République Algérienne Démocratique et populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université d'Arbi Ben M'Hidi Oum El Bouaghi

MECANIQUE DU POINT MATERIEL.
COURS et EXERCICES

Sommaire

Outils mathématiques

Calcul vectoriel

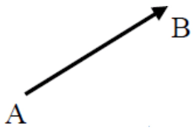
I- Notion de vecteur

1- Définition

Un scalaire est un nombre positif, négatif ou nul, utilisé pour représenter des quantités diverses : temps, température, masse, énergie, etc…

Un vecteur est caractérisé par quatre caractéristiques à savoir

L'origine A, le support la droite (AB), le sens de A vers B et le module. On le représente par un segment orienté. Il est défini par une direction, un sens sur cette direction et une longueur. Cette longueur n'est autre que la norme du vecteur.



$\overrightarrow{AB}$

Deux vecteurs liés d'origine différentes, sont dits égaux lorsqu'ils ont la même direction, même sens et même module : ils représentent le même vecteurs glissant. Deux vecteurs liés, d'origines quelconques, sont dits opposés lorsqu'ils ont la même direction, même grandeur et des sens opposés : ils sont dits directement opposés lorsqu'ils sont portés par la même droite.

2- Vecteur unitaire

Chaque vecteur peut être exprimé en fonction d'un vecteur unitaire qui se différencier du vecteur porteur par son module qui est l'unité

. $\overrightarrow{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right| . \overrightarrow{U}$

$$\left|\vec{U}\right| = 1$$

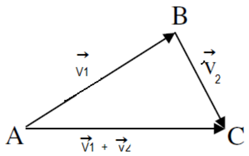
Avec $\left|\overrightarrow{AB}\right| = AB$

II -Opérations sur les vecteurs

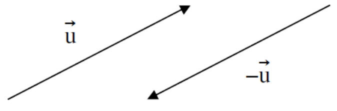
1- **Addition de deux vecteurs**

Des vecteurs peuvent être additionnés pour former un autre vecteur appelé vecteur somme ou résultante.

$$\vec{V} = \vec{V_1} + \vec{V_2}$$

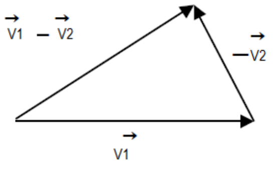


2- **Soustraction de deux vecteurs**



On ne sait pas faire la soustraction mais plutôt l'addition pour cela on fait la somme d'un vecteur avec l'inverse du vecteur qu'on veut soustraire de ce dernier.

$$\vec{V} = \vec{V_1} - \vec{V_2} = \vec{V_1} + (-\vec{V_2})$$



III -Représentation d’un point

Pour pouvoir déterminer les coordonnées de n'importe quel vecteur, il faut choisir au préalable un repère qui est un couple de vecteurs non colinéaires appelé base. On peut alors décomposer tous les autres vecteurs du plan en fonction de ces deux vecteurs et cette décomposition est unique. Comme on a défini qu’un vecteur est formé par deux points, cela veut dire que sa représentation nécessite de repérer ces points.

Pour repérer une position il faut choisir un repère. Les repères sont des trièdres orientés.

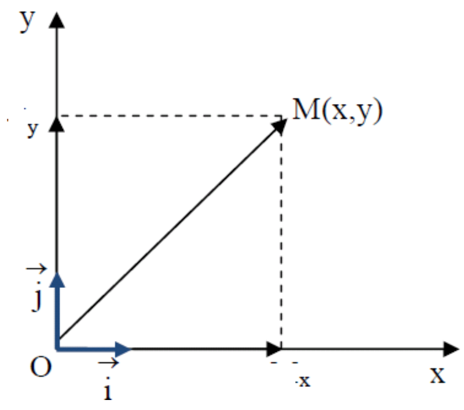
Système de coordonnées cartésiennes

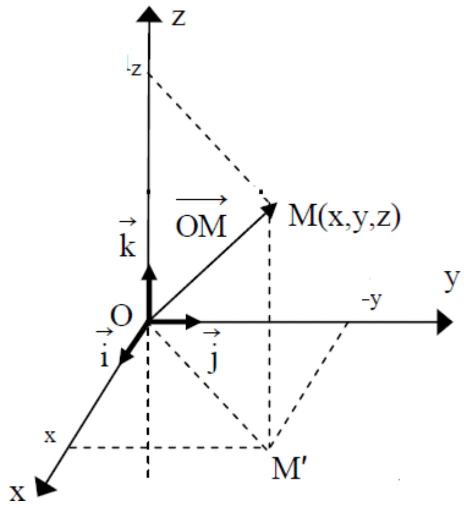
Chaque position est repérée par ses coordonnées. S’il s’agit d’un repère linéaire par une seule coordonnée (x), d’un repère plan par deux coordonnées (x,y) et dans l’espace par trois coordonnées (x,y,z). ces coordonnées sont les projection de la position sur chaque axe doté d’un vecteur unitaire.

La position peut être exprimée par un vecteur position qui lie l’origine du repère choisi à la position.

Le repère est orthonormé, c'est-à-dire que les vecteurs unitaires sont normés à l’unité et orthogonaux entre eux.

Cas à deux dimensions



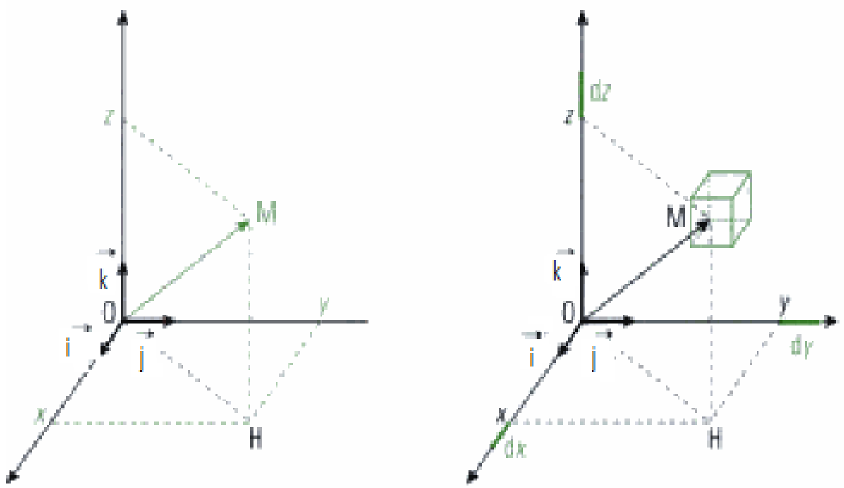


Dans ce repère orthonormé direct un point M est repéré par ses coordonnées cartésiennes (x,y) . le vecteur position M s'écris alors

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OX} + \overrightarrow{OY} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

$$\overrightarrow{OY} = \left|\overrightarrow{OY}\right|.j = y\vec{j}$$

Dans l'espace le repère est :



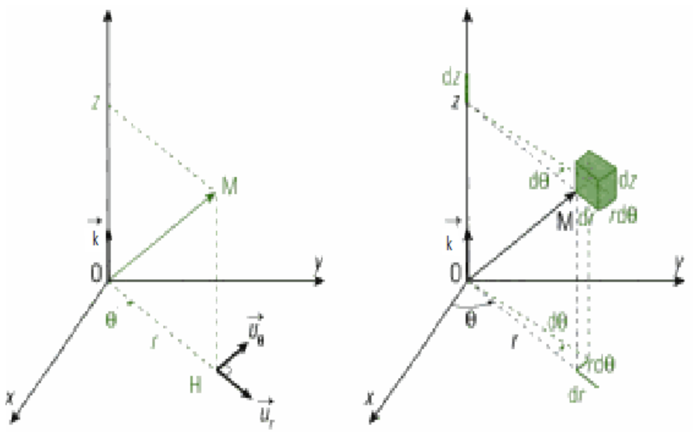
Le vecteur position s'écrit alors

$$\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$$

Lorsque les coordonnées x, y ou z de M subissent une variation élémentaire dx, dy ou dz, le point M se déplace respectivement de dx suivant (ox) , dy suivant (oy) ou dz suivant (oz). Ainsi, le volume élémentaire dV est petit parallélépipède rectangle d'arêtes dx, dy et dz

$$dV = dx\,.\,dy\,.dz$$

Coordonnées cylindrique



si le mouvement du point M est circulaire dans le plan (XOY) et translate suivant l'axe (OZ) on repère la position M par les coordonnées cylindriques (r,θ, z).

- r : représente la distance du point M à l'axe Oz ;
- θ : Définit la position du point M autour de Oz (θ angle compris entre 0 et 2π) ;
- z : représente la cote du point M.

On définit la base orthonormée directe $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_z})$ en posant :

$$\vec{u}_r = \frac{\overrightarrow{OH}}{OH}$$

(H projection orthogonale du point M sur le plan (xOy). Le vecteur position du point M s'écrit alors :

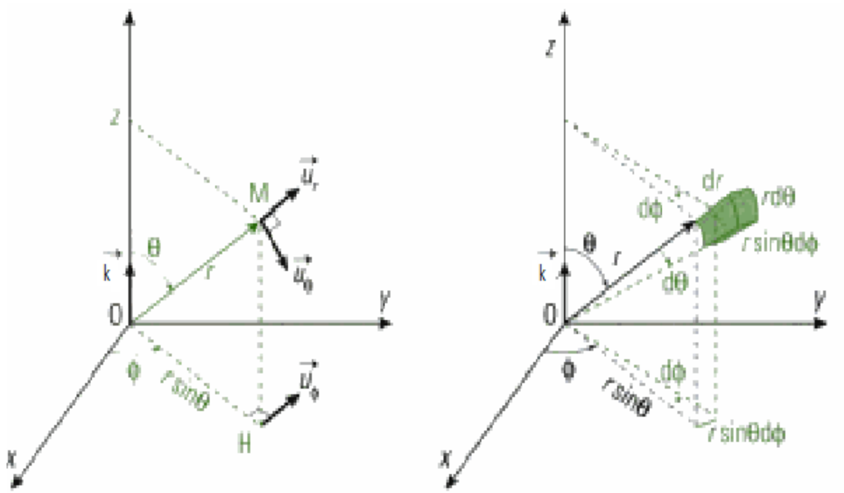
$$\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u_r} + z\vec{k}$$

Lorsque les coordonnées r, θ ou z de M subissent une variation élémentaire dr, d θ ou dz. Le volume élémentaire dV est un petit parallélépipède rectangle d'arêtes dr, dθ et dz

dV= dr . d θ . dz

Coordonnées sphériques

Si le mouvement de M est circulaire suivant tout les axes on utilise les coordonnées sphériques (r, θ, φ)



- r : représente la distance du point M à l'origine O ;
- θ et φ : définissent la direction dans laquelle, depuis le point O, on voit le point M (θ angle compris entre O et π, φ angle compris entre 0 et 2π).

On définit la base orthonormée directe $(\vec{u_r}, \vec{u_\theta}, \vec{u_\varphi})$ en posant :

$$\vec{u_r} = \frac{\overrightarrow{OM}}{OM}$$

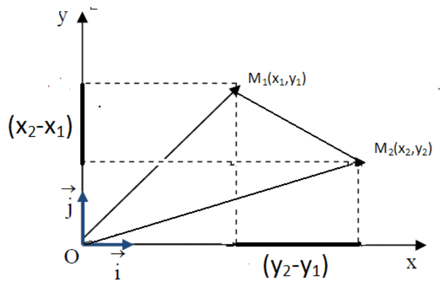
Le vecteur position du point M s'écrit alors :

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{u_r}$$

dV=dr . r dθ . r sinθ dφ

Expression d'un vecteur dans une base cartésienne à deux dimensions

Soient deux positions $M_1(x_1,y_1)$ et $M_2(x_2,y_2)$, le vecteur formé par les deux points s'exprime par l'expression suivante



$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}$$

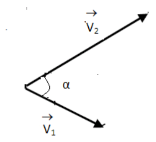
$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j}$$

Son module est :

$$\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

IV- Produit scalaire entre deux vecteurs

Soient deux vecteurs $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$,leur produit scalaire est un produit qui donne comme résultat un scalaire



$$\overrightarrow{V_1}.\overrightarrow{V_2} = \left|\overrightarrow{V_1}\right|.\left|\overrightarrow{V_2}\right|.\cos\alpha$$

Tel que α est l'angle entre les deux vecteurs

Ce produit admet quelque propriétés tel que

$\vec{i}.\vec{i} = 1$

$\vec{i}.\vec{j} = 0$

Calcul du module d'un vecteur

Soient Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{V_1}$ (x_1,y_1,z_1) et celle du vecteur $\overrightarrow{V_2}$ (x_2,y_2,z_2)

Leur produit scalaire donne

$$\overrightarrow{V_1}.\overrightarrow{V_2} = \left(x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}\right)\left(x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}\right)$$

$$\overrightarrow{V_1}.\overrightarrow{V_2} = \left(x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2\right)$$

Si on remplace $\overrightarrow{V_2}$ par $\overrightarrow{V_1}$

On aura

$$\overrightarrow{V_1}.\overrightarrow{V_1} = \left|\overrightarrow{V_1}\right|^2 = \left(x_1{}^2 + y_1{}^2 + z_1{}^2\right)$$

D'où

$$\left|\vec{V}_1\right| = \sqrt{\left(x_1{}^2 + y_1{}^2 + z_1{}^2\right)}$$

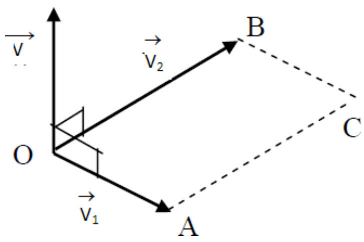
C'est la formule pour calculer le module d'un vecteur

V -Produit vectoriel

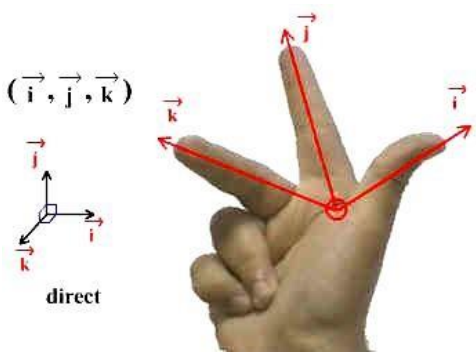
Soient deux vecteurs $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$, leur produit vectoriel est un vecteur orienté

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \vec{V}$$

- la direction est perpendiculaire au plan formé par les vecteurs $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$



- le sens est donné par la règle des trois doigts de la main droite



- sa norme vaut

$$\left|\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2\right| = \left|\vec{V}_1\right| \cdot \left|\vec{V_2}\right| .\sin\alpha$$

Tel que α est l'angle entre les deux vecteurs

Propriétés

$$\vec{i} \wedge \vec{i} = 0$$

$$\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$$

Le produit vectoriel peut être calculé par la méthode directe en coordonnées cartésiennes dans un repère orthonormé direct :

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \left(x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}\right) \wedge \left(x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}\right)$$

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = (y_1 z_2 - z_1 y_2)\vec{i} + (z_1 x_2 - x_1 z_2)\vec{j} + (x_1 y_2 - y_1 x_2)\vec{k}$$

il peut être aussi déterminer par la méthode du déterminant

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\vec{k} =$$

$$= (y_1 z_2 - z_1 y_2)\vec{i} - (x_1 z_2 - z_1 x_2)\vec{j} + (x_1 y_2 - y_1 x_2)\vec{k}$$

VI- Fonction à plusieurs variables

En Physique, nous avons souvent à étudier les fonctions de plusieurs variables indépendantes. Nous nous limiterons à trois notées *x* , *y et z* mais les résultats sont facilement généralisables. Soit une fonction *f (x, y,z)*, nous appellerons différentielle de *f* (notation *df*) la

Il existe des fonctions algébriques et des fonctions vectorielles à plusieurs variables

- Fonction algébrique à une seule variable, c'est une fonction qui ne dépend que d'une seule variable

$$y = f(x)$$

- Fonction à plusieurs variables qui dépendent de deux ou plusieurs variables

$$g = f(x, y) \quad \text{deux variables}$$

$$g = f(x, y, z) \quad \text{trois variables}$$

Sa différentielle totale s'écrit

$$dg = df(x, y, z) = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y}dy + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z}dz$$

Exemple

Soit la fonction suivante

$$f(x,y,z)=x^2-yz$$

sa différentielle totale est :

$$df=2xdx-zdy-ydz.$$

On vient de définir des fonctions algébriques à plusieurs variables. Il existe aussi des fonctions vectorielles à plusieurs variables :

$$\vec{V} = f(x, y, z)\vec{i} + g(x, y, z)\vec{j} + h(x, y, z)\vec{k}$$

Opérateurs

C'est des grandeurs mathématiques qui agissent sur ces fonctions.

L opérateur nabla qui est un vecteur qui agit sur les fonctions

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

Lorsqu'il agit sur les fonctions algébriques, les transforme en fonctions vectorielles

$$\vec{\nabla} f(x,y,z) = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}\vec{k}$$

$$\vec{\nabla} f(x,y,z) = \overrightarrow{grad}\, f(x,y,z)$$

Et transforme les fonctions vectorielles en fonctions algébriques

$$\vec{\nabla}.\vec{V} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right).\left(\left(f(x,y,z)\vec{i} + g(x,y,z)\vec{j} + h(x,y,z)\vec{k}\right)\right)$$

$$\vec{\nabla}.\vec{V} = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial g(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial h(x,y,z)}{\partial z} = div\vec{V}$$

Exercices

Exercice 1 Dans un repère orthonormé R(o,x,y,z), soient les trois points suivants : A(-1,-2,1) B(-3,1,4) C(-1,2,-3) .

1- donner l'expression des vecteur $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$.
2- Déterminer les expressions de $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}$, $|\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}|$ et $\overrightarrow{OC}.(\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB})$.
3- Déterminer l'angle entre les vecteur ($\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}$) et $\overrightarrow{OC}$.

Solution

$\overrightarrow{OA} = -\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ $\overrightarrow{OB} = -3\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}$ $\overrightarrow{OC} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$

$\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB} = -9\vec{i} + 1\vec{j} - 7\vec{k}$ $\left|\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}\right| = \sqrt{131}$ $\overrightarrow{OC}\left(\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}\right) = 32$

Exercice 2

On donne les vecteurs suivants :

$$\vec{r}_1 = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}\ ,\ \vec{r}_2 = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}\ ,\ \vec{r}_3 = 4\vec{i} - 3\vec{j} + 3\vec{k}$$

1- Calculer leurs modules.
2- Calculer les composantes et les modules des vecteurs :

$$\vec{A}=\vec{r_1}+\vec{r_2}+\vec{r_3} \qquad \vec{B}=\vec{r_1}+\vec{r_2}-\vec{r_3}$$

3- Déterminer le vecteur unitaire $\vec{U}$ porté par le vecteur $\vec{C}=\vec{r_1}+2\vec{r_2}$

4- Calculer les produit scalaire et vectoriel des vecteurs $\vec{r_1}$ et $\vec{r_2}$

3- Calculer les produits $\vec{A}\left(.\vec{B}\wedge\vec{C}\right)$ et $\overrightarrow{A\wedge}\left(.\vec{B}\wedge\vec{C}\right)$

Solution

1- $\left|\vec{r_1}\right|=\sqrt{4+9+1}=\sqrt{14}$ $\left|\vec{r_2}\right|=\sqrt{9+4+4}=\sqrt{17}$ $\left|\vec{r_3}\right|=\sqrt{16+9+9}=\sqrt{34}$

2- $\vec{A}=9\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}$, $\left|\vec{A}\right|=\sqrt{81+4+16}=\sqrt{101}$ $\vec{B}=\vec{i}+4\vec{j}-2\vec{k}$

$\left|\vec{B}\right|=\sqrt{1+16+4}=\sqrt{21}$

3- $\vec{c}=8\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$ $\left|\vec{c}\right|=\sqrt{74}$ $\vec{U}=\dfrac{8\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}}{\sqrt{74}}$

4- $\vec{r_1}.\vec{r_2}=6-6-2=-2$.

5- $$\vec{B}\wedge\vec{C}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 4 & -2\\ 8 & -1 & 3\end{vmatrix}=10\vec{i}-19\vec{j}-33\vec{k}$$

$$\vec{A}\left(.\vec{B}\wedge\vec{C}\right)=90+38-132=-4$$

$$\vec{A}\wedge\left(\vec{B}\wedge\vec{C}\right)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 9 & -2 & 4\\ 10 & -19 & -33\end{vmatrix}=142\vec{i}+337\vec{j}-151\vec{k}$$

Exercice3

On considère les vecteurs suivants ;

$$\vec{V_1}=\sin t\vec{i}-\cos t\vec{j}+3t\vec{k} \qquad \vec{V_2}=5t^3\vec{i}+3t\vec{j}-2t^4\vec{k}$$

- Calculer le module de ces deux vecteurs

-Trouver les expressions des grandeurs :

$\frac{d}{dt}\left(\vec{V}_1 . \vec{V}_2\right)$ et $\frac{d}{dt}\left(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2\right)$

Solution

$\left|\vec{V}_1\right| = \sqrt{1+9t^2}$ $\left|\vec{V}_2\right| = \sqrt{25t^6 + 9t^2 + 4t^8}$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{V}_1 . \vec{V}_2\right) = \frac{d}{dt}\left(5t^3 \sin t - 3t\cos t - 6t^4\right) = 15t^2 \sin t + 5t^3 \cos t - 3\cos t + 3t\sin t - 24t^3$$

$$\left(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2\right) = \left(2t^4 \cos t - 9t^2\right)\vec{i} + \left(2t^4 \sin t + 15t^4\right)\vec{j} + \left(3t\sin t + 5t^3 \cos t\right)\vec{k}.$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2\right) = \left(8t^3 \cos t - 2t^4 \sin t - 18t\right)\vec{i} + \left(8t^3 \sin t + 2t^4 \cos t + 60t^3\right)\vec{j}$$

$$+\left((3-5t^2)\sin t + (3t+15t^2)\cos t\right)\vec{k}$$

Analyse dimensionnelle

La nature d'une grandeur physique se reconnait par sa dimension. La dimension d'une grandeur physique G se note par l'expression [G]. Une équation aux dimensions exprime les relations entre les différentes grandeurs. Elle sert à vérifier l'homogénéité des expressions littérales, pouvant ainsi détecter un certain nombre d'erreurs dans les calculs. Cette homogénéité peut être vérifier si l'égalité dans une formule entre deux expressions de même dimension et aussi la somme des expressions de même dimension.

Toutes les dimensions s'expriment à partir des grandeurs fondamentales :

- La longueur L ;
- La masse M
- Le temps T
- L'intensité I
- La température θ

La dimension de toute grandeur physique s'écrit sous la forme suivante :

$$[G]= L^{a}M^{b}T^{c}I^{d}\,\theta^{e}$$

Ou a, b,c,d et e sont des exposants rationnels

Connaissant la dimension d'une grandeur on peut lui attribuer l'unité adapté.

Exemples

Dimension d'une vitesse qui est une distance par le temps

$[v]= LT^{-1}$

D'une force

$$[P] = [m].[\,\gamma] = [m].\frac{[v]}{[t]} = [m].\frac{[d]}{[t]^2}$$

$$[P] = M.\frac{L}{T^2} = MLT^{-2} = (Kg.m/s^{-2})$$

Travail

$[W]=L^2\,MT^{-2}$

Exercices

Quelle est la dimension :

(a) de la constante de rappel d’un ressort ?

(b) du travail ?

(c) d’un couple ?

(d) de la tension superficielle ?

(e) d’un coefficient de frottement ?

(f) d’un coefficient de viscosité ?

(g) du champ gravitationnel ?

(h) d’un champ électrique ?

(i) d’un champ magnétique ?

(j) de E/B ?

Note : On utilisera les symboles suivants : M pour une masse, T pour un temps, L pour une longueur, et Q pour une charge.

<u>Exercice</u>

La masse volumique $\boldsymbol{\rho}$ d’un cylindre de masse $\boldsymbol{m}$, de rayon $\boldsymbol{R}$ et de longueur $\boldsymbol{l}$ est donnée par la relation suivante :

$$\rho = \frac{m^x}{\pi l^y R^2}$$

1- En utilisant les dimensions, trouver les deux constantes $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$

2- En déduire l’expression exacte de la masse volumique $\boldsymbol{\rho}$.

Solution

La masse volumique est par définition le rapport entre la masse et le volume c'est-à-dire elle admet comme dimension :

$[\rho] = ML^{-3}$ avec $[\rho] = \dfrac{[m]^x}{[l]^y [R]^2} = M^x L^{-y-2}$

Donc x=1 et -y-2=-3 donc y=1

2- $\rho = \dfrac{m}{\pi l R^2}$

Calcul d'incertitudes

1. Définition

La mesure d'une grandeur est entachée d'une erreur. Une erreur est la différence entre une valeur mesurée et une vraie valeur. Le problème est de trouver la vraie valeur qui reste impossible à évaluer. La valeur numérique associée à la mesure n'est connu que si elle est évaluée de l'incertitude sur cette valeur.

Soit une mesure d'une grandeur A. le résultat est donné sous la forme suivante

$$\mathbf{A= (a\pm\Delta A)\ unit\acute{e}\ de\ A}$$

A le résultats de la mesure

a : la valeur numérique de la mesure

ΔA : l'incertitude de la mesure

Exemple

On désire mesurer une longueur L. Cette mesure est réalisée à l'aide d'une règle; la valeur numérique obtenue est 5.32 m et on suppose que l'incertitude de la mesure est évaluée à 0.02 m. donc le résultat de la mesure est donnée sous la forme

$$\mathbf{L= (5.32\pm0.02)\ m.}$$

2. Détermination d'une incertitude

S'il s'agit d'une série de mesure ou d'une seule les résultats ne sont pas forcement les mêmes.

Dans le cas d'une série de mesure, l'incertitude est évaluée de la façon suivante :

On procède à n mesures indépendantes d'une même grandeur physique A avec les mêmes conditions expérimentales. On désigne par a_i les valeurs numériques obtenues avec i variant de 1 à n. la valeur numérique de la mesure a est alors égale à la moyenne arithmétique de l'ensemble des valeurs obtenues :

$$a = \bar{a} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$$

l'incertitude de la mesure ΔA est le rapport de l'écart type expérimentale S_{exp} par la racine carré du nombre de mesure n.

$$S_{\exp} = \sqrt{\frac{1}{n-1}}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i - \bar{a})}$$

$$\Delta A = \frac{S_{\exp}}{\sqrt{n}}$$

3. Propagation des incertitudes

La vitesse se déduit après la mesure de deux grandeur qui sont la distance et un temps. Il y a des grandeurs de mesure qui s'exprime en fonction de plusieurs grandeurs mesurables. On dit alors que les incertitudes sur ces grandeurs se propage sur la mesure de la grandeur qu'on cherche a déterminer, cas de la vitesse.

Cas d'une somme **A=B+C-D**

L'incertitude sur A est alors

$$\Delta A = \sqrt{\Delta B^2 + \Delta C^2 + \Delta D^2}$$

Cas d'un produit ou d'un quotient

$$F = k\frac{x^a . y^b}{(z+t)^c}$$

On applique la fonction logarithme à cette équation

$$\ln F = \ln(k\frac{x^a . y^b}{(z+t)^c})$$

$$\ln F = \ln k + \ln x^a . y^b - \ln(z+t)^c$$

$$\ln F = \ln k + a \ln x + b \ln .y - c \ln(z+t)$$

On passe au dérivé de cette équation, avec k constant,

$$\frac{dF}{F} = a\frac{dx}{x} + b\frac{dy}{y} - c\frac{dz+dt}{z+t}$$

Enfin, on remplace les éléments différentiels par les incertitudes sur les grandeurs associées et on transforme tous les signes négatifs en signes positifs.

On obtient

$$\frac{\Delta F}{F} = a\frac{\Delta x}{x} + b\frac{\Delta y}{y} + c\frac{\Delta z + \Delta t}{z+t}$$

Exemple

On cherche à déterminer l'incertitude sur la mesure de l'indice n qui est donnée par la formule suivante :

$$n = \frac{\sin(\frac{A+D_m}{2})}{\sin(\frac{A}{2})}$$

On utilise le logarithme de cette dernière expression, on aura alors :

$$\ln n = \ln \sin(\frac{A+D_m}{2}) - \ln \sin(\frac{A}{2})$$

On passe à la différentielle logarithmique repérée par la lettre d, on a donc :

$$\frac{dn}{n}=\frac{d\left(\sin\left(\frac{A+D_m}{2}\right)\right)}{\sin\left(\frac{A+D_m}{2}\right)}-\frac{d\left(\sin\left(\frac{A}{2}\right)\right)}{\sin\left(\frac{A}{2}\right)}$$

Finalement l'incertitude de l'indice de réfraction est donnée par la formule analytique suivante

$$\Delta n = n\left[\frac{\Delta A}{2}\left(\cot g\sin\left(\frac{A+D_m}{2}\right)-0.5\cot g\sin\left(\frac{A}{2}\right)\right)+\frac{\Delta D_m}{2}\left(\sin\cot g\left(\frac{A+D_m}{2}\right)\right)\right]$$