Chapitre 1 – Suites numériques.

I- Généralités.

1) Vocabulaire.

Voici une liste de nombres :	1	3	6	10	15	21	…	(termes)
On peut les numéroter :	n°0	n°1	n°2	n°3	n°4	n°5	…	(rangs)

Ainsi, le **terme** de **rang** 4, dans cet exemple, est 15.

Si on nomme cette suite (u_n) (Remarque : le nom de la suite est noté entre parenthèse), on notera :
$u_0=1$ (le terme de rang 0 est égal à 1) $u_1=3$, $u_2=6$, $u_3=10$ etc...

Pour un entier naturel, u_n , le terme de rang n de la suite, est appelé **terme général**. (Lui est noté sans parenthèses, contrairement au nom de la suite.)

Remarque : on n'est pas obligé de commencer la numérotation à 0, on peut la commencer à 1 ou à un autre rang.

2) Suites définies explicitement en fonction de n.

Une suite (u_n) est définie explicitement en fonction de n lorsqu'elle est donnée, pour tout n, par une formule du type $u_n=f(n)$.

Exemple : Soit u_n la suite définie pour tout n ∈ $\mathbb{N}^*$ par $u_n=\frac{3}{n}+n$.

On peut alors calculer n'importe quel terme de la suite.

Dans l'exemple, calculons u_{100} : $u_{100}=\frac{3}{100}+100$, $u_{100}=100{,}03$.

On peut aussi calculer u_3 : $u_3=\frac{3}{3}+3$, $u_3=4$.

3) Suites définies par récurrence.

Une suite est définie par récurrence lorsqu'on fournit :
- Son terme initial
- et une relation permettant de calculer chaque terme à partir du terme qui le précède. (Appelée **relation de récurrence**)

Exemple : Soit (v_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} v_0=10 & \longleftarrow \text{terme initial} \\ \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1}=\frac{1}{2}v_n+3 & \longleftarrow \text{relation de récurrence} \end{cases}$$

Ici, on ne peut pas calculer directement n'importe quel terme. On doit les calculer de proche en proche à partir de v_0 :

$v_1=\frac{1}{2}\times v_0+3=\frac{1}{2}\times 10+3=5+3=8$

$v_2=\frac{1}{2}\times v_1+3=\frac{1}{2}\times 8+3=4+3=7$

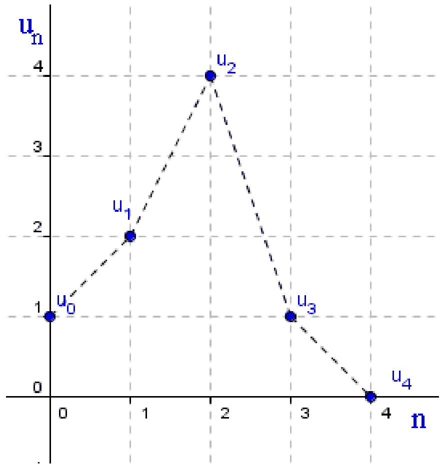
$v_3=\frac{1}{2}\times v_2+3=\frac{1}{2}\times 7+3=6{,}5$ etc...

4) Sens de variation d'une suite.

Définition 1 : On dira qu'une suite (u_n) est :

- **Croissante** lorsque pour tout n, $u_{n+1} \geqslant u_n$
- **Décroissante** lorsque pour tout , $u_{n+1} \leqslant u_n$
- **Constante** lorsque pour tout n, $u_{n+1} = u_n$

Lorsqu'une suite est croissante, décroissante ou constante, on dit qu'elle est **monotone**. (Cela signifie que son sens de variation est constant).



Exemple de suite non monotone : (u_n) telle que $u_0=1$, $u_1=2$, $u_2=4$, $u_3=1$ et $u_4=0$.
(Cette suite est croissante pour n variant de 0 à 2, puis décroissante pour n variant de 2 à 4)

Remarque : si l'inégalité est stricte (> ou <), on parle de suite **strictement croissante** ou **strictement décroissante**.

En pratique : pour étudier le sens de variations d'une suite (u_n) , on étudie le signe de $u_{n+1}-u_n$.

Exemple : Soit (w_n) la fonction définie pour tout n ∈ ℕ par $w_n=\dfrac{1}{3n+1}$.

Pour étudier son sens de variation, on peut calculer $w_{n+1}-w_n$ pour tout n ∈ ℕ.

$$\forall\ n \in \mathbb{N},\ w_{n+1}=\frac{1}{3(n+1)+1}=\frac{1}{3n+3+1}=\frac{1}{3n+4}\ .$$

$$\text{Donc } \forall\ n \in \mathbb{N},\ w_{n+1}-w_n=\frac{1}{3n+4}-\frac{1}{3n+1}=\frac{3n+1}{(3n+4)(3n+1)}-\frac{3n+4}{(3n+1)(3n+4)}=\frac{-3}{(3n+1)(3n+4)}\ .$$

D'après la règle des signes, $w_{n+1}-w_n$ est strictement négatif pour tout n (car -3 est négatif, $3n+1$ est positif puisque $n \geqslant 0$ et $3n+4$ aussi). Donc la suite (w_n) est strictement décroissante.

II- Suites arithmétiques.

1) Définition.

Définition 1 : Une **suite** (u_n) est **arithmétique** lorsqu'il existe un réel constant[1] r tel que, pour tout n, $u_{n+1}=u_n+r$. Le réel r est appelé **la raison** de la suite arithmétique.

Exemple : $u_0=3 \xrightarrow{+2} u_1=5 \xrightarrow{+2} u_2=7 \xrightarrow{+2} u_3=9 \xrightarrow{+2} u_4=11 \xrightarrow{+2}$ etc...

Pour tout n ∈ ℕ, $u_{n+1}=u_n+2$. (u_n) est une suite arithmétique de raison 2.

1 En l'occurrence, ce réel sera constant si sa valeur ne dépend pas de n.

2) Calcul du terme général d'une suite arithmétique.

a) Lorsque le terme initial est le terme de rang 0.

Exemple : Soit (u_n) la suite arithmétique de terme initial $u_0=5$ et de raison $r=7$.

$u_0=5$	(pour n=0)
$u_1=5+7$	(pour n=1)
$u_2=u_1+7=5+7+7=5+2\times7$	(pour n=2)
$u_3=5+2\times7+7=5+3\times7$	(pour n=3)
$u_4=5+4\times7$ etc...	(pour n=4)

Pour tout n ∈ ℕ, $u_n=5+n\times7$ ou $u_n=5+7n$.

Formule générale : Soit (u_n) une suite arithmétique de terme initial u_0 et de raison r.

$u_0=u_0$	(pour n=0)
$u_1=u_0+r$	(pour n=1)
$u_2=u_1+r=u_0+2r$	(pour n=2)
$u_3=u_0+3r$	(pour n=3)
$u_4=u_0+4r$ etc	(pour n=4)

Pour tout n ∈ ℕ, $u_n=u_0+nr$.

Théorème 1 : Si (u_n) est une suite arithmétique de terme initial u_0 et de raison r, alors, pour tout n ∈ ℕ, $u_n=u_0+nr$.

b) Lorsque le terme initial est le terme de rang 1.

Exemple : Soit (u_n) la suite arithmétique de terme initial $u_1=7$ et de raison $r=10$.

$u_1=7$	(pour n=1)
$u_2=7+10$	(pour n=2)
$u_3=u_2+10=7+10+10=7+2\times10$	(pour n=3)
$u_4=7+2\times10+10=7+3\times10$	(pour n=4)
$u_5=7+4\times10$ etc...	(pour n=5)

Pour tout n ∈ ℕ*, $u_n=7+(n-1)\times10$.

Formule générale : Soit (u_n) une suite arithmétique de terme initial u_1 et de raison r.

$u_1=u_1$	(pour n=1)
$u_2=u_1+r$	(pour n=2)
$u_3=u_2+r=u_1+2r$	(pour n=3)
$u_4=u_1+3r$	(pour n=4)
$u_5=u_1+4r$ etc	(pour n=5)

Pour tout n ∈ ℕ, $u_n=u_1+(n-1)r$.

Théorème 2 : Si (u_n) est une suite arithmétique de terme initial u_1 et de raison r, alors, pour tout n ∈ ℕ, $u_n=u_0+(n-1)r$.

Remarque : si le terme initial est le terme de rang p, alors pour tout $n\geqslant p$, $\boxed{u_n=u_p+(n-p)r}$.

3) Comment prouver qu'une suite est arithmétique ?

a) En prouvant que sa variation absolue est constante.

Définition 2 : On appelle variation absolue de la suite (u_n) la différence $u_{n+1}-u_n$.

Théorème 3 : Une suite (u_n) est arithmétique si sa variation absolue $u_{n+1}-u_n$ est constante. Cette variation absolue constante est alors la raison de la suite arithmétique.

Preuve :

- Si $u_{n+1}-u_n$ est une constante égale à a, alors pour tout n, $u_{n+1}-u_n=a \Leftrightarrow u_{n+1}=u_n+a$.

Donc, par définition, (u_n) est une suite arithmétique de raison a.

- Réciproquement, si (u_n) est une suite arithmétique de raison r, alors pour tout n, $u_{n+1}=u_n+r$ soit $u_{n+1}-u_n=r$, donc sa variation absolue est constante.

b) En prouvant que son terme général peut s'écrire explicitement sous la forme $u_n=b+an$.

Réciproque du théorème 1 : Si une suite (u_n) a un terme général de la forme $u_n=b+an$ où a et b sont des constantes, alors (u_n) est une suite arithmétique de raison a et u_0 , s'il existe, est égal à b.

Preuve : Soit (u_n) définie pour tout n par $u_n=b+an$ où a et b sont des constantes.
Alors, pour tout n, $u_{n+1}-u_n=[b+a(n+1)]-[b+an]=an+a-an=a$.
D'après le théorème 3, (u_n) est une suite arithmétique de raison a.
Si u_0 est défini, on a $u_0=b+a\times 0=b$.

Exemple : la suite définie pour tout n ∈ ℕ par $v_n=4-6n$ est arithmétique de terme initial $v_0=4$ et de raison -6 .

4) Sens de variations d'une suite arithmétique.

Théorème 4 : une suite arithmétique est :
- (strictement) croissante lorsque sa raison est (strictement) positive.
- (strictement) décroissante lorsque sa raison est (strictement) négative.
- constante lorsque sa raison est nulle.

Preuve : Immédiate car $u_{n+1}-u_n$ est égal à la raison, donc du signe de la raison.

III- Suites géométriques.

1) Définition.

Définition 3 : Une **suite** (u_n) est **géométrique** lorsqu'il existe un réel constant q tel que, pour tout n, $u_{n+1}=u_n\times q$. Le réel q est appelé **la raison** de la suite géométrique.

Exemple : $u_0=0{,}003 \xrightarrow{\times 10} u_1=0{,}03 \xrightarrow{\times 10} u_2=0{,}3 \xrightarrow{\times 10} u_3=3 \xrightarrow{\times 10} u_4=30 \xrightarrow{\times 10}$ etc...

Pour tout n ∈ ℕ, $u_{n+1}=u_n\times 10$. (u_n) est une suite géométrique de raison 10.

2) Calcul du terme général.

a) Lorsque le terme initial est le terme de rang 0.

Exemple : Soit (u_n) la suite géométrique de terme initial $u_0=3$ et de raison $q=5$.		Formule générale : Soit (u_n) une suite géométrique de terme initial u_0 et de raison q.	
$u_0=3$	(pour n=0)	$u_0=u_0$	(pour n=0)
$u_1=3\times 5$	(pour n=1)	$u_1=u_0\times q$	(pour n=1)
$u_2=u_1\times 5=3\times 5\times 5=3\times 5^2$	(pour n=2)	$u_2=u_1\times q=u_0\times q\times q=u_0\times q^2$	(pour n=2)
$u_3=3\times 5^2\times 5=3\times 5^3$	(pour n=3)	$u_3=u_0\times q^2\times q=u_0\times q^3$	(pour n=3)
$u_4=3\times 5^4$ etc...	(pour n=4)	$u_4=u_0\times q^4$ etc	(pour n=4)