محتوى المحاضرة رقم 04

3-الخطأ المعياري للتقدير

إذا كان الانحراف المعياري يقيس لنا التشتت حول المتوسط .فإن الخطأ المعياري للتقدير يقيس لنا التشتت حول خط الانحدار سوى انحدار Y/X أو X/Y بمعنى أخر هو المقياس الذي يقيس لنا درجة دقة نموذج الانحدار في تمثيل العلاقة بين X و Y تمثيلا رياضيا فكلما صغر الخطأ المعياري للتقدير كلما دل على أن النموذج التقديري يمثل تمثيل صادقا للعلاقة بين المتغيرين والعكس كلما كبر الخطأ المعياري للتقدير ونرمز له بالرمز S ويحسب الصيغة الآتية :

$$\boldsymbol{S^2} = \frac{\sum_i^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{N-2} = \frac{\sum_i^n e_i^2}{N-2}$$

مثال: اوجد الخطأ المعياري للتقدير وفسر معناه في المثال السابق

Ŷ	45.64	50.01	57.05	61.16	68.46	79.87	91.28	102.69	/
e =Y-Ŷ	−5.66	0.22−	2.92	3.36	1.51	0.10	0.69	2.71−	0
e^2	32.03	0.04	8.52	11.28	2.28	0.01	0.47	7.34	62.01

$$S^2 = \frac{\sum_i^n e_i^2}{N-2} = 10.33 \qquad S=3.21$$

تفسير قيمة الخطأ المعياري للتقدير

أي انحرافات القيم الفعلية عن المقدرة بلغت في المتوسط 3.21 وبمعنى أخر

أن مجموع مربعات هذه الأخطأ اصغر من مجموع مربعات الأخطأ في أي مستقيم أخر

المحور الثالث

1-الطريقة المختصرة لحساب المعالم التقديرية والخطأ المعياري

1-1-المعالم التقديرية بطريقة المختصرة

لدينا $S_x = \sum_i^n (X_i - \bar{X})^2 = \sum_i^n \boldsymbol{X_i^2} - \mathbf{n}\bar{X}^2$

$$S_y = \sum_i^n (Y_i - \bar{Y})^2 = \sum_i^n Y_i^2 - n\bar{Y}^2$$

$$S_{yx} = \sum_i^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) = \sum_i^n XY - n\bar{X}\bar{Y}$$

$$\hat{B} = \frac{\sum_i^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_i^n (X_i - \bar{X})} = \frac{S_{YX}}{S_X}$$

$$\hat{A} = \bar{Y} - \hat{B}\bar{X}$$

1-2-الخطأ المعياري بطريقة المختصرة

$$S^2 = \frac{\sum_i^n e_i^2}{n-2} = \frac{S_Y - \hat{B}S_{YX}}{n-2}$$

مثال: لدينا البيانات الآتية عن متغيرين X ، Y

X	Y
2	20
3	30
3	25
5	35
7	40

المطلوب:

احسب بطريقة المختصرة معادلة التقدير والخطأ المعياري

الجواب

1-حساب معادلة التقدير

$Y_i - \bar{Y}(X_i - \bar{X})$	$(Y_i - \bar{Y})^2$	$Y_i - \bar{Y}$	$(X_i - \bar{X})^2$	$X_i - \bar{X}$	X	Y
20	100	10−	4	2−	2	20
0	0	0	1	1−	3	30
5	25	5−	1	1−	3	25
5	25	5	1	1	5	35

30	100	10	9	3	7	40
60	250	/	16	/	20	150

$$\hat{B} = \frac{\sum_i^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_i^n (X_i - \bar{X})} = 3.75$$

$$\hat{A} = \bar{Y} - \hat{B}\bar{X} = 15$$

$$\hat{Y}_{\mathrm{i}} = 15 + 3.75X_i$$

2-الخطأ المعياري للتقدير

$$S^2 = \frac{S_Y - \hat{B}S_{YX}}{n-2} = 8.33 \qquad \mathrm{S} = \sqrt{8.33} = 2.88$$

3-الخطأ المعياري للقيم المقدرة $\boldsymbol{\hat{A}}$ ، $\boldsymbol{\hat{B}}$

إن القيم المقدرة $\hat{A}$ ، $\hat{B}$ تتغير من عينة على أخرى ومن باحث إلى أخر ولقياس درجة دقة التقديرات $\hat{A}$ ، $\hat{B}$ واستخدامها في المعادلة التقديرية لتنبؤ بقيمة المتغير التابع نستخدم ما يسمى الخطأ المعياري لكل من $\boldsymbol{\hat{A}}$ ، $\boldsymbol{\hat{B}}$ وكلما صغر هذا الخطا لـــ$\boldsymbol{\hat{A}}$ ، $\boldsymbol{\hat{B}}$ دل على جودة التقدير والخطا المعياري لـــ$\boldsymbol{\hat{A}}$ ، $\boldsymbol{\hat{B}}$ يعطي بالصيغة الاتية:

الخطأ المعياري لـــ$\boldsymbol{\hat{A}}$ $$S_{\hat{A}}^2 = S^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{S_x}\right]$$

الخطأ المعياري لـــ$\boldsymbol{\hat{B}}$ $$S_{\hat{B}}^2 = \frac{S^2}{S_X}$$

مثال: نفس المثال السابق

المطلوب احسب الخطأ المعياري للقيم التقديرية $\hat{A}$ ، $\hat{B}$

الجواب

الخطأ المعياري لـــ$\boldsymbol{\hat{A}}$ $$S_{\hat{A}}^2 = 8.33\left[\frac{1}{5} + \frac{(4)^2}{16}\right] = 9.996 \qquad S_{\hat{A}} = \sqrt{9.996} = 3.161$$

الخطأ المعياري لـــ$\boldsymbol{\hat{B}}$ $$S_{\hat{B}}^2 = \frac{8.33}{16} = 0.52 \qquad S_{\hat{B}} = 0.721$$

4-اختبار معنوية معالم معادلة الانحدار $\hat{A}$ ، $\hat{B}$

يعتبر اختبار معنوية المعالم التقديرية من المواضيع الأساسية في قياس العلاقة بين الظواهر واستخدامها في التنبؤ وتتمثل عملية اختبار معنوية المعالم باختبار الفرق بين المتحصل عليها من العينة والمعلمة الحقيقية المجهولة (المبحوث عنها) وتنطوي عملية اختبار معنوية المعالم حول مساواة أي معلمة من معالم المجتمع المبحوث عنها A ، B لقيمة معينة يطلق عليها فرضية العدم أي يتصور الباحث في هذا الفرض انه لايوجد اختلاف بين قيمة معلمة المجتمع المجهولة والقيمة المفترضة ونرمز لها بالرمز H_0 وتكتب:

H_0 : A=0 أو B=0

أو أي قيمة مفترضة H_0 : A=1 أو B=5

وبما أن الفرض H_0 خاضع للاختبار فانه لايكون بالضرورة صحيح وهذا يتطلب وضع فرض بديل في حالة عدم صحة الاول ونرمزلها بالرمز H_1 ويكتب :

H_1 : A≠0 أو B≠0

H_1 : A≠1 أو B≠5

ويستخدم الباحث لاختبار الفروض إما التوزيع الطبيعي في حالة $n \geq 30$ أو توزيع ستيودنت في حالة $n<30$

5-طريقة استخدام الخطأ المعياري للتقديرات $\hat{A}$ ، $\hat{B}$

نقوم هذه الطريقة في عملية الاختبار بمقارنة الخطأ المعياري لأي تقدير بقيمتها التقديرية كما يلي :

1-عندما يكون الخطأ المعياري لأي تقدير اقل أو يساوي من نصف القيمة المقدرة أي:

$S_{\hat{\theta}} \leq \frac{\hat{\theta}}{2}$ يعني الخطأ صغير نسبيا .وبالتالي القيمة المقدرة لها معنوية احصائية أي نرفض فرضية العدم ونقبل بالفرضية البديلة.

1-عندما يكون الخطأ المعياري لأي تقدير اكبر من نصف القيمة المقدرة أي $S_{\hat{\theta}} > \frac{\hat{\theta}}{2}$يعني الخطأ كبير نسبيا وبالتالي القيمة المقدرة ليست لها معنوية إحصائية أي نقبل فرضية العدم ونرفض الفرضية البديلة.

2-**مثال** :لدينا المعلومات الآتية

$\hat{Y}_i = 2 + 6X_i$ ، $S_{\hat{B}} = 2$ ، $S_{\hat{A}} = 0.1$ ، N=10

اختبر معنوية المعالم التقديرية

اختبار $\hat{\boldsymbol{A}}$

$$H_0 : \mathrm{A}=0$$

$$H_1 : \mathrm{A}\neq 0$$

$$S_{\hat{A}} < \frac{\hat{A}}{2} \qquad 0.1<1$$

نرفض فرضية العدم ونقبل الفرضية البديلة معناه القيمة المقدرة لها معنوية إحصائية

اختبار $\hat{\boldsymbol{B}}$

$$H_0 : \mathrm{B}=0$$

$$H_1 : \mathrm{B}\neq 0$$

$$S_{\hat{B}} < \frac{\hat{B}}{2} \qquad 2<3$$

نرفض فرضية العدم ونقبل الفرضية البديلة معناه القيمة المقدرة لها معنوية إحصائية

6-طريقة استخدام توزيع ستيودنت

يستخدم الباحث توزيع ستيودنت عندما يكون حجم العينة صغير $n<30$ عند درجة حرية V ومستوى معنوية $\propto$ وذلك باستخدام الصيغة الآتية لتوزيع ستيودنت

$$t^*_{\mathrm{n}-2} = \frac{\hat{\theta}-\theta}{S_{\hat{\theta}}}$$

$\hat{\theta}$:أي قيمة مقدرة

θ : القيمة الحقيقية المبحوث عنها

$S_{\hat{\theta}}$:الخطا المعياري للقيمة المقدرة

ثم نقوم بمقارنة قيمة t^* المحسوبة بقيمة t المجدولة عند درجة حرية V ومستوى المعنوية $\propto$ **والخروج بنتيجتين:**

1-إذا كانت t^* المحسوبة اقل من المجدولة عند درجة حرية V ومستوى المعنوية $\propto$ نقبل فرضية العدم ونرفض الفرضية البديلة

3-إذا كانت t^* المحسوبة اكبر من المجدولة عند درجة حرية V ومستوى المعنوية $\propto$ نرفض فرضية العدم ونقبل الفرضية البديلة

مثال: نفس المثال السابق

اختبر معنوية المعالم التقديرية باستخدام توزيع ستيودنت عند مستوى المعنوية 5 %

أولا-اختبار $\hat{A}$

$$H_0 : A=0$$

$$H_1 : A\neq0$$

$$t^*_{10-2} = \frac{2-0}{0.1} = 20$$

$t < t^*$ نرفض فرضية العدم ونقبل بالفرضية البديلة أي القيمة المقدرة لها معنوية إحصائية

ثانيا-اختبار $\hat{B}$

$$H_0 : B=0$$

$$H_1 : B\neq0$$

$$t^*_{10-2} = \frac{6-0}{2} = 3$$

$t < t^*$ نرفض فرضية العدم ونقبل بالفرضية البديلة أي القيمة المقدرة لها معنوية إحصائية