محتوى المحاضرة رقم 03

ب-الطريقة الرياضية لإيجاد العلاقة بين X ,Y

بعد ما يحدد الباحث من شكل الانتشار انه توجد علاقة بين X , Y وانه يمكن تمثيلها بخط مستقيم يسمى خط الانحدار ويأخذ الشكل الرياضي الأتي:

وتسمى هذه المعادلة بمعادلة الانحدار Y/X

حيث :

Y_i :القيمة الفعلية للمتغير التابع

X_i : القيمة الفعلية للمتغير المستقل

A , B قيم حقيقية لمعامل الانحدار

ويعبر A عن الجز المقطوع من محور Y ويمثل قيمة Yعند X=0

ويعبر B ميل خط الانحدار ومعناه إذا تغير X بوحدة واحدة يتغير Y بقيمة B

ويساوي $B = \frac{dy}{dx}$

وألان قبل الوصول إلى معادلة الانحدار النهائية التي تصف العلاقة بين المتغيرين X , Y بغية قياس العلاقة بينهما واستخدام هذه العلاقة في التنبؤ ببعض قيم Y .نطرح سؤال هل المتغير X هو الوحيد المؤثر على المتغير Y ؟

الإجابة تكون **بالنفي** .لان هناك عدة متغيرات أو عوامل أخرى تؤثر في المتغير Y بعضها يمكن قياسها والبعض الأخر لايمكن قياسه (العادات والتقاليد ، الأذواق.....)أو يصعب الحصول على معلومات عنها ولتغلب على هذه العقبات فإن الباحث يلجا إلى إضافة متغير عشوائي U_i يقوم مقام تجميع لاثار هذه العوامل إلى الصيغة الرياضية السابقة التي تصف العلاقة بين المتغيرات

وتكتب

وعند اخذ عينة من المجتمع والقيام بالتقدير تصبح المعادلة السابقة من الشكل

$$Y_{\mathrm{i}} = \hat{A} + \hat{B}\ X_i + e_i$$

وعليه يمكن تجزئة المعادلة الأخيرة إلى جزئين هما:

الجزء الأول يمثل الخط $\hat{A} + \hat{B}\ X_i$ يعرف بالمتغير المفسر يبين اثر X فقط على Y

الجزء الثاني يمثل المتغير العشوائي ويعرف بالمتغير غير مفسر

فعندما يريد الباحث معرفة اثر المتغير المستقل على المتغير التابع فقط. يتم ذلك بواسطة المعادلة

$$\hat{Y}_i = \hat{A} + \hat{B}\ X_i$$

حيث

$\hat{A}$: تقدير لمعلمة المجتمع المجهولة A

$\hat{B}$: تقدير لمعلمة المجتمع المجهولة B

e_i : تقدير للمتغير العشوائي U_i

وتكتب $Y_{\mathrm{i}} = \hat{A} + \hat{B}\ X_i + e_i$ بالتعويض

$$Y_{\mathrm{i}} = \hat{Y}_i + e_i$$

$$e_i = Y_{\mathrm{i}} - \hat{Y}_i$$

وهكذا نلاحظ أن المتغير العشوائي يظهر في النموذج بسبب مجموعة من العوامل تكون بعضها أو كلها مسئولة على ذلك وبعد إيجاد المعادلة التي تربط بين المتغير X والمتغير Y يلجأ الباحث إلى تقدير معالم هذا النموذج باستخدام طريقة إحصائية تعرف بطريقة المربعات الصغرى وهي أكثر الطرق انتشار واستخدام في التقدير الإحصائي .ولكي يمكن استخدام هذه الطريف يجب توافر مجموعة من الفروض تسمى بفروض نموذج الانحدار البسيط

1-2-فروض نموذج الانحدار البسيط

1-إن المتغير التابع Y يكون دالة خطية للمتغير المستقل X مضاف إليه المتغير العشوائي U.

2-إن قيم المتغير العشوائي U في فترة يعتمد على الصدفة وقد تكون موجبة أو سالبة أو صفر وان متوسط قيم المتغير العشوائي يساوي الصفر $\in(X)=0$.

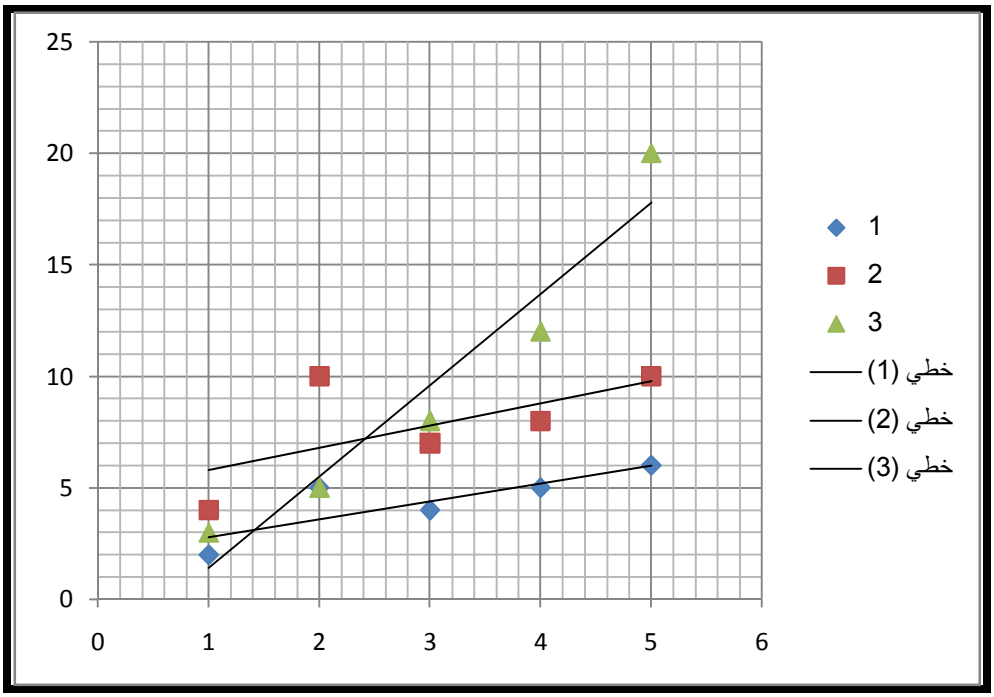
3-إن تباين المتغير العشوائي U ثابت لجميع قيم المتغير المستقل X $V(u)=\delta^2$

وان توزيع قيم المتغير العشوائي تتوزع توزيعا طبيعيا

4- إن قيم المتغير العشوائي U مستقلة عن بضها البعض أي لايوجد ارتباط بين المتغيرات العشوائية من فترة إلى أخرى

5-ليس هناك اخطأ في البيانات الإحصائية لـــ X و Y

إذن على ضؤ هذه الفروض يمكن تقدير معالم معادلة الانحدار A , B بطريقة المربعات الصغرى والشكل البياني يوضح ذلك



نلاحظ من الشكل أعلاه أن أفضل خط نقاط الانتشار هو ذلك الخط الذي يضمن لنا تصغير مجموع مربع الأخطاء $\sum e^2$ إلى الحد الادنى (خط رقم 01) .لذلك أطلق على هذه الطريقة طريقة المربعات الصغرى أي تصغير قيمة الخطأ العشوائي (المتغير العشوائي) إلى الحد الأدنى

وتكتب $L = \sum_i^n e^2 = \sum_i^n (Y_i - \hat{Y})^2$

أي إيجاد النهاية الصغرى للدالة $L = \sum_i^n (Y_i - \hat{A} - \hat{B} X_i)^2 =$

نأخذ المشتقات الجزئية لهذه الدالة

$$\frac{\delta L}{\delta \hat{A}} = -2\sum_i^n (Y_i - \hat{A} - \hat{B} X_i) = 0$$

$$\frac{\delta L}{\delta \hat{B}} = -2\sum_i^n (Y_i - \hat{A} - \hat{B} X_i) X_i = 0$$

ومنه يمكن استنتاج المعادلات الطبيعية لحساب المعالم التقديرية بطريقة المربعات الصغرى

$$\sum_i^n Y_i = N \hat{A} + \hat{B} \sum_i^n X_i$$

$$\sum_{\mathrm{i}}^{\mathrm{n}} Y_i\ X_i = \hat{A}\ \sum_i^n X_i\ + \hat{B}\ \sum_i^n {X_i}^2$$

وبحل هذين المعادلتين نحصل على قيمة كل من $\hat{A}$ ، $\hat{B}$

2-الانتقال من الانحدار الخطي إلى الانحدار غير خطي

يمكن تطبيق طريقة المربعات الصغرى على النماذج غير الخطية لإيجاد المعالم بعد الانتقال من الشكل غير الخطي إلى الشكل الخطي بواسطة تحويل النموذج غير الخطي إلى نموذج خطي كما يلي:

1-معادلة الاتجاه ألتربيعي

$$Y = A\ + BX\ + CX^2$$

تحسب قيمة المعالم بطريقة المربعات الصغرى كما يلي:

$$\sum Y\ = NA\ + B\sum X\ + C\sum X^2$$

$$\sum YX = A\sum X\ + B\sum X^2\ + C\sum X^3$$

$$\sum YX^2\ = A\sum X^2\ + B\sum X^3\ + C\sum X^4$$

2-معادلة ذات القوة

$$Y = AX^B$$

تحسب قيمة المعالم بطريقة المربعات الصغرى بعد تحويلها لشكل الخطي

$$\mathrm{Lny} = \mathrm{lnA} + \mathrm{BlnX}$$

$$\sum lny\ = NlnA\ + B\sum lnX$$

$$\sum lnylnX\ = lnA\ \sum lnX\ + B\ \sum (lnX)^2$$

3-المعادلة الكسرية

$$\mathrm{Y} = \mathrm{A} + \frac{B}{X}$$

تحسب قيمة المعالم بطريقة المربعات الصغرى

$$\sum Y = NA + B\sum \frac{1}{X}$$

$$\sum \frac{Y}{X} = A\sum \frac{1}{X} + B\sum \frac{1}{X^2}$$

تمرين :قام مسؤول قسم التسويق في شركة ما بدراسة العلاقة بين حجم المبيعات ومصاريف الدعاية وفي سبيل ذلك قام بجمع البيانات الآتية:

Y	40	50	60	65	70	80	92	100
X	5	7	10	12	15	20	25	30

المطلوب

1–ارسم شكل الانتشار.ماذا تستنتج كم شكل الانتشار

2–اوجد معادلة التقدير Y/X بطريقة المربعات الصغرى.ثم فسر معالم معادلة التقدير $\hat{B}$ ، $\hat{A}$

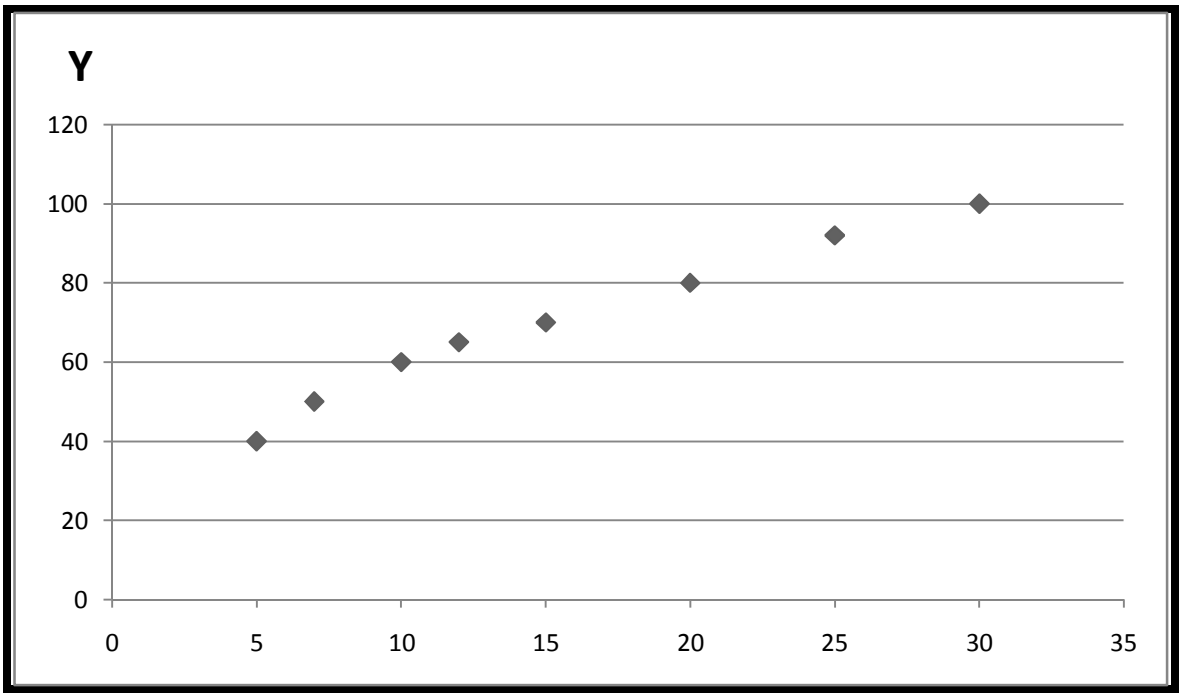
3–تنبأ بحجم المبيعات إذا كانت مصاريف الدعاية 40 ألف دج

4–اوجد معادلة التقدير إذا كان حجم المبيعات متغير مستقل ومصاريف الدعاية كتغير تابع X/Y

5–تنبأ بمصاريف الدعاية إذا كان حجم المبيعات 90 ألف دج

الجواب

1–رسم شكل الانتشار



نلاحظ من الشكل البياني وجود علاقة بين المتغيرين حجم المبيعات ومصاريف الدعاية يمكن تمثيلها بخط مستقيم من الشكل Y= A + BX +U

2-إيجاد معادلة التقدير Y/X

نضع المعادلات الطبيعية

$$\sum_{i}^{n} Y_i = N\hat{A} + \hat{B}\sum_{i}^{n} X_i$$

$$\sum_{i}^{n} Y_i X_i = \hat{A}\sum_{i}^{n} X_i + \hat{B}\sum_{i}^{n} X_i^2$$

Y^2	X^2	Y*X	X	Y
1600	25	200	5	40
2500	49	350	7	50
3600	100	600	10	60
4225	144	780	12	65
4900	225	1050	15	70
6400	400	1600	20	80
8464	625	2300	25	92
10000	900	3000	30	100
4169	**2468**	**9880**	**124**	**557**

بعد حل جملة المعادلات الخطية نحصل على القيم التقديرية لـــ A و B

$$\hat{Y} = 34.249 + 2.28\ 2X$$

تفسير معالم معادلة التقدير

$\hat{A}$ =34.249 عندما $X=0$ $\hat{Y}$ =34.249 أي عندما لاتوجد مصاريف الإشهار فإن المؤسسة تبلغ مبيعات الحجم 34.249 ألف دينار

3-التنبؤ بحجم المبيعات إذا كانت مصاريف الدعاية 40 ألف دج

$$\hat{Y} = 34.249 + 2.282(40)=125.529$$

4-إيجاد معادلة انحدار *X/Y*

$$\hat{X} = \hat{A} + \hat{B}\ Y_i$$

$$\hat{B} = \frac{N\sum XY - \sum Y \sum X}{N\sum Y^2 - (\sum Y)^2}$$

$\hat{X}$=-14.299 +0.428Y

5- التنبؤ بمصاريف الدعاية إذا كان حجم المبيعات 90 ألف دج

$\hat{X}$=-14.299 +0.428(90)=24.221