |\beta|} |D^\lambda g(y)| \right] \quad \text{On peut faire mieux! } D^\beta (fg) = \sum_{\lambda \leq \beta} C_\alpha^\lambda D^{\alpha-\lambda} f D^\lambda g!?$$

Donc

$$\begin{aligned} |D^\beta P(f)(x)| &\leq \sum_{|\alpha| \leq l} |D^\beta (a_\alpha D^\alpha f)(x)| \\ &\leq \sum_{|\alpha| \leq l} 2^{|\beta|} \left[\sum_{|\lambda| \leq |\beta|} |D^\lambda a_\alpha(x)| \times \sum_{|\lambda| \leq |\beta|} |D^{\lambda+\alpha} f(x)| \right] \\ &\leq 2^k \sup_{x \in K} \left[\sum_{|\alpha| \leq l} \sum_{|\lambda| \leq k-l} |D^\lambda a_\alpha(x)| \right] \times p_{K,k}(f) \\ &\leq C p_{K,k}(f). \end{aligned}$$

Ainsi

P est continue de E^k dans E^{k-l} .

4. (i) On a, donc, $\forall K \in \mathcal{K}$ il existe $M_K \in \mathbb{R}$ tel que $\forall f \in B$, $\forall x \in K$, $\forall \alpha \in \Delta_l$, $|D^\alpha f(x)| \leq M_K$. D'après l'inégalité des accroissements finis, pour tout $x, y \in K$, $|f(x) - f(y)| \leq M_K |x - y|$. Donc B est équicontinue puisque $\forall \varepsilon > 0$, il existe $\eta = \frac{\varepsilon}{1+M_K} > 0$ tel que $\forall x, y \in K$,

$$|x - y| < \eta \implies \sup_{f \in B} |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

De plus, pour tout $x \in K$, $B(x) = \{f(x), f \in B\} \subset B_\mathbb{R}(0, 1 + M_K)$ donc relativement compact dans $\mathbb{R}$. D'après le théorème d'Arzelà-Ascoli, B est relativement compact dans $\mathcal{C}(K; \mathbb{R})$. Par conséquent, la restriction à K de toute suite de B admet une sous suite qui converge dans $\mathcal{C}(K)$.

(ii) Soit $(f_p)_p$ une suite d'éléments de B , pour montrer que $i(B)$ est relativement compacte il suffit de trouver une sous suite de $(f_p)_p$ qui converge dans E^0 car ce dernier est métrisable, voir l'exercice 2.2.7.

Notons $D_n \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\{f|_{K_n}, f \in B\}}^{\mathcal{C}(K_n; \mathbb{R})}$ qui est un compact de $\mathcal{C}(K_n; \mathbb{R})$ donc

$$\prod_{n \in \mathbb{N}} D_n \text{ est métrisable compact} \quad \text{—voir cours topologie.}$$

Posons, pour $p \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} g_p: \quad \mathbb{N} &\longrightarrow \cup_{n \in \mathbb{N}} D_n \\ n &\longmapsto f_p|_{K_n} \end{aligned}$$

On a $(g_p)_p$ est une suite d'éléments de $\prod_{n \in \mathbb{N}} D_n$. Donc elle admet une sous suite $(g_{p_j})_j$ qui converge vers un élément $g \in \prod_{n \in \mathbb{N}} D_n$ dans $\prod_{n \in \mathbb{N}} D_n$. Donc, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\sup_{x \in K_n} |f_{p_j}(x) - g(n)(x)| \rightarrow_{j \rightarrow \infty} 0.$$

En particulier si $x \in K_n \cap K_m$, alors $g(n)(x) = g(m)(x)$. Puisque $\bigcup_n K_n = U$, alors il existe $g \in E^0$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $g = g(n)$ sur K_n . Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\sup_{x \in K_n} |f_{p_j}(x) - g(x)| \rightarrow_{j \rightarrow \infty} 0,$$

c-à-d

$$f_{p_j} \rightarrow_{j \rightarrow \infty} g \text{ dans } E^0.$$

(iii) Soit $(f_p)_p$ une suite d'éléments de B , pour montrer que $i(B)$ est relativement compacte il suffit de trouver une sous suite de $(f_p)_p$ qui converge dans E^k puisque ce dernier est métrisable, voir question 2.

Posons, pour $\alpha \in \Delta_k$, $B_\alpha = D^\alpha B \stackrel{\text{def}}{=} \{D^\alpha f; f \in B\}$. Puisque B est bornée dans E^k , alors B_α est bornée dans E^{l-k} et $l-k > 0$. D'après la question 4. (ii) et le fait que Δ_k est un ensemble fini, il existe une sous suite $(f_{p_j})_j$ de $(f_p)_p$ telle que $\forall \alpha \in \Delta_k$, il existe $g^\alpha \in E^0$ tels que la suite $(D^\alpha f_{p_j})_j$ converge vers g^α dans E^0 . Donc $f \stackrel{\text{def}}{=} g^0 \in E^k$, $D^\alpha f = g^\alpha$ et $(f_{p_j})_j$ converge vers f dans E^k .

Ainsi $i(B)$ est relativement compacte dans E^k .

(iv) Soit B une partie bornée dans E^∞ . Soit $(f_p)_p$ une suite d'éléments de B , pour montrer que B est relativement compacte il suffit de trouver une sous suite de $(f_p)_p$ qui converge dans E^∞ puisque ce dernier est métrisable, voir question 2.

Or, d'après ce qui précède, B est relativement compact dans E^k , pour tout $k \in \mathbb{N}$. Donc

$$\prod_{k \in \mathbb{N}} \overline{B}^{E^k} \text{ est métrisable compact.}$$

Posons

$$\begin{aligned} g_p: \mathbb{N} &\longrightarrow \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \overline{B}^{E^k} \\ k &\longmapsto f_p. \end{aligned}$$

Alors, il existe une sous suite $(g_{p_j})_j$ de $(g_p)_p$ qui converge vers un élément g de $\prod_{k \in \mathbb{N}} \overline{B}^{E^k}$.

Ainsi, $\forall k \in \mathbb{N}$, $g(0) = g(k) \in E^k$ et $(f_{p_j})_j$ converge vers $f \stackrel{\text{def}}{=} g^0$ dans E^k . D'où $f \in E^\infty$ et $(f_{p_j})_j$ converge vers f dans E^∞ . Ceci prouve que B est relativement compact dans E^∞ .

$(E^\infty, \mathcal{P}_\infty)$ un espace de Heine-Borel, c-à-d Toute partie fermée bornée est compact.

5. Supposons que $(E^k, \mathcal{P}_k)$ est normable. Donc il existe une norme $\|\cdot\|$ sur E^k telle que $\{x \in E \text{ tel que } \|x\| < 1\}$ est un ouvert de $(E^k, \mathcal{P}_k)$ contenant 0, d'où il existe $\varepsilon > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$, $K_1, \dots, K_n, m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}$ ($m_1 = \dots = m_n = k$ si $k \neq \infty$) tels que

$$\varepsilon \bigcap_{i=1}^n (p_{K_i, m_i} < 1) \subset \{x \in E \text{ tel que } \|x\| < 1\}.$$

Posons $K = K_1 \cup \dots \cup K_n \in \mathcal{K}$ et $m = m_1 + \dots + m_n$ alors

$$\varepsilon (p_{K, m} < 1) \subset \{x \in E^k \text{ tel que } \|x\| < 1\}.$$

Soit $x_K \in U \setminus K$ et $r_K = \frac{d(x_K, K)}{4} > 0$. Considérons la fonction

$$\begin{aligned} g_K: U &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \psi\left(\frac{\|x - x_K\|^2}{4r_K^2}\right) \end{aligned}$$

avec

$$\psi: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq 1 \\ e^{-\frac{1}{1-x}} & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a, $\forall t \in \mathbb{R}$, $p_{K, m}(tg_K) = 0$ donc $|t| \|g_K\| < 1$ d'où $g_K = 0$, en particulier $0 = g_K(x_K) = e^{-1}$, absurde.

Ainsi $(E^k, \mathcal{P}_k)$ n'est pas normable, pour tout $k \in \mathbb{N}$.

□

Corrigé de l'exercice 2.3.1

1. $\Rightarrow$ Triviale.

$\Leftarrow$ Soit $x_0 \in E$ et supposons que f est continue en x_0 .

Soit $x \in E$ (arbitraire!), soit $V \in \mathcal{V}_F(f(x))$ donc il existe $W \in \mathcal{V}_F(0)$ tel que $f(x) + W \subset V$, donc $f^{-1}(f(x_0) + W) \in \mathcal{V}_E(x_0)$, il existe alors $\Theta \in \mathcal{V}_E(0)$ tel que $x_0 + \Theta \subset f^{-1}(f(x_0) + W)$. Ainsi $f(x + \Theta) \subset V$, d'où la continuité de f en x .

2. Soit $B \subset E$ telle que B est bornée.

Soit $V \in \mathcal{V}_F(0)$ donc $f^{-1}(V) \in \mathcal{V}_E(0)$, ainsi il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall t \in \mathbb{K}, |t| \leq \alpha \Rightarrow tA \subset f^{-1}(V)$ d'où $tf(A) \subset V$ et par suite $f(A)$ est bornée dans F .

3. Notons $n = \dim_{\mathbb{K}} E$ et $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

Posons

$$\begin{aligned} \alpha_k: E &\longrightarrow \mathbb{K} & S: E^n &\longrightarrow E & g: E &\longrightarrow E^n \\ \sum_{i=1}^n t_i e_i &\longmapsto t_k & (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto x_1 + \dots + x_n & x &\longmapsto (\alpha_1(x)f(e_1), \dots, \alpha_n(x)f(e_n)). \end{aligned}$$

On a $f = S \circ g$, S est continue (récurrence) et g est continue si et seulement si $\forall k \in \{1, \dots, n\}$, $p_k \circ g = \psi \circ h_k$ est continue, où

$$\begin{aligned} \psi: \mathbb{K} \times E &\longrightarrow E & h_k: E &\longrightarrow \mathbb{K} \times E \\ (t, x) &\longmapsto tx & x &\longmapsto (\alpha_k(x), f(e_k)). \end{aligned}$$

Donc $f = S \circ g$ est continue si $\forall k \in \{1, \dots, n\}$, α_k est continue c-à-d

$$\alpha: E \longrightarrow \mathbb{K}^n \text{ est continue.} \\ \sum_{i=1}^n t_i e_i \longmapsto (t_1, \dots, t_n)$$

(On sait déjà que α est bijective linéaire et que α^{-1} est continue linéaire donc si α est continue alors E est séparé! il faut ajouter dans les hypothèses E séparé.) Et dans ce cas α est continue d'après le cours. et par suite f est continue. $\square$

Corrigé de l'exercice 2.3.2

1. $\Rightarrow$ 2. On a f continue et $\{0\}$ un fermé de $\mathbb{K}$ donc $\text{Ker}(f) = f^{-1}(\{0\})$ est fermé dans E .

2. $\Rightarrow$ 3. On a $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f) \neq E$ (car f est non nulle). Ainsi $\text{Ker}(f)$ n'est pas dense dans E .

3. $\Rightarrow$ 4. Soit donc un ouvert V de E tel que $V \cap \text{Ker}(f) = \emptyset$. Soit $v \in V$ et W un voisinage de 0 équilibré tel que $v + W \subset V$. Donc $\forall x \in W$, $f(x) \neq -f(v)$.

Supposons que $\exists x_0 \in W$ tel que $|f(x_0)| > |f(v)|$, donc $y_0 = \frac{-f(v)}{f(x_0)} x_0 \in W$ (car W est équilibré) d'où $f(y_0) \neq -f(v)$ c-à-d $f(v) \neq f(y_0)$, absurde. Ainsi

$$\forall x \in W, |f(x)| \leq |f(v)| \text{ et donc } f \text{ est bornée sur } W.$$

4. $\Rightarrow$ 1. Soit W un voisinage (équilibré ouvert!) de 0 et $M \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in W, |f(x)| \leq M$.

Soit $x_0 \in E$, soit $\varepsilon > 0$, On a $f(x_0 + \frac{\varepsilon}{M+1} W) \subset]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[$, donc f est continue en x_0 et puisque x_0 est arbitraire dans E alors f est continue sur E . $\square$

Corrigé de l'exercice 2.4.1

1) i) $\delta(x, y) = \sup_{i \in I} \delta_i(x, y) = \sup_{i \in I} \delta_i(y, x) = \delta(y, x)$.

ii) $\delta(x, x) = \sup_{i \in I} \delta_i(x, x) = 0$.

iii) $\delta(x, z) = \sup_{i \in I} \delta_i(x, z) \leq \sup_{i \in I} \delta_i(x, y) + \sup_{i \in I} \delta_i(y, z) = \delta(x, y) + \delta(y, z)$.

δ est un écart.

2) i) $\delta_f(x, y) = |f(x) - f(y)| = |f(y) - f(x)| = \delta_f(y, x)$.

ii) $\delta_f(x, x) = |f(x) - f(x)| = 0$.

iii) $\delta_f(x, z) = |f(x) - f(z)| \leq |f(x) - f(y)| + |f(y) - f(z)| = \delta_f(x, y) + \delta_f(y, z)$.

δ_f est un écart.

3) Posons $A_d = \{f : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ tel que } \forall x, y \in X, |f(x) - f(y)| \stackrel{\text{def}}{=} \delta_f(x, y) \leq d(x, y)\}$. On a trivialement $d \geq \sup_{f \in A_d} \delta_f$. Réciproquement, soit $x, y \in X$ et soit la fonction

$$\begin{aligned} g: X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto d(t, x), \end{aligned}$$

on a $g \in A_d$ car $\forall s, t \in X$

$$|g(t) - g(s)| = |d(t, x) - d(s, x)| \leq d(t, s). \quad (\text{grâce à l'inégalité triangulaire})$$

Donc $\sup_{f \in A_d} \delta_f(x, y) \geq |g(x) - g(y)| = d(x, y)$. On conclut que $d = \sup_{f \in A_d} \delta_f$.

4) i. Il est clair que $\forall x \in \emptyset, \exists \varepsilon > 0, J \subset \mathcal{P}$, finie $\bigcap_{\delta \in J} B_\delta(x, \varepsilon) \subset \emptyset$ donc $\emptyset \in \mathcal{T}_\mathcal{P}$ et il est aussi évident que $\forall x \in X, \exists \varepsilon > 0, J \subset \mathcal{P}$, finie $\bigcap_{\delta \in J} B_\delta(x, \varepsilon) \subset X$ d'où $X \in \mathcal{T}_\mathcal{P}$.

ii. Soit $U, V \in \mathcal{T}_\mathcal{P}$. Soit $x \in U \cap V$ donc

$$\exists \varepsilon' > 0, J \subset \mathcal{P}, \text{ finie } \bigcap_{\delta \in J'} B_\delta(x, \varepsilon') \subset U$$

et

$$\exists \varepsilon'' > 0, J'' \subset \mathcal{P}, \text{ finie } \bigcap_{\delta \in J''} B_\delta(x, \varepsilon'') \subset V.$$

Posons $\varepsilon = \min(\varepsilon', \varepsilon'')$ et $J = J' \cup J''$; on donc $\bigcap_{\delta \in J} B_\delta(x, \varepsilon) \subset U \cap V$ ce qui montre que $U \cap V \in \mathcal{T}_\mathcal{P}$.

iii. Soit $(U_k)_{k \in K}$ une famille d'éléments de $\mathcal{T}_\mathcal{P}$. Soit $x \in \bigcup_{k \in K} U_k$, donc il existe $k_x \in K$ tel que $x \in U_{k_x}$ d'où

$$\exists \varepsilon_x > 0, J_x \subset \mathcal{P}, \text{ finie } \bigcap_{\delta \in J_x} B_\delta(x, \varepsilon_x) \subset U_{k_x} \subset \bigcup_{k \in K} U_k,$$

nous obtenons $\bigcup_{k \in K} U_k \in \mathcal{T}_\mathcal{P}$.

$\mathcal{T}_\mathcal{P}$ est une topologie sur X associée à la famille d'écart $\mathcal{P}$.

Soit $y \in B_\delta(x, \varepsilon)$ donc $B_\delta(y, \varepsilon') \subset B_\delta(x, \varepsilon)$, avec $\varepsilon' = \varepsilon - \delta(x, y)$ d'où $B_\delta(x, \varepsilon) \in \mathcal{T}_\mathcal{P}$.

Remarque :

Posons $\Omega = \{B_\delta(x, \frac{1}{2^n}) ; \delta \in \mathcal{P}, x \in X, n \in \mathbb{N}\}$ et $\mathcal{B} = \{\bigcap_{\delta \in J} B_\delta(x, \frac{1}{2^n}) ; J \subset \mathcal{P} \text{ finie}, x \in X, n \in \mathbb{N}\}$. On a $\mathcal{T}_\mathcal{P}$ est engendrée par Ω et $\mathcal{B}$ est une base topologique de $\mathcal{T}_\mathcal{P}$ (tout ouvert est une réunion d'éléments de $\mathcal{B}$).

5) $\Rightarrow$) On a $B_\delta(x, \varepsilon) \in \mathcal{T}_\mathcal{P} \subset \mathcal{T}_{\mathcal{P}'}$, on termine la preuve par une utilisation simple de la définition de $\mathcal{T}_\mathcal{Q}$.

$\Leftarrow$) Soit $U \in \mathcal{T}_\mathcal{P}$, soit $x \in U$ donc $\exists \varepsilon > 0, J \subset \mathcal{P}$, finie $\bigcap_{\delta \in J} B_\delta(x, \varepsilon) \subset U$.

Soit, pour $\delta \in J, \varepsilon'_\delta > 0$ et $J'_\delta \subset K$ finie tels que

$$\bigcap_{\lambda \in J'_\delta} B_\lambda(x, \varepsilon'_\delta) \subset B_\delta(x, \varepsilon).$$

Posons $\varepsilon' = \min\{\varepsilon'_\delta ; \delta \in J\}$ et $J' = \bigcup_{\delta \in J} J'_\delta$ donc $\bigcap_{\lambda \in J'} B_\lambda(x, \varepsilon') \subset U$, ce qui donne $U \in \mathcal{T}_\mathcal{Q}$.

Remarque :

$$\mathcal{P} \subset \mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{T}_\mathcal{P} \subset \mathcal{T}_\mathcal{Q} \quad \text{et} \quad \mathcal{T}_\mathcal{P} \subset \mathcal{T}_\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{T}_{\mathcal{P} \cup \mathcal{Q}} = \mathcal{T}_\mathcal{Q}.$$

6) $\delta' = \alpha_\delta(1 \wedge \delta)$ est un écart :

i) $\delta'(x, y) = \alpha_\delta(1 \wedge \delta(x, y)) = \alpha_\delta(1 \wedge \delta(y, x)) = \delta'(y, x)$.

ii) $\delta'(x, x) = \alpha_\delta(1 \wedge \delta(x, x)) = \alpha_\delta(1 \wedge 0) = 0$

iii) Soit $\delta' = \alpha_\delta(1 \wedge \delta) \in \mathcal{Q}$. Supposons $\delta'(x, y) + \delta'(y, z) < \alpha_i$ donc $\delta'(x, y) = \alpha_\delta \delta(x, y)$ et $\delta'(y, z) = \alpha_\delta \delta(y, z)$ d'où

$$\delta'(x, z) \leq \alpha_\delta \delta(x, z) \leq \alpha_\delta \delta(x, y) + \alpha_\delta \delta(y, z) = \delta'(x, y) + \delta'(y, z).$$

On conclut que δ' est un écart.

$\mathcal{T}_\mathcal{P} = \mathcal{T}_\mathcal{Q}$: Soit $\delta \in \mathcal{P}$ et $\delta' = \alpha_\delta(1 \wedge \delta) \in \mathcal{Q}$. On a $B_{\delta'}(x, \alpha_\delta(1 \wedge \varepsilon)) \subset B_\delta(x, \varepsilon) \subset B_{\delta'}(x, \alpha_\delta \varepsilon)$ et d'après 5) on a $\mathcal{T}_\mathcal{P} = \mathcal{T}_\mathcal{Q}$.

7) i) Il suffit de voir que $B_\lambda(x, \alpha_\delta(1 \wedge \varepsilon)) \subset B_\delta(x, \varepsilon)$.

ii) Soit $x \in X$ et $\varepsilon > 0$. Posons $J' = \{\delta \in \mathcal{P} ; \alpha_\delta \geq \frac{\varepsilon}{2}\}$ et $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{\max_{\delta \in J'} \alpha_\delta}$.

Soit $t \in \bigcap_{\delta \in J'} B_\delta(x, \varepsilon')$, donc $\forall \delta \in J', \alpha_\delta(1 \wedge \delta(x, t)) < \alpha_\delta \varepsilon' \leq \frac{\varepsilon}{2}$, mais cette inégalité reste aussi vraie pour $\delta \ni nJ'$ car $\alpha_\delta(1 \wedge \delta(x, t)) \leq \alpha_\delta$. Ainsi $\lambda(x, t) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ et par conséquent $\bigcap_{\delta \in J'} B_\delta(x, \varepsilon') \subset B_\lambda(x, \varepsilon)$. Ce qui donne le résultat voulu.

8) Il suffit de remarquer que

$$\bigcap_{\delta \in J} B_\delta(x, \varepsilon) = B_\lambda(x, \varepsilon). \quad (\text{car } J \text{ est finie})$$

avec $\lambda = \sup_{\delta \in J} \delta$.

9) $\Rightarrow$) Il suffit d'utiliser la définition de limite pour $V = B_\delta(a, \frac{1}{2^n})$.

$\Leftarrow$) Soit $V \in \mathcal{V}_X(l)$ donc il existe $\varepsilon > 0$ et $J \subset \mathcal{P}$ finie tels que $\bigcap_{\delta \in J} B_\delta(l, \varepsilon) \subset V$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$ et soit, pour $\delta \in J$, $W_\delta \in \mathcal{V}_E(a)$ tel que $\forall x \in W \cap D, \delta(f(x), l) < \frac{1}{2^n}$. Pour finir la démonstration il suffit de prendre $W = \bigcap_{\delta \in J} W_\delta$. $\square$

Ch. 3 : Théorèmes classiques d'analyse fonctionnelle

Corrigé de l'exercice 3.1.1

Pour $k \in \mathbb{N}$, notons $T_k: l_{\mathbb{C}}^q \rightarrow \mathbb{C}$. On a $(T_k)_k$ est une suite de formes linéaires continues qui converge simplement et puisque $l_{\mathbb{C}}^q$ et $\mathbb{C}$ sont des espaces de Banach (donc de Fréchet) alors $(T_k)_k$ est équicontinue, d'après le théorème de Banach-Steinhaus. Ainsi il existe $\eta > 0$ tel que pour tous $(x_n)_n \in B_q(0, \eta)$ et $k \in \mathbb{N}$, on a $|T_k((x_n)_n)| < 1$. Ce qui permet de dire qu'il existe $C > 0$ (e.g. $C = \frac{2}{\eta}$) tel que pour tous $(x_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $k \in \mathbb{N}$,

$$\left| \sum_{n=0}^k a_n x_n \right| \leq C \|(x_n)_n\|_q.$$

Or $\forall n \in \mathbb{N}$, il existe $\theta_n \in \mathbb{R}$ tel que $a_n = |a_n|e^{i\theta_n}$. En mettant $e^{i\theta_n}|x_n|$ à la place de x_n dans l'inégalité précédente, on obtient pour tous $(x_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $k \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=0}^k |a_n| |x_n| \leq C \|(x_n)_n\|_q.$$

✓ Cas $p = 1$ (donc $q = +\infty$) : On obtient avec, $x_n = 1, \forall k \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=0}^k |a_n| \leq C$ et un passage à la limite permet de dire que $(a_n)_n \in l_{\mathbb{C}}^1$.

✓ Cas $p \in]1, +\infty[$ (donc $q \in]1, +\infty[$) : En prenant $x_n = \begin{cases} |a_n|^{p-1} & \text{si } n \leq k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$, nous avons $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=0}^k |a_n|^p \leq C \left(\sum_{n=0}^k |a_n|^{(p-1)q} \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\sum_{n=0}^k |a_n|^p \right)^{1-\frac{1}{p}}$$

ainsi $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=0}^k |a_n|^p \leq C^p.$$

Un passage à la limite permet de conclure que $(a_n)_n \in l_{\mathbb{C}}^p$.

✓ Cas $p = +\infty$ (donc $q = 1$) : Soit $m \in \mathbb{N}$ (arbitraire). Considérons la suite définie par $x_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$, nous avons pour $k = m, |a_m| \leq C$. Donc $(a_n)_n \in l_{\mathbb{C}}^{\infty}$. □

Corrigé de l'exercice 3.1.2

1. Par définition la continuité implique la continuité en $(0,0)$ et la continuité en $(0,0)$ implique l'existence d'un voisinage V dans $E \times F$ de $(0,0)$ (topologie produit) tel que $\forall (t,s) \in V, \|f(t,s) - f(0,0)\| = \|f(t,s)\| < 1$. Mais il existe $\eta > 0$ tel que $B_E(0, \eta) \times B_F(0, \eta) \subset V$. Ainsi pour tout $(x,y) \in E \times F$ et pour tout $\varepsilon > 0$, on a $(\frac{\eta}{\|x\|+\varepsilon}x, \frac{\eta}{\|y\|+\varepsilon}y) \in B_E(0, \eta) \times B_F(0, \eta) \subset V$ donc

$$\|f(\frac{\eta}{\|x\|+\varepsilon}x, \frac{\eta}{\|y\|+\varepsilon}y)\| < 1.$$

En utilisant la bilinéarité de f , on a $\|f(x,y)\| < \frac{1}{\eta}(\|x\|+\varepsilon)(\|y\|+\varepsilon)$. En tendant $\varepsilon \rightarrow 0$, on obtient $\exists C > 0$,

$$\forall (x,y) \in E \times F, \|f(x,y)\| \leq C \|x\| \|y\|.$$

Montrons maintenant que cette dernière inégalité implique la continuité de f . Pour cela soit $(x_0, y_0) \in E \times F$. soit $\varepsilon > 0$. Posons $\eta = \frac{\varepsilon}{C(1+\|x_0\|+\|y_0\|)} \wedge 1$. On a donc $\forall (x,y) \in B_E(x_0, \eta) \times B_F(y_0, \eta)$,

$$\|f(x,y) - f(x_0, y_0)\| = \|f(x - x_0, y - y_0) + f(x_0, y - y_0) + f(x - x_0, y_0)\| < C(\eta^2 + \|x_0\|\eta + \|y_0\|\eta) \leq \varepsilon.$$

Remarque : Pour cette question la complétude ne sert à rien. On a besoin seulement de la bilinéarité ...

2. $\Rightarrow$: Supposons que f est continue en (x_0, y_0) . Donc pour tout voisinage V de $f(x_0, y_0)$ dans G il existe U_E, U_F voisinage respectivement de x_0 dans E et de y_0 dans F tels que pour tout $(x,y) \in U_E \times U_F, f(x,y) \in V$. En particulier, pour tout $x \in U_E, f(x, y_0) \in V$ et pour tout $y \in U_F, f(x_0, y) \in V$. Ainsi f est séparément continue en (x_0, y_0) .

Remarque : cette implication est vraie sans que f soit bilinéaire ni E complet, on a besoin seulement que $E \times F$ soit muni de sa topologie produit.

$\Leftrightarrow$: Pour $y \in F$, notons $T_y = f(\cdot, y) : E \rightarrow G$ l'application définie $T_y(x) = f(x, y)$. On a pour tout $y \in F$, T_y est linéaire continue (continuité en x en fixant y par hypothèse) et la continuité en y en fixant x implique que pour tout $x \in E$, $\Gamma(x) \stackrel{\text{def}}{=} \{T_y(x), y \in B_F(0,1)\}$ est bornée dans G . Or E est un espace de Fréchet, donc d'après le théorème de Banach-Steinhaus, la famille $(T_y)_{y \in B_F(0,1)}$ est équicontinue. Ainsi il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in B_E(0, \eta)$, pour tout $y \in B_F(0,1)$, on a $T_y(x) = f(x, y) \in B_G(0,1)$. Par la même méthode vue en haut, on a l'existence d'un $C > 0$ tel que

$$\forall (x, y) \in E \times F, \|f(x, y)\| \leq C \|x\| \|y\|.$$

3. On a f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (de classe C^∞ même!) donc séparément continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et $0,4 = f(2,1) \neq 2f(1,1) = 1$ donc f n'est pas bilinéaire.

D'autre part les fonctions partielles en $(0,0)$ sont constantes donc continues. Ainsi f est séparément continue sur $\mathbb{R}^2$. De plus pour tout $x \neq 0$, $f(x, x) = 0,5$, ce qui montre que f n'est pas continue sur $(0,0)$.

Moralité : En général, on n'a pas l'équivalence de 2. si f n'est pas bilinéaire

4. Il est clair que f est linéaire en chacune de ses variables en plus elle est symétrique. De plus $|f(x, y)| \leq \|x\|_1 \|y\|_\infty$, ce qui montre que f est séparément continue. D'autre part si f est continue alors il existe $C > 0$ tel que $\forall x \in E \quad \|f(x, x)\| \leq C \|x\|_1^2$. En particulier, pour la suite $(x_n)_n$ définie par $x_n(t) = t^n$ on a $\forall n, \frac{1}{2n+1} \leq C \frac{1}{(n+1)^2}$. Un passage à la limite après la multiplication par $2n+1$ donne $1 \leq 0$, absurde. Ainsi f n'est pas continue.

Moralité : En général, on n'a pas l'équivalence de 2. si E n'est pas un espace de Fréchet.

□

Corrigé de l'exercice 3.1.3

On a $(T_a)_{a \in A}$ est une famille d'applications linéaires continues sur l'espace de Banach E' muni de sa norme usuelle (donc de Fréchet). De plus, pour tout $f \in E'$, $\{T_a(f), a \in A\} = f(A)$ est bornée dans $\mathbb{K}$. D'après le théorème de Banach-Steinhaus, $(T_a)_{a \in A}$ est équicontinue, donc il existe $\eta > 0$, tel que $\forall f \in B_{E'}(0, \eta)$, $\forall a \in A$, $|T_a(f)| < 1$. Ainsi, $\forall a \in A$, $\|a\| = \sup_{f \in B_{E'}(0,1)} |f(a)| \leq \frac{2}{\eta}$. □

Corrigé de l'exercice 3.1.4

1. On a, d'après l'inégalité de Hölder, $\forall g \in L^q, |T_f(g)| \leq \|f\|_p \|g\|_q$ donc $\|T_f\| \leq \|f\|_p$.

D'autre part, $g_f \stackrel{\text{def}}{=} (1_{(f>0)} - 1_{(f \leq 0)})|f|^{p-1} \in L^q$, donc $\|f\|_p^p = |T_f(g_f)| \leq \|T_f\| \|g_f\|_q = \|T_f\| \|f\|_p^{1-\frac{1}{p}}$ d'où $\|T_f\| = \|f\|_p$.

2. On a pour tout $k \in \mathbb{N}$, T_k est linéaire continue sur l'espace de Banach (donc de Fréchet) L^q muni de sa norme usuelle. De plus, $\forall g \in L^q, \{T_k(g), k \in \mathbb{N}\}$ est bornée dans $\mathbb{R}$ puisque $\forall k \in \mathbb{N}, |T_k(g)| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f g|$. Donc on peut appliquer le théorème de Banach-Steinhaus qui donne l'existence d'un $C > 0$ tel que

$$\forall g \in L^q, \forall k \in \mathbb{N}, \int_{\mathbb{R}^d} f_k g \leq C \|g\|_q.$$

Or $g_k \stackrel{\text{def}}{=} (1_{(f>0)} - 1_{(f \leq 0)})|f_k|^{p-1} \in L^q$, donc $\int_{\mathbb{R}^d} |f_k|^p \leq C^p$. Une application de lemme de Fatou (ou beppo-Levi) nous donne $f \in L^p$. □

Corrigé de l'exercice 3.1.5

1. T_y^x est linéaire :

$$T_y^x(tf + sg) = \frac{(tf + sg)(y) - (tf + sg)(x)}{y - x} = t \frac{f(y) - f(x)}{y - x} + s \frac{g(y) - g(x)}{y - x} = t T_y^x(f) + s T_y^x(g).$$

T_y^x est continue :

$$|T_y^x(f)| \leq \frac{2}{|y - x|} \|f\|_\infty.$$

2. Soit $x \in I$, soit $f \in F$. On a f est dérivable en x donc il existe $\eta > 0$ tel que $\forall y \in I \setminus \{x\}$,

$$|y - x| < \eta \implies |T_y^x(f)| < 1 + |f'(x)|.$$

Donc $\forall y \in I \setminus \{x\}$,

$$|T_y^x(f)| \leq 1 + |f'(x)| + \frac{2}{\eta} \|f\|_\infty.$$

D'où $\forall f \in F$, $(T_y^x(f))_{y \in I \setminus \{x\}}$ est bornée. Ainsi les hypothèses pour appliquer le théorème de Banach-Steinhaus sont vérifiées ce qui nous donne $(T_y^x)_{y \in I \setminus \{x\}}$ est équicontinue c-à-d il existe un $\theta_x > 0$ tel que

$$\forall f \in B_F(0, \theta_x), \forall y \in I \setminus \{x\}, |T_y^x(f)| < 1.$$

En prenant $C_x = \frac{1}{\theta_x}$, on obtient

$$\forall f \in F, \forall y \in I, |f(y) - f(x)| \leq C_x \|f\|_\infty |y - x|.$$

3. Fixons $\varepsilon > 0$ (arbitraire), pour $x \in I$, notons $U_x =]x - \frac{\varepsilon}{8C_x}, x + \frac{\varepsilon}{8C_x}[$.

i. On a $I \subset \bigcup_{x \in I} U_x$ et I compact alors il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \dots, x_n \in I$ tels que $I \subset U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_n}$.

ii.

✓ Soit $j \in J$, soit $f \in \Theta_j$, soit $y \in I$ donc il existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $y \in U_{x_i}$ d'où $|f(y) - f_j(y)| \leq |f(y) - \frac{j_i}{k}| + |f_i(y) - \frac{j_i}{k}| < \frac{\varepsilon}{2}$ donc $\|f - f_j\|_\infty < \varepsilon$. Ce qui prouve que $\Theta_j \subset B_F(f_j, \varepsilon)$.

✓ Soit $f \in B_F(0, 1)$, soit $i \in \{1, \dots, n\}$ et $y \in U_{x_i}$. On a $f(x_i) \in]-1, 1[\subset \bigcup_{q=-k}^k [\frac{q}{k}, \frac{q+1}{k}[$ donc il existe $j_i \in \{-k, \dots, k\}$ tel que $|f(x_i) - \frac{j_i}{k}| < \frac{1}{k}$.

On obtient $|f(y) - \frac{j_i}{k}| \leq |f(y) - f(x_i)| + |f(x_i) - \frac{j_i}{k}| \leq C_{x_i} \|f\|_\infty |y - x_i| + \frac{1}{k} < \frac{\varepsilon}{4}$, donc $f \in \Theta_j$ avec $j = (j_1, \dots, j_n)$ et donc $j \in J$ et $f \in B_F(f_j, \varepsilon)$.

Ainsi,

$$B_F(0, 1) \subset \bigcup_{j \in J} B_F(f_j, \varepsilon).$$

4. La question précédente montre que $B_F(0, 1)$ est un voisinage de 0 précompact (totalement borné) de l'espace vectoriel normé F (donc un evt séparé). D'après le cours ou le théorème de Riesz, F est de dimension finie. $\square$

Corrigé de l'exercice 3.2.1

f est un polynôme tel que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ donc f est continue surjective. D'autre part, $f(]0, +\infty[) = [-1, +\infty[$, d'où f n'est pas ouverte. $\square$

Corrigé de l'exercice 3.2.2

i. $\Rightarrow$: Triviale! Soit $V \in \mathcal{V}_E(0)$ donc il existe un ouvert Θ de E tel que $0 \in \Theta \subset V$ donc $f(0) = 0 \in f(\Theta) \subset f(V)$ et puisque $f(\Theta)$ est un ouvert de F alors $f(V)$ est un voisinage de 0 dans F c-à-d $f(V) \in \mathcal{V}_F(0)$.

$\Leftarrow$: Soit Θ un ouvert de E . Soit $y \in f(\Theta)$ donc il existe $x \in \Theta$ tel que $y = f(x)$. Or $\Theta - x \in \mathcal{V}_E(0)$ donc $f(\Theta - x) \in \mathcal{V}_F(0)$ d'où $f(\Theta)$ est un voisinage de y dans F . Mais y est quelconque dans $f(\Theta)$. On obtient, f est ouverte.

ii. On E est un sous espace vectoriel ouvert de E donc $f(E)$ est un sous espace vectoriel ouvert de F puisque f est linéaire ouverte. Alors $f(E) = F$ car les ouverts d'un EVT sont absorbants. $\square$

Corrigé de l'exercice 3.2.3

[Déjà vu en cours]

On a E est un espace de Fréchet en particulier et F est un EVT. Aussi $T(E) = F$ n'est pas maigre (F est un espace de Baire!). Encore, on a T est linéaire continue donc d'après le théorème de l'application ouverte T est ouverte ainsi T^{-1} est continue. $\square$

Corrigé de l'exercice 3.2.4

1. On a la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 dans $\mathbb{R}$ donc elle est bornée, posons $M = \max_n \alpha_n$. Donc $\|T((x_n)_{n \in \mathbb{N}})\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |\alpha_n x_n| \leq M \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n| = M \|(x_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_1 < \infty$. Ainsi T est bien définie et continue si elle est linéaire.

Soit $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E = l^1$ et $s, t \in \mathbb{C}$. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$(T(tx + sy))_n = \alpha_n (tx + sy)_n = t\alpha_n x_n + s\alpha_n y_n = t(T(x))_n + s(T(y))_n,$$

Ceci prouve la linéarité de T .

Soit $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E = l^1$ telle que $T(x) = 0_{l^1} = 0$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, \alpha_n x_n = 0_{\mathbb{C}}$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = 0$ puisque $\alpha_n \neq 0$. Ainsi, on a T est injective.

2. Supposons que T est surjective alors T est bijective et d'après le théorème de l'application ouverte, la fonction réciproque

$$T^{-1}: \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} & \longmapsto & (\alpha_n^{-1} x_n)_{n \in \mathbb{N}}. \end{array}$$

est continue. Donc il existe $C > 0$ tel que $\forall x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E = l^1$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n^{-1} |x_n| \leq C \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|.$$

Soit $k \in \mathbb{N}$ et notons $(x_n)_n$ la suite définie par $x_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Donc $(x_n)_n \in E$ et $\alpha_k^{-1} \leq C$, Absurde car k est arbitraire

et la suite $(\alpha_n)_n$ converge vers 0.

Donc T n'est pas surjective.

3. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E \setminus T(E)$. Supposons que $\sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n^{-1} |u_n| < \infty$, alors $(\alpha_n^{-1} u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} = T((\alpha_n^{-1} u_n)_{n \in \mathbb{N}}) \in T(E)$,

absurde. Donc $\sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n^{-1} |u_n|$ diverge.

Remarque : En posant $v_n = \alpha_n^{-1} |u_n|$, on a $\sum_n v_n$ diverge et $\sum_n \alpha_n v_n$ converge. $\square$

Corrigé de l'exercice 3.2.5

On a L^2 est un espace de Fréchet (c'est même un espace d'Hilbert), L^1 en espace vectoriel topologique séparé (c'est même un espace de Banach!), de plus l'application $i : L^2 \rightarrow L^1$; $x \mapsto x$ est linéaire continue. Donc d'après le théorème de l'application ouverte, si $L^2 = i(L^2)$ n'est pas maigre alors i est ouverte (mais ça ce n'est pas important pour cet exercice) et surjective (ça c'est important) d'où $L^2 = L^1$. Or la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}} 1_{]0,1]}$ est dans L^1 mais pas dans L^2 , absurde. Donc L^2 est maigre dans L^1 . $\square$

Corrigé de l'exercice 3.2.6

On a $Id_E : (E, \|\cdot\|_2) \rightarrow (E, \|\cdot\|_1)$ une application linéaire bijective continue (donc il existe $c > 0$ tel que $\|\cdot\|_1 \leq c \|\cdot\|_2$). De plus $(E, \|\cdot\|_2), (E, \|\cdot\|_1)$ sont deux espaces de Banach (donc de Fréchet), donc, d'après le théorème de l'application ouverte, $Id_E^{-1} = Id_E : (E, \|\cdot\|_1) \rightarrow (E, \|\cdot\|_2)$ est continue d'où il existe $C > 0$ tel que $\|\cdot\|_2 \leq C \|\cdot\|_1$, ceci implique que $\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_1$ et par suite $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$, en d'autres termes $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_1$ sont normes équivalentes sur E . $\square$

Corrigé de l'exercice 3.2.7

On a $T(x) = 0 \implies \|x\| \leq 0 \implies x = 0$, donc T est injective.

Soit $(y_n)_n$ une suite d'éléments de ImT qui converge vers un élément $y \in F$ dans F . Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $x_n \in E$ tel que $y_n = T(x_n)$. Avec l'hypothèse qu'on a sur T , on retrouve que la suite $(x_n)_n$ est suite de Cauchy dans E et puisque ce dernier est complet, il existe $x \in E$ tel que $(x_n)_n$ converge vers x dans E . La continuité de T nous affirme que $y = T(x) \in ImT$. Par conséquent, ImT est fermé.

Remarque : Une démonstration directe sans les GRANDS THÉORÈME!?? $\square$

Corrigé de l'exercice 3.3.1

1. On a $f(0) = 0$ donc $0 = 0_{E \times F} = (0_E, 0_F) = (0, 0) \in G_f$ et pour tous $(x, y), (x', y') \in G_f$ et tous $s, t \in \mathbb{K}$, on a

$$t(x, y) + s(x', y') = (tx + sx', ty + sy') = (tx + sx', tf(x) + sf(x')) = (tx + sx', f(tx + sx')) \in G_f$$

donc G_f est un sous espace vectoriel de $E \times F$ (rq : pas besoin de la topologie!).

2. Soit $(x, y) \in G_f^c \stackrel{\text{def}}{=} E \times F \setminus G_f$. Donc, $f(x) \neq y$ et puisque F est séparé il existe $U \in \mathcal{V}_F(f(x))$ et $V \in \mathcal{V}_F(y)$ tels que $U \cap V = \emptyset$, mais f est continue donc $f^{-1}(U) \in \mathcal{V}_E(x)$ et par suite $(x, y) \in f^{-1}(U) \times V \subset G_f^c$. Ce qui prouve que G_f^c est un ouvert de $E \times F$ c-à-d G_f est fermé (rq : pas besoin de la structure vectorielle!).

3. Soit $(x, y) \in G_f^c$, donc $x \neq y$ d'où $|x - \frac{|x-y|}{2}, x + \frac{|x-y|}{2}| \times \{y\} \subset G_f^c$ c-à-d G_f est fermé.

D'autre part $f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$ qui n'est pas un ouvert de $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ alors que $\{0\}$ est un ouvert de $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$, donc f n'est pas continue. $\square$

rq : On ne peut pas appliquer le théorème du graphe fermé car $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ n'est pas vectoriel!.

Corrigé de l'exercice 3.3.2

$\Rightarrow$: cette implication est évidente car la composée de deux fonctions continues est continue.

$\Leftarrow$: Supposons que le graphe G_T de T n'est pas fermé dans $E \times F$ donc il existe $(x, y) \in G_T$ tel que $(x, y) \notin G_T$ d'où $a = y - T(x) \neq 0$, ainsi il existe $f \in F'$ (problème d'existence-voir plus bas) telle que $f(a) = 1$ donc $f(T(x)) \neq f(y)$ par suite il existe un voisinage U de $f \circ T(x)$ dans F et un voisinage V de $f(y)$ dans F tels que $V \cap U = \emptyset$

Or $W \stackrel{\text{def}}{=} (f \circ T)^{-1}(U) \times f^{-1}(V)$ est un voisinage de (x, y) dans $E \times F$ puisque $f \circ T$ et f sont continues. D'où l'existence de $z \in E$ tel que $(z, T(z)) \in W$ c-à-d $f \circ T(z) \in V \cap U = \emptyset$, ce qui est absurde. Ainsi G_T est fermé et grâce au théorème du graphe fermé T est continue. $\square$

Remarque : Soit V un ouvert convexe équilibré dans F tel que $a \notin V$. Notons :

✓ p la fonction de Minkowski associée à V à savoir $p(x) = \inf\{s > 0, x \in sV\}$. On sait que p est une semi-norme et $V = \{x \mid p(x) < 1\}$ (donc p est continue).

✓ $G = \mathbb{K}a$ et $g : G \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(ta) = \Re(t)$. On a $\forall x \in G, g(x) \leq p(x)$.

D'après le théorème de Hahn-Banach, il existe un prolongement linéaire h à E de g tel que $\forall x \in E, h(x) \leq p(x)$. Notons

$$f : E \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \longmapsto \begin{cases} h(x) & \text{si } \mathbb{K} = \mathbb{R} \\ h(x) - ih(ix) & \text{si } \mathbb{K} = \mathbb{C}, \end{cases}$$

On a $f \in F'$ puisque $|f| \leq p$ et $f(a) = 1$

Corrigé de l'exercice 3.3.3

1. Soit $(x_n, T(x_n))_n$ une suite de graphe de T qui converge vers (x, y) dans $H \times H$, donc pour tout $h \in H$, $(\langle Tx_n, h \rangle)_n = (\langle x_n, Th \rangle)_n \rightarrow \langle x, Th \rangle = \langle Tx, h \rangle$ et $(\langle Tx_n, h \rangle)_n \rightarrow \langle y, h \rangle$ ce qui donne pour tout $h \in H$, $\langle Tx, h \rangle = \langle y, h \rangle$ et par suite $Tx = y$ ce qui montre que le graphe de l'application linéaire T est fermé. De plus H est un espace d'Hilbert donc un espace de Banach ... de Fréchet, on peut dire grâce au théorème du graphe fermé que T est continue.

2. On a

$$\begin{aligned} \left(\langle T(x+y), x+y \rangle - \langle T(x-y), x-y \rangle \right) &= 2 \left(\langle Tx, y \rangle + \langle Ty, x \rangle \right) \\ \left(\langle T(x+iy), x+iy \rangle - \langle T(x-iy), x-iy \rangle \right) &= 2 \left(\langle Tx, iy \rangle + \langle iTy, x \rangle \right) = -2i \left(\langle Tx, y \rangle - \langle Ty, x \rangle \right) \end{aligned}$$

pour tous $x, y \in H$,

$$4 \langle Tx, y \rangle = \left(\langle T(x+y), x+y \rangle - \langle T(x-y), x-y \rangle \right) + i \left(\langle T(x+iy), x+iy \rangle - \langle T(x-iy), x-iy \rangle \right).$$

De même, on a pour tous $x, y \in H$,

$$4 \langle x, Ty \rangle = \left(\langle x+y, T(x+y) \rangle - \langle x-y, T(x-y) \rangle \right) + i \left(\langle x+iy, T(x+iy) \rangle - \langle x-iy, T(x-iy) \rangle \right).$$

Or $\forall z \in H, \langle Tz, z \rangle = \overline{\langle z, Tz \rangle} = \langle z, Tz \rangle$. Ainsi, pour tous $x, y \in H, \langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle$.

D'après la question 1., T est continue. $\square$

Corrigé de l'exercice 3.3.4

1. On a $F \subset L^\infty \subset L^p \subset L^1$ et l'injection canonique de $L^p \rightarrow L^1$ est continue. Donc F est un sous espace vectoriel fermé de L^p .

2. Soit $(f_n, g_n)_n$ une suite d'éléments de $F \times L^\infty$ qui converge vers (f, g) de $F \times L^\infty$ avec F muni de la norme $\|\cdot\|_{L^2}$, ceci donne $f = g$ dans L^∞ . De plus F et L^∞ sont des espaces de Banach (donc de Fréchet). En appliquant le théorème du graphe fermé, i est linéaire continue de $(F, \|\cdot\|_2) \rightarrow (L^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ et par conséquent, il existe $C > 0$ tel que $\forall f \in F, \|f\|_\infty \leq C \|f\|_2$.

3. Soit $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ une famille de F orthonormée avec le produit scalaire de L^2 .

i. Soit $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, on a $\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i \in F$ donc

$$\mu \left(\left| \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i \right| > C \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i \right\|_2 = C \|\alpha\|_{\mathbb{R}^n} \right) = 0.$$

Posons

$$X' = \bigcap_{\alpha \in \mathbb{Q}^n} \left(\left| \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i \right| \leq C \|\alpha\|_{\mathbb{R}^n} \right).$$

On a $\mu(X') = 1$ (pourquoi?). Donc si $x \in X'$ alors

$$\forall \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Q}^n, \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(x) \leq C \|\alpha\|_{\mathbb{R}^n}.$$

Mais $\mathbb{Q}^n$ est dense dans $\mathbb{R}^n$, d'où

$$\forall \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(x) \leq C \|\alpha\|_{\mathbb{R}^n}.$$

En particulier pour $\alpha_i = f_i(x)$, on trouve

$$\forall x \in X', \quad \sum_{i=1}^n f_i^2 \leq C^2 \quad \mu - pp.$$

ii. En intégrant l'inégalité de la question i., on obtient $n \leq C^2$. En déduire que la dimension de F ne peut pas dépasser C^2 . $\square$

Corrigé de l'exercice 3.3.5

1. Pour $k, n \in \mathbb{N}^*$, notons $F_{n,k} \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in F; \int_{[0,1]} |f|^{1+\frac{1}{k}} \leq n\}$.

Soit $(f_m)_m$ une suite d'éléments de $F_{n,k}$ qui converge vers f dans F donc dans L^1 . Le lemme de Fatou, nous donne

$$\int_{[0,1]} |f|^{1+\frac{1}{k}} \leq \liminf_m \int_{[0,1]} |f_m|^{1+\frac{1}{k}} \leq n.$$

Donc $f \in F_{n,k}$, d'où $F_{n,k}$ est fermé dans F .

Soit $f \in F$, donc il existe $p_f > 1$ tel que $f \in L^{p_f}$, soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $p_f > 1 + \frac{1}{k}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\int_{[0,1]} |f|^{p_f} \leq n$ (Archimède!) ainsi

$$f \in F_{n,k} \subset \bigcup_{(n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*} F_{n,k}.$$

On a donc $F = \bigcup_{(n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*} F_{n,k}$.

2. On a F est un espace de Banach donc de Baire, ainsi il existe $(n_0, k_0) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que $F_{n_0, k_0} \neq \emptyset$ donc il existe f_0 et $r > 0$ tels que

$$B_F(f_0, r) = \{f \in F, \int_{[0,1]} |f - f_0| < r\} \subset F_{n_0, k_0}.$$

Soit $f \in F$, soit $\varepsilon > 0$ donc $\frac{r}{\|f\|_1 + \varepsilon} f + f_0 \in B_F(f_0, r)$ donc, avec $p = 1 + k_0^{-1}$ et en tendant $\varepsilon \rightarrow 0^+$, on a

$$\forall f \in F, \|f\|_p \leq \frac{2n_0^{\frac{1}{p}}}{r} \|f\|_1 \leq C \|f\|_1.$$

En particulier, $F \subset L^p$. $\square$

Ch. 4 : Topologies faibles Espaces réflexifs



Bonne chance pour les examens

