Pour tout n ∈ ℕ, $u_n = 3 \times 5^n$.	Pour tout n ∈ ℕ, $u_n = u_0 \times q^n$.

Théorème 5 : Si (u_n) est une suite géométrique de terme initial u_0 et de raison q, alors, pour tout n ∈ ℕ, $u_n = u_0 \times q^n$.

b) Lorsque le terme initial est le terme de rang 1.

Exemple : Soit (u_n) la suite géométrique de terme initial $u_1 = 5$ et de raison $q = 8$. $u_1 = 5$ (pour n=1) $u_2 = 5 \times 8$ (pour n=2) $u_3 = u_2 \times 8 = 5 \times 8 \times 8 = 5 \times 8^2$ (pour n=3) $u_4 = 5 \times 8^2 \times 8 = 5 \times 8^3$ (pour n=4) $u_5 = 5 \times 8^4$ etc... (pour n=5) Pour tout n ∈ ℕ*, $u_n = 5 \times 8^{n-1}$.	Formule générale : Soit (u_n) une suite géométrique de terme initial u_1 et de raison q. $u_1 = u_1$ (pour n=1) $u_2 = u_1 \times q$ (pour n=2) $u_3 = u_2 \times q = u_1 \times q \times q = u_1 \times q^2$ (pour n=3) $u_4 = u_1 \times q^3$ (pour n=4) $u_5 = u_1 \times q^4$ etc (pour n=5) Pour tout n ∈ ℕ, $u_n = u_1 \times q^{n-1}$.

Théorème 6 : Si (u_n) est une suite géométrique de terme initial u_1 et de raison q, alors, pour tout n ∈ ℕ, $u_n = u_1 \times q^{n-1}$.

Remarque : si le terme initial est le terme de rang p, alors pour tout $n \geqslant p$, $\boxed{u_n = u_p \times q^{n-p}}$.

3) Comment prouver qu'une suite est géométrique ?

a) On prouve qu'il existe un nombre constant q tel que pour tout n, $u_{n+1} = u_n \times q$.

C'est la définition d'une suite géométrique !

Variante : si on a prouvé (ou si on sait) préalablement que tous les termes de la suite sont non-nuls, on peut calculer le rapport $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et prouver qu'il est constant (égal alors à la raison).

b) On prouve que le terme général de la suite est de la forme $b \times a^n$.

Réciproque du théorème 5 : Si une suite (u_n) a un terme général de la forme $b \times a^n$ où a et b sont des constantes, alors (u_n) est une suite géométrique de raison a.
S'il est défini, u_0 est égal à b.

Preuve : Soit (u_n) une suite de terme général $u_n = b \times a^n$. Pour tout n, $u_n = b \times a^n$ et $u_{n+1} = b \times a^{n+1}$.
Donc $u_{n+1} = b \times a^n \times a = u_n \times a$. Donc (u_n) est géométrique de raison a.
Si u_0 est défini, alors $u_0 = b \times a^0 = b \times 1 = a$. On rappelle que pour tout réel a, $a^0 = 1$.

c) On prouve que sa variation relative est constante.

Définition 4 : Soit (u_n) une suite à termes tous non nuls.
On appelle variation relative de u_n le nombre $\dfrac{u_{n+1}-u_n}{u_n}$.

Théorème 7 : Une suite à termes tous non nuls est géométrique si et seulement si sa variation relative $\dfrac{u_{n+1}-u_n}{u_n}$ est constante.

Remarque : la constante en question est $q-1$, où q est la raison de la suite géométrique.

Preuve :

- Soit (u_n) une suite géométrique à termes non nuls de raison q (Remarque : q est nécessairement non nul puisque les termes de la suite le sont).
  Pour tout n, $u_{n+1}=u_n\times q$ donc $\dfrac{u_{n+1}-u_n}{u_n}=\dfrac{u_n\times q-u_n}{u_n}=\dfrac{u_n\times(q-1)}{u_n}=q-1$.
  (On a le droit de simplifier par u_n car $u_n\neq 0$ pour tout n)
  La variation relative $\dfrac{u_{n+1}-u_n}{u_n}$ est donc une constante, égale à $q-1$.
- Réciproquement, si (u_n) est une suite à termes non nuls telle que, pour tout n, $\dfrac{u_{n+1}-u_n}{u_n}$ est égal à une constante C. $\dfrac{u_{n+1}-u_n}{u_n}=C \Leftrightarrow u_{n+1}-u_n=C\times u_n \Leftrightarrow u_{n+1}=C\times u_n+u_n \Leftrightarrow u_{n+1}=(C+1)u_n$.
  (u_n) est donc une suite géométrique de raison C+1.

4) Sens de variation d'une suite géométrique.

Nous ne traiterons que le cas où le premier terme et la raison sont positifs, donc les cas de suites géométriques à termes positifs.

Théorème 8 : Soit (u_n) une suite géométrique de terme initial strictement positif et de raison $q>0$.

- Si $q>1$, alors (u_n) est strictement croissante.
- Si $q=1$, alors (u_n) est constante.
- Si $0<q<1$, alors (u_n) est strictement décroissante.

Preuve : Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme strictement positif et de raison q>0.

Comme chaque terme s'obtient en multipliant le précédent par q et comme le premier terme est strictement positif, de proche en proche et d'après la règle des signes, tous les termes de la suite seront strictement positifs.

Pour tout n, $u_{n+1}=u_n\times q$.

Si $q>1$, pour tout n, $u_n\times q>u_n$ (en multipliant les deux membres par u_n qui est strictement positif) Soit $u_{n+1}>u_n$. (u_n) est strictement croissante.	Si $q=1$, Pour tout n, $u_{n+1}=1\times u_n$ Soit $u_{n+1}=u_n$. (u_n) est donc constante.	Si $0<q<1$, alors, pour tout n, $0<q\times u_n<u_n$ (En multipliant les 3 membres par u_n qui est strictement positif) Donc $u_{n+1}<u_n$. (u_n) est donc strictement décroissante.

IV- Quelques résultats à propos de la suite (q^n), où $q>1$.

Remarque : La suite (q^n) est une suite géométrique de terme initial 1 (pour n=0) et de raison q.

1) Limite de la suite (q^n).

La définition de la notion de limite est hors programme.

Intuitivement, on dira :

- Que la limite d'une suite est +∞ si les nombres u_n finissent par dépasser un nombre aussi grand que l'on veut lorsque les valeurs de n deviennent suffisamment grandes. On note alors $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n=+\infty}$[2].
- Que la limite d'une suite est –∞ si les nombres u_n finissent par dépasser un nombre négatif aussi petit que l'on veut lorsque les valeurs de n deviennent suffisamment grandes. On note alors $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n=-\infty}$[3].
- Que la limite d'une suite est un réel L lorsque les nombres u_n finissent par s'accumuler autour d'un nombre fixe L lorsque n devient très grand.On note alors $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n=L}$[4].

Théorème 9 (admis) :

- Si $q>1$, alors $\lim_{n\to+\infty} q^n=+\infty$
- Si q=1, alors $\lim_{n\to+\infty} q^n=1$
- Si $0<q<1$, alors $\lim_{n\to+\infty} q^n=0$

Propriétés (admises) :

Si $\lim_{n\to+\infty} u_n=$	$+\infty$	$L\in\mathbb{R}$	$-\infty$
Alors, pour tout réel b, $\lim_{n\to+\infty} u_n+b=$	$+\infty$	L+b	$-\infty$

Si $\lim_{n\to+\infty} u_n=$ Alors $\lim_{n\to+\infty} a\times u_n =$	$+\infty$	$L\in\mathbb{R}$	$-\infty$
Si a>0	$+\infty$	aL	$-\infty$
Si a=0		0	
Si $a<0$	$-\infty$	aL	$+\infty$

Exemple : Si $\lim_{n\to+\infty} u_n=+\infty$, alors $\lim_{n\to+\infty} -2\times u_n=-\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} -2u_n+100=-\infty$.

Application : détermination de la limite d'une suite géométrique de raison q>0.

Exemple : Soit (v_n) la suite géométrique de terme initial $v_0=8$ et de raison 0,1.
Comme $0<0{,}1<1$, $\lim_{n\to+\infty} 0{,}1^n=0$, donc $\lim_{n\to+\infty} 8\times0{,}1^n=0$ soit $\lim_{n\to+\infty} v_n=0$.
Soit (w_n) la suite géométrique de terme initial $w_0=-10$ et de raison 7.
Comme $7>1$, $\lim_{n\to+\infty} 7^n=+\infty$, donc $\lim_{n\to+\infty} -10\times7^n=-\infty$, soit $\lim_{n\to+\infty} w_n=-\infty$.

2 Et on dit « La limite de la suite (u_n) lorsque n tend vers +∞ est +∞ » ou « La suite (u_n) diverge vers +∞. »
3 Et on dit « La limite de la suite (u_n) lorsque n tend vers +∞ est –∞ » ou « La suite (u_n) diverge vers –∞. »
4 Et on dit « La limite de la suite (u_n) lorsque n tend vers +∞ est L. » ou « La suite (u_n) converge vers L ».

2) Somme des (n+1) premiers termes de la suite (q^n).

Théorème 10 : Soit q un réel différent de 0 et de 1.
Alors la somme $S_n = 1+q+q^2+q^3+\ldots+q^n$ est égale à $\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Preuve :

$$\begin{array}{rcccccccccccc} S_n & = & 1 & + & q & + & q^2 & + & \ldots & + & q^n & & \\ -qS_n & = & & - & q & - & q^2 & - & \ldots & - & q^n & - & q^{n+1} \\ \hline S_n - qS_n & = & 1 & + & 0 & + & 0 & + & \ldots & + & 0 & - & q^{n+1} \end{array}$$

(×(-q))

Soit $(1-q)\times S_n = 1-q^{n+1}$ soit $\boxed{S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$ (On peut diviser les deux membres par q car q≠1)

Conséquence : Si (u_n) est une suite géométrique de terme initial u_0 et de raison q différente de 0 et de 1, alors

$$u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n = u_0+u_0\times q+u_0\times q^2+u_0\times q^3+\ldots+u_0\times q^n = u_0(1+q+q^2+\ldots+q^n) = u_0\times\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

V- Suites arithmético-géométriques.

Définition 5 : (u_n) est une **suite arithmético-géométrique** lorsqu'il existe deux constantes a et b telles que, pour tout n, $u_{n+1} = a\times u_n + b$.

Remarques : Si a=1, (u_n) est arithmétique de raison b. Si b=0, (u_n) est géométrique de raison a.

Exemple : Soit (t_n) une suite telle que, pour tout n, $t_{n+1} = 3t_n - 2$
(t_n) est arithmético-géométrique avec a=3 et $b=-2$.

Dans les exercices, pour étudier une suite (u_n) arithmético-géométrique, on utilise une suite annexe (v_n), donnée par l'énoncé et définie en fonction de (u_n), qui est géométrique.

Exemple : Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 10 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n - 1 \end{cases}$
et (v_n) la suite définie pour tout n ∈ ℕ par $v_n = u_n - 1$.

On prouve que (v_n) est géométrique et on détermine son terme général :
∀ n ∈ ℕ, $v_n = u_n - 1$ donc $v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = 2u_n - 1 - 1 = 2u_n - 2 = 2(u_n - 1) = 2v_n$.
(v_n) est donc géométrique de raison 2 et de terme initial $v_0 = u_0 - 1 = 10 - 1 = 9$.
Donc ∀ n ∈ ℕ, $v_n = v_0\times 2^n = 9\times 2^n$.
Et comme ∀ n ∈ ℕ, $v_n = u_n - 1 \Leftrightarrow v_n + 1 = u_n$,
∀ n ∈ ℕ, $u_n = v_n + 1$ soit $u_n = 9\times 2^n + 1$.
On a le terme général de (u_n), on peut aussi déterminer ses variations et sa limite.

Variations : ∀ n ∈ ℕ, $u_{n+1} - u_n = 9\times 2^{n+1} - 9\times 2^n = 9\times 2^n\times 2 - 9\times 2^n\times 1 = 9\times 2^n(2-1) = 9\times 2^n > 0$ donc la suite (u_n) est strictement croissante.

Limite : comme $\lim_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$, alors $\lim_{n\to+\infty} 9\times 2^n = +\infty$ donc $\lim_{n\to+\infty} 9\times 2^n + 1 = +\infty$, soit $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.