Université Larbi Ben M'hidi-Oum El Bouaghi

Faculté Sciences Exactes et Sciences de la Nature et de la Vie

Département Mathématiques et Informatiques

Licence Informatique $3^{\text{ième}}$ année

Spécialité : Systèmes informatiques SI **Module : Probabilités & Statistique**

Série N°1 : Espaces probabilisés

Exercice 01 :

1. 0n jette trois dés **différents** (par exemple un dé rouge, vert, et blanc). Combien de **nombres** peut-on former ? (c'est-à-dire donner $card(\Omega)$) dans les cas suivants :
   i) Tenir compte de l'ordre (i.e successivement).
   ii) Ne tenir pas compte de l'ordre (simultanément). Dans ce cas ii) combien de ces nombres sont inférieur à 600 et supérieur à 400 ? combien de ces nombres sont pairs ? combien de ces nombres sont des multiplier de cinq ?
2. On a trois urnes qui contiennent cinq boules numérotés de 1 à 5. On choisit au hasard une urne, et on tire une boule puis on écrit le chiffre correspondant. On répète l'opération (l'expérience) avec les deux autre urnes.
   Combien de nombres peut-on former ?
3. Un mot de passe est composé de trois lettres latines (majuscule)différentes suivies de deux chiffres différents. combien de mots de passe peut-on écrire de cette manière ? ($card(\Omega)$).

Exercice 02 : Une urne contient 3 boules blanches, 2 boules noires. On extrait **au hasard** deux boules. On considère les événements suivants :

A_1 :"Obtenir deux boules noires"

A_2 :"Obtenir au moins une boules blanche"

A_3 :"Obtenir une seule boule blanche"

A_4 :"Obtenir une seule boule noire"

A_5 :"Obtenir deux boules vertes"

1. Déterminer si chaque événement est d'une part, aléatoire, certain, impossible et , d'autre part, s'il est élémentaire ou composé. Puis trouver **les ensembles des épreuves** rattachées aux ces événements.
2. Pour les événements A_1, A_2, A_3, A_4, trouver les paires d'événements **équivalents**, les paires d'événements **compatibles**, les paires d'événements **contraires**, les paires d'événements dont **le premier implique le second**.

Exercice 03 : Soit A, B, C trois événements quelconque. Exprimer les événements suivants en utilisant les événements A, B, C :

1. A seul se produit
2. A et B se produisent mais non C
3. Les trois événements se produisent en même temps

4. **Au moins** un des événements se produit
5. Au moins deux événements se produisent
6. Un et un seulement se produit
7. Deux et Deux seulement se produisent
8. aucun événement ne se produit

Exercice 04 :

1. On lance **au hasard** deux dés de couleurs **différentes** dont les faces sont numérotées de 1 à 6. (a) Déterminer Ω. (b) Calculer la probabilité d'obtenir un total de 10. (c) Calculer la probabilité d'obtenir un total supérieur ou égal à 10.
2. On lance **au hasard** deux dés identiques dont les faces sont numérotées de 1 à 6. (a) Déterminer Ω. (b) Calculer la probabilité d'obtenir un total de 10.

Exercice 05 : A, B, $A \cup B$ sont trois évènements de probabilité $0.4, 0.5$ et 0.6. Calculer la probabilité des évènements suivants : $\bar{A}$, $\bar{B}$, $A \cap B$, $\bar{A} \cap B$, $\bar{B} \cap A$, $\bar{A} \cup B$, $\bar{B} \cup A$, $\bar{A} \cap \bar{B}$, $\bar{A} \cup \bar{B}$.

Exercice 06 : Dans une population, 70% de personnes sont vaccinées contre une maladie M, 35% contre le Covid 19, et 15% contre les deux. On choisit au hasard une personne.
Quelle est la probabilité : (05 pt)

1) qu'une personne soit vaccinée contre la maladie M ?
2) qu'une personne soit vaccinée contre la maladie M ou le Covid 19 ?
3) qu'elle ne soit pas vaccinée contre la maladie M et aussi contre le Covid 19 ?
4) qu'elle ne soit pas vaccinée contre la maladie M ou le Covid 19 ?
5) qu'une personne soit vaccinée contre la maladie M et non contre le Covid 19 ?

Exercice 07 : Une boite contient 5 boules blanches, 4 boules rouges et 3 boules vertes. On tire simultanément 2 boules.

1. Quelle est la probabilité que les deux boules soient blanches ?.
2. Quelle est la probabilité que les deux boules soient de la même couleur ?.
3. au moins une des deux boules soit rouge.

Remarque Refaire l'exercice en utilisant le mot successevement au lieu de simultanément.

Exercice 08 : On lance un dé à 6 faces. On note p_i la probabilité de sortie de la face marquée i. On suppose que la probabilité d'apparition de chaque face est proportionnelle au numéro inscrit sur elle. 1) Calculer la probabilité d'apparition de chaque face.
2) Calculer la probabilité d'obtenir un nombre pair.

Exercice 09 ★ : On dispose d'un dé cubique truqué dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On note p_i la probabilité de l'évènement : "le résultat du lancer est i".

1) Calculer $p_1, p_2, ..., p_6$ sachant que : $p_2 = p_1$, $p_3 = 3p_1$, $p_4 = 2p_1$, $p_5 = 2p_1$ et $p_6 = 2p_3$.
2) Calculer la probabilité de l'évènement A :"obtenir un numéro supérieur ou égal à 2".

Exercice 10 : Dix boules de 1 à 10 sont alignées au hasard une après l'autre. (a)Trouver la probabilité que la boule numérotée 5 apparaisse après la boule numérotée 4. (b) Trouver que la probabilité que la boule 1 soit la première position, 5 la cinquième position, et 10 la dixième position.

Exercice 11 : On prend au hasard 6 ampoules électriques d'un lot de 15 ampoules dont 5 sont défectueuses. Calculer la probabilité des évènements suivants :

1. aucune ampoule ne soit défectueuse ;
2. exactement une ampoule soit défectueuse.
3. exactement 2 ampoules soit défectueuses.
4. exactement 3 ampoules soit défectueuses.
5. au moins une ampoule soit défectueuse.
6. au moins 2 ampoules soit défectueuses.

Exercice 12 ★ :

Dix boules de 1 à 10 sont alignées au hasard une après l'autre. (a)Trouver la probabilité que la boule numérotée 5 apparaisse après la boule numérotée 4. (b) Trouver que la probabilité que la boule 1 soit la première position, 5 la cinquième position, et 10 la dixième position.

Exercice 13 (Ω dénombrable ou discrète) :

On jette un dé à 6 faces plusieurs fois, et on s'arrête lorsque l'on a obtenu un 6. On s'intéresse au nombre de lancer, donc $\Omega = \{1, 2, ..., n, ...\} = \mathbb{N}^*$ tel que n "on obtient 6 au n-ième lancer".

Définir une probabilité sur Ω.

Exercice 14 (Ω infini ou continu) :

Soient $\Omega = \mathbb{R}^+$ un ensemble infini et $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^+}$ une tribu borélienne. On définit une fonction f sur $\mathbb{R}^+$ comme suite : $f(t) = \exp(-t) = e^{-t}$.

Montrer que f une densité de probabilité.

Solution : f est une densité de probabilité car :

1) On a $\exp(-t) > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ donc f est une fonction positive.

2) $\int_0^{+\infty} \exp(-t)\, dt = 1$.