Université de L'arbi Ben M'hidi - Oum El Bouaghi

Faculté des sciences exactes et sciences de la nature et de la vie
Département de Mathématiques et Informatiques

Licence informatique $3^{\text{ième}}$ année, S5

Spécialité : **Systèmes Informatiques SI**

Probabilités et Statistique

L'enseignante :

Besma Bennour

2023-2024

Table des matières

Chapitre 1

Espaces probabilisés

1.1 Expérience aléatoire, ensemble des épreuves

Exemple 1 : On lance deux pièces de monnaie différentes et bien équilibrées sur une surface plane. On registre ce qu'on voit sur la face de chacune des deux pièces.
On pose F pour face et P pour pile.
Exemple 2 : On lance deux dés différents et bien équilibrés, un rouge et un vert.
On enregistre les deux chiffres qui apparaissent sur les deux faces supérieures des dés.
Exemple 3 : On jette un dé à 6 faces plusieurs fois, et on s'arrête lorsque l'on a obtenu un 6. On s'intéresse au nombre de lancer.
Exemple 4 : On tire au hasard (simulténément) trois boules d'une urne qui contient 10 boules numérotés de 0 à 9.
Exemple 5 : On tire successivement trois boules d'une urne qui contient 10 boules numérotés de 0 à 9.
Exemple 6 : J'attends le bus, et je m'intéresse au temps aléatoire qu'il va mettre à arriver, sachant que ça ne peut pas être plus de 10 minutes.

Pour étudier ces phénomènes (expérience) aléatoire, il faut le modéliser par un modèle probabiliste. Les différents résultats possibles d'une expérience aléatoire s'appellent **les épreuves** ou **les réalisations** de l'expérience. On représente les épreuves par la lettre minuscule ω, comme $\omega, \omega_1, ..., \omega_i, ...$

Définition 1.1. *On appelle **ensemble des épreuves** (résultats) ou **l'univers**, noté Ω, l'ensemble décrivant tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire.*

Exemple 1 suit : $\Omega = \{FF, FP, PF, PP\}$ espace fini où $card(\Omega) = 4$.

Exemple 2 suit : $\Omega = \{(i, j), 1 \leq i \leq 6et1 \leq j \leq 6\}$ espace fini tel que $card(\Omega) = 36$.

Exemple 3 suit : $\Omega = \{1, 2, ..., n, ...\} = \mathbb{N}^*$ espace dénombrable tel que :
n "on obtient 6 au n-ième lancer".

Exemple 4 : $card(\Omega) = C_{10}^3$, telle que $C_n^k = \dfrac{n!}{k! \times (n-k)!}$ est une combinaison.

Exemple 5 : $card(\Omega) = A_{10}^3$, tel que $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ est un arrangement.

Exemple 6 suit : $\Omega = [0, 10]$ espace infini.

Exemple 7 : On a $N = 10000$ pièces dont m sont défectueuses. On prend n pièces tel que $m < n$. Soit Ω_i, $i = 1, ..., 4$, l'ensemble des résultats possibles.
Cas 1 : On tire les n pièces sans tenir compte de l'ordre. donc : $\Omega_1 = C_N^n$.
Cas 2 : On les tire en tenant compte de l'ordre, donc $\Omega_2 = A_N^n$.
Cas 3 : On tire toutes les pièces en tenant compte de l'ordre, donc $\Omega = N!$.
Cas 4 : On ne s'intéresse qu'un nombre de pièces défectueuses tirées. Donc $\Omega_4 = \{0, 1, ..., m\}$.

1.2 Èvènement

soit $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble de tous les sous-ensemble de Ω, incluant l'ensemble Ω lui-même et l'ensemble vide.

Exemple 8 : Soit $\Omega = \{1, 2, 3\}$ un ensemble fini.
$\mathcal{P}(\Omega) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \Omega\}$.

Tout élément de $\mathcal{P}(\Omega)$ est appelé **un èvènement**. On peut donc interpréter chaque èvènement avec un sous-ensemble de Ω. On représente les èvènements par des lettres majuscules comme $A, B, C, E, ...$.

1.2.1 Types d'èvènements

1. **Évènement élémentaire**
   L'évènement qui est réalisable par une seule épreuve s'appelle évènement élémentaire et correspond au singleton (le sous-ensemble comportant un seul élément).

2. **Évènement composé**

   L'évènement qui est réalisable par plusieurs épreuves s'appelle **évènement composé** et le sous-ensemble correspond comportant plusieurs éléments.

3. **Évènement certain**

   L'évènement qui se réalise à chacune des épreuves, nommé **l'évènement certain**, et correspond à l'ensemble de toutes les épreuves possibles de l'expérience Ω.

4. **Évènement impossible**

   L'évènement qui ne peut être réalisé par aucune épreuve, nommé **l'évènement impossible**, et correspond à l'ensemble vide $\emptyset$.

5. **Évènement contraire** à A, noté A^c ou $\overline{A}$, est l'évènement qui se réalise si et seulement si A ne se réalise pas.

   On remarque que $(A^c)^c = A$. Les sous-ensembles des épreuves rattachées aux évènements A et $\overline{A}$ sont complémentaires par rapport à l'ensemble Ω (c'est-à-dire $A \cup \overline{A} = \Omega$).

Exemple 1 suit : On a $\Omega = \{PP, FF, PF, FP\}$. Soit A un évènement "obtenir deux piles" donc A se réalise si On obtient l'épreuve PP. On peut écrire alors $A = \{PP\}$ et on dit que A est un évènement élémentaire. L'évènement $\overline{A}$ est "obtenir au moins une face", donc $\overline{A} = \{FF, PF, FP\}$ est un évènement composé. Soit B l'évènement "obtenir trois face", donc $B = \varnothing$. Soit C l'évènement "obtenir au plus deux faces", donc $C = \Omega$.

1.2.2 Relations entre les évènements

1. **Équivalence des évènements**

   On appelle *évènements équivalents*, des évènements qui se réalisent simultanément. L'équivalence de deux évènements A et B revient à l'égalité des sous-ensembles des épreuves $A = B$.

2. **L'implication des évènements**

   On dit que l'évènement A implique l'événement B si la réalisation de A entraîne nécessairement la réalisation de B. Donc $A \Rightarrow B$ c'est-à-dire dans le contexte ensembliste $A \subseteq B$.

Remarque 1.1. — Tout évènement A implique l'évènement certain puisque $A \subseteq \Omega$.

— Un évènement élémentaire est impliqué seulement soit par lui-même ($A \subseteq A$), soit par l'évènement impossible.

— L'évènement impossible implique tout évènement quelconque ($\varnothing \subseteq A$).

1.2.3 Opérations sur les évènements

Dans $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble de tous les évènements reliés à une expérience, on peut introduire plusieurs opérations.

1. **Réunion d'évènements**

   Étant donnés deux évènements A et B, leur réunion est l'évènement qui se réalise ssi au moins un des évènements A **ou** B se réalise. On écrit $A \cup B$ et on lit "A ou B" ou encore "A réunion B".

2. **Intersection d'évènements**

   Étant donnés deux évènements A et B, leur intersection est l'évènement qui se réalise si et seulement si au moins un des évènements A **et** B se réalise. On écrit $A \cap B$ et on lit "A et B" ou encore "A inter B".

   Remarque 1.2. Deux évènements A et B sont incompatible ou disjoints si $A \cap B = \varnothing$. Dans le cas contraire si $A \cap B \neq \varnothing$, on dit que les évènements sont compatibles.

   Partition (système complet) Des évènements $A_1, ..., A_n$ forment une partition s'ils sont deux à deux incompatibles et qu'il y a toujours l'un d'entre eux qui se réalise. Autrement dit, les conditions suivantes sont satisfaits :

   — $A_i \neq \emptyset, \ \ \forall i = 1, ..., n$

   — $A_i \cap A_j = \emptyset \ \ \forall i \neq j$ c'est-à-dire A_i et A_j sont disjoints deux à deux.

   — $\cup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$

3. **Différence d'évènements**

   Étant donnés deux évènements A et B, leur différence est l'évènement qui se réalise chaque fois que conjointement A se réalise et que B ne se réalise pas. On écrit $A - B$ et on lit "A moins B".

$$A - B = A \cap \overline{B} \ \ et \ \ \overline{B} = \Omega - B$$

Les opérations entre les évènements reviennent aux opérations respectives entre les ensembles des épreuves correspondantes, et donc les résultats des opérations entre les évènements sont encore des évènements reliés à la même expérience.

Conclusion 1 : Quand on manipule les évènements deux types de vocabulaire coexistent : l'un est probabiliste, l'autre est ensembliste. Le tableau suivant indique la correspondance entre les deux terminologies :

Notations	vocabulaire ensembliste	vocabulaire probabiliste
ω	élément de Ω	épreuve, réalisation, éventualité, ou résultat possible
Ω	ensemble plein	évènement certain
$\varnothing$	ensemble vide	évènement impossible
A	sous-ensemble ou partie de Ω	évènement
$\omega \in A$	ω appartient à A	l'épreuve ω réalise l'évènement A
$A^c, \overline{A}$	complémentaire de A	contraire de A
$A \cap B$	A inter B	A et B
$A \cup B$	A union B	A ou B
$A - B$	A moins B	A se réalise et non B
$A \cap B = \varnothing$	A et B disjoints	A et B incompatibles
$A \subseteq B$	A inclus dans B	l'évènement A entraîne l'évènement B A implique B
$A = B$	A est égal B	A entraîne B et B entraîne A A équivalent B

1.3 Probabilité d'un évènement

Soit Ω un ensemble fini ou dénombrable.

Définition 1.2. *On appelle probabilité sur* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ *une application* P *de* $\mathcal{P}(\Omega)$ *dans l'intervalle* $[0, 1]$ *telle que :*

1. $P(\Omega) = 1$.
2. *Pour toute suite d'évènements* $(A_i)_{n\geq 1}$ *deux à deux disjoints, on a*

$$P\Big(\cup_n A_i \Big) = \sum_n P(A_i)$$

.

Le triple $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ est appelé espace de probabilité ou espace probabilisé.

Proposition 1.1. *Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace de probabilités. Alors on a les propriétés suivantes :*

1. $0 \leq P(A) \leq 1$
2. $P(\varnothing) = 0$
3. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
5. *Si* $A \cap B = \varnothing$, *alors* $P(A \cap B) = P(\varnothing) = 0$
6. $P(A - B) = P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$

Proposition 1.2. *Soit $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ une suite d'évènements qui constituent une partition de Ω. Alors pour tout $B \in \mathcal{P}(\Omega)$, on a :*

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i)$$

faire un diagramme correspondant.

Cas particulier : Pour tous évènements A et B on a : $P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A})$, car l'ensemble $\{A, \overline{A}\}$ forme une partition de Ω.

Exemple 9 : Un sac contient des billes noires et rouges, portant une marque ou non. La probabilité d'observer une bille rouge et marquée est de 2/10, une bille marqué de 3/10 et une bille noire de 7/10.

1) Quelle est la probabilité d'observer une bille rouge ou marquée ?
2) Quelle est la probabilité d'observer une bille rouge et non marquée ?
3) Quelle est la probabilité d'observer une bille noire et non marquée ?

Solution : Soit N l'évènement "obtenir une billet noire", donc $P(N) = 7/10$.
M l'évènement "obtenir une billet marquée", donc $P(M) = 7/10$.
R l'évènement "obtenir une billet rouge", donc $P(R \cap M) = 2/10$.
1) $P(R \cup M) = P(R) + P(M) - P(R \cap M) = \big(1 - P(N)\big) + P(M) - P(R \cap M) = 4/10$.
2)$P(R \cap \overline{M}) = P(R - M) = P(R) - P(R \cap M) = (1 - \frac{7}{10}) - \frac{2}{10} = ...$
3)$P(N \cap \overline{M}) =??$
On a $P(N \cap \overline{M}) = P(N - M) = P(N) - P(N \cap M)$,
on cherche $P(N \cap M)$, donc on remarqur que l'ensemble $\{N, R\}$ forme une partition de Ω alors :
$P(M) = P(M \cap N) + P(M \cap R) \Longrightarrow P(M \cap N) = P(M) - P(M \cap R) = \frac{7}{10} - \frac{2}{10} = ...$

Exemple 10 : Lors d'une loterie, 300 billets sont vendus aux personnes. 5 billets sont gagnants. une personne achète 10 billets. Quelle est la probabilité pour que la personne gagne au moins un lot ?.

Solution : On a $\Omega = C_{300}^{10}$. Soit G l'évènement "la personne gagne au moins un lot".
$\overline{G}$ l'évènement "la personne ne gagne rien", donc
$P(\overline{G}) = \frac{card\overline{G}}{card^{O}mega} = \frac{C_{295}^{10}}{C_{300}^{10}}$. Alors $P(G) = 1 - P(\overline{G})$.

Exemple 11 : Un étudiant a les probabilités suivantes d'avoir la note i à un module, le module étant noté sur 10. Quelle est la probabilité que "l'étudiant valide son module" ?.

Note	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Proba	1/11	0	0	1/11	1/11	2/11	2/11	2/11	1/11	1/11	0

Solution : On note V l'évènement "l'étudiant valide son module", et A_i l'évènement "l'étudiant obtient la note i". A_i forment une partition de l'ensemble des notes possibles et l'on a donc : $P(V) = \sum_{i=0}^{10} P(V \cap A_i) = \sum_{i=5}^{10} P(A_i) = 8/11$.

1.4 Probabilité générale sur un ensemble fini

On considère une expérience aléatoire dont l'univers Ω compte n épreuves, tel que

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\} \ , \quad et \quad card(\Omega) = n.$$

La probabilité de l'évènement élémentaire $\{\omega_i\}$, $i = 1, ..., n$, (notée p_i) est la fréquence d'apparition du résultat ω_i au cours d'un grand nombre de répétition de l'expérience. On écrit $P\Big(\{\omega_i\}\Big) = p_i$ et alors :

$$\begin{pmatrix} épreuve & \omega_1 & \omega_2 & \dots & \omega_n \\ & \downarrow & \downarrow & \dots & \downarrow \\ probabilité & p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix} \quad tel\ que\ : \quad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

Soit $A = \cup_{i:\omega_i \in A}\{\omega_i\}$ un évènement, alors

$$P(A) = P(\cup_{i:\omega_i \in A}\{\omega_i\}) = \sum_{i:\omega_i \in A} P(\{\omega_i\}) = \sum_{i:\omega_i \in A} p_i \tag{1.1}$$

Le triple $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ s'appelle **espace probabilisé**.

Exemple 12 : On lance un dé **pipé**, où l'apparition de la face qui
porte 2 et 5 points est le double de l'apparition de la face qui porte un point
, l'apparition de la face 3 et 4 est le triple de l'apparition de la face une,
et l'apparition de la face 6 est un demi de l'apparition de la face une.
i.e si on pose $P(\{1\}) = p$, on trouve :

évènement élémentaire	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$	$\{5\}$	$\{6\}$
probabilité $P(\{i\})$	p	$2p$	$3p$	$3p$	$2p$	$\frac{p}{2}$

Déterminer les probabilité des évènements élémentaires de cette expérience aléatoire.

On a $\Omega = \{1, ..., 6\}$, et $\sum_{i=1}^{n} P\Big(\{i\}\Big) = 1 \Longrightarrow p + 2(2p) + 2(3p) + \dfrac{p}{2} = 1 \Longrightarrow p = ...$ (calculer).

Soient l'évènement A "Obtenir un chiffre pair" et B "obtenir un chiffre plus grand que 4".

Calculer $P(A)$**,** $P(A^c)$**,** $P(B)$**, et** $P(A \cap B)$**.**

Exemple 13 : On lance deux dés équilibrés, et on note S la somme des deux dés.

L'ensemble des valeurs possibles pour S est $\Omega = \{2, 3, ..., 12\}$.

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Par exemple $P(S = 4) = P(\{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}) = 3/36$

Les probabilités pour les valeurs possibles de S sont alors :

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(S = k)$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

Soient l'évènement A "au moins la somme de deux dés est égale à 7" et B "au plus la somme est égale à 4". Calculer $P(A)$, $P(A^c)$, $P(B)$, et $P(A \cap B)$.

1.4.1 Cas particulier : le cas équiprobabilité

On considère que toutes les épreuves ω_i sont **également vraisemblables**, c'est-à-dire :

$$P(\{\omega_i\}) = p_i = \frac{1}{n}, \quad \forall\, i = 1, ..., n \;\Leftrightarrow\; P(\{\omega_1\}) = ... = P(\{\omega_n\}) = \frac{1}{n}$$

On peut écrire donc :

$$\begin{pmatrix} \textit{épreuve} & \omega_1 & \omega_2 & \dots & \omega_n \\ & \downarrow & \downarrow & \dots & \downarrow \\ \textit{probabilité} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$$

Soit $A = \cup_{i:\omega_i \in A}\{\omega_i\}$ un évènement, alors la probabilité $P(A)$ est donnée par :

$$P(A) = P(\cup_{i:\omega_i \in A}\{\omega_i\}) = \sum_{i:\omega_i \in A} P(\{\omega_i\}) = \sum_{i:\omega_i \in A} \frac{1}{n} = \frac{card(A)}{card(\Omega)} \tag{1.2}$$

Attention Cette définition classique ou fréquentiste de probabilité utilise seulement pour les expériences où les événements élémentaires sont **équiprobables**, c'est-à-dire également vraisemblable.

Les épreuves sont **équiprobables**, c'est-à-dire **les probabilités des événements élémentaires sont égales**.

Exemple (suit) On prend l'exemple 2 (deux dés non pipés). Donc $\Omega = \{(i,j), 1 \leq i,j \leq 6\}$, $card(\Omega) = 36$ et $P(\{(i,j)\}) = \frac{1}{36}\ \forall i,j$.
Soit l'évènement A "les valeurs des deux dés sont identiques". donc :
$A = \{(1,1),...,(6,6)\}\ \ et\ \ P(A) = P\Big(\{(1,1),...,(6,6)\}\Big) = \frac{6}{36}$
Calculer $P(B)$ tel que B l'évènement "le dé 1 donne le chiffre 2 et le dé 2 donne un chiffre impair".
$P(B) =$ ....

1.5 Probabilité sur un ensemble dénombrable

Soit Ω un ensemble dénombrable (comme par exemple : $\mathbb{N}, \mathbb{N}^*, ...$). On veut construire une probabilité P sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$. Pour cela, on considère **une suite** $(p_n)_{n\geq 0}$ de **nombres positifs** telle que **la série** $\sum\limits_{n\geq 0} p_n$ soit **convergente** et de **somme 1**.
Soit $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ un évènement :

$$P(A) = \sum_{n, n\in A} p_n$$

On peut écrire donc :

$$\begin{pmatrix} \textit{épreuve} & \omega_1 & \omega_2 & \dots & \omega_n & \dots \\ & \downarrow & \downarrow & \dots & \downarrow & \dots \\ \textit{probabilité} & p_1 & p_2 & \dots & p_n & \dots \end{pmatrix}$$

On remarque que p_n est **un terme général d'une suite** dont la somme

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} p_i$$

donc

$$P(\Omega) = \sum_{n\in\Omega} p_n = \lim_{n\to+\infty} S_n = 1.$$

Exemple 14 : On lance une pièce équilibrée jusqu'à ce que pile apparaisse. Ω représente le nombre de lancer. Donc on a $\Omega = \mathbb{N}^*$. On a clairement

$p_1 = P(\{1\}) = 1/2, \quad p_2 = P(\{2\}) = 1/2^2, \quad p_3 = P(\{3\}) = 1/2^3$, et de façon générale

$p_n = P(\{n\}) = (1/2)^{n-1}\ (1/2) = (1/2)^n$

On remarque que p_n est un terme général d'une suite géométrique dont la somme $S_n = \sum_{i=1}^{n} p_i$, où $p_i = \dfrac{1}{2^i}$ est égale à 1 quand n tend vers ∞ :

$$\sum_{n\geq 1} p_n = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} p_i = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\ \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = \lim_{n\to+\infty}\ 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n = 1.$$

Soit A l'évènement "au moins le nombre de lancer est 3 et au plus 5", alors $A = \{3, 4, 5\}$, donc :

$$P(A) = P\Big(\{3,4,5\}\Big) = P\Big(\{3\}\cup\{4\}\cup\{5\}\Big) = P\Big(\{3\}\Big) + P\Big(\{4\}\Big) + P\Big(\{5\}\Big)$$
$$= (1/2)^3 + (1/2)^4 + (1/2)^5 = 0.22.$$

1.6 Probabilité sur un ensemble infini (continu)

Le cas d'un espace fini se rencontre de temps en temps mais ce n'est pas le plus fréquent dans le calcul des probabilités. Lorsque l'espace Ω n'est pas fini ou dénombrable, le calcul des probabilités utilise **les techniques d'intégration**.

On donne par la suite quelques exemples de probabilités sur des **espaces continus**. Soit $\Omega =]a, b[$ un ensemble **infini**. Dans ce cas, On considère une tribu $\mathcal{P}(\Omega) = \mathcal{B}_{[a,b]}$, qui s'appelle tribu borélienne.

Supposons que l'on dispose d'**une fonction positive** f définie sur l'intervalle $]a, b[$ et telle que

$$\int_a^b f(x)\ dx = 1 \tag{1.3}$$

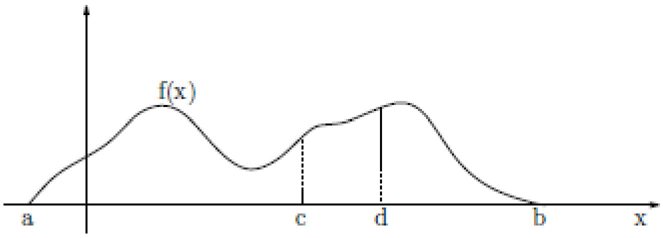
f s'appelle **une densité de probabilité**.

On peut alors définir une probabilité P sur $\Big([a, b], \mathcal{B}_{[a,b]}\Big)$ de la façon suivante :

Pour tout intervalle $A = [c, d[\subset [a, b]$

$$P(A) = \int_A f(x)\ dx = \int_c^d f(x)\ dx$$

Faire un tableau qui résume cette section 1.4.



Probabilité sur un intervalle via une densité

Exemple suit : On prend l'exemple 4, où $\Omega = [0, 10] \subset \mathbb{R}$. On cherche à modéliser le temps d'attente T d'un passager qui arrive à l'arrêt du bus.

N'ayant pas d'information sur l'heure théorique de passage du bus et l'heure d'arrivée du passager, on peut suppose que le temps d'attente est uniforme, c'est-à-dire pour tout $0 < c < d < 10$:

$$P\Big(T \in [c, d[\Big) = \frac{d-c}{10} = \int_c^d f(x)\,dx = \int_0^{10} \tfrac{1}{10}\,dx,$$

où la fonction f est constante égale à $1/10$ sur l'intervalle $[0, 10]$ de sorte que $\int_0^{10} \frac{1}{10}\,dx = 1$.

Chapitre 2

Probabilité conditionnelle

2.1 Définition

Exemple 1 : Une urne contient 5 boules indiscernables au toucher : deux bleues (B) et trois rouges (R). On dispose également de deux sacs contenant des jetons :
l'un est bleu et contient un jeton bleu (b) et trois jetons rouges (r),
l'autre est rouge et contient deux jetons bleus (b) et deux jetons rouges (r).
On extrait une boule de l'urne, puis on tire un jeton dans le sac qui est de la même couleur que la boule tirée.
1) Combien y-a-t-il d'issues possibles ?
2) A l'aide d'un arbre pondéré, déterminer la probabilité de chacune de ses issues.
3) Déterminer la probabilité de l'évènement
A : " la boule et le jeton extraits sont de la même couleur ".

Soit A un évènement tel que $P(A) > 0$.

Définition 2.1. *On appelle probabilité conditionnelle de l'évènement B par rapport l'évènement A, le nombre :*

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \tag{2.1}$$

La probabilité conditionnelle $A \mid B$ est la probabilité que l'évènement A se réalise **sachant que** l'évènement B est réalisé.

Exemple 2 : Dans une famille qui comporte deux enfants, l'un est une fille.
On cherche la probabilité que l'autre soit un garçon. On choisit $\Omega = \{FF, FG, GF, GG\}$.
Cet espace est muni de la probabilité uniforme. Soient
A l'évènement "un des enfants est un garçon" $A = \{GF, FG, GG\}$
B l'évènement "un des enfants est une fille" $B = \{FG, GF, FF\}$.
On veut chercher $P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}$.

Exemple 3 : Parmi 10 pièces mécaniques, 4 sont défectueuses. On prend successivement deux pièces au hasard et sans remise. Quelle est la probabilité pour que les deux pièces soient bonnes ?
Soit A l'évènement "les deux pièces sont bonnes"
Méthode 1 : le nombre de cas possibles est $card(\Omega) = A_{10}^2$ et
le nombre de cas favorable est $card(A) = A_6^2$. donc $P(A) = \frac{1}{3}$.
Méthode 2 : Soient A_1 l'évènement "la première pièce est bonne" et
A_2 l'évènement "la seconde pièce est bonne". C'est évident que $A = A_1 \cap A_2$,
donc $P(A) = P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)\ P(A_2 \mid A_1) = \frac{6}{10}\ \frac{5}{9} = \frac{1}{3}$.

Si $P(B) > 0$ alors on peut définir la probabilité conditionnelle de A par rapport à l'événement B comme suite :

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \tag{2.2}$$

Des formules (6.1) et (6.2), On constate que :

$$P(A \cap B) = P(B \mid A)\ P(A) = P(A \mid B)\ P(B)$$

2.2 Formule des probabilités totales

Cas simple : soient A et B deux évènements, avec $P(B)$ et $P(\overline{B})$ non nuls. Alors :

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) = P(A \mid B)P(B) + P(A \mid \overline{B})P(\overline{B})$$

Cas général : soient $B_1, ..., B_n$ une partition de Ω et A un évènement. Alors :

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A \mid B_i)P(B_i)$$

2.3 Formule de Bayes

Soient $B_1, .., B_n$ une partition de Ω et A un évènement tel que $P(A) > 0$. Alors pour tout $1 \leq i \leq n$

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(B_i \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A \mid B_i)\ P(B_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(A \mid B_i)\ P(B_i)}$$

cette formule est souvent utile.

Exemple 4 : En cas de migraine trois patient sur cinq prennent de l'aspirine, deux sur cinq prennent un médicament M. Avec l'aspirine, 75% des patients sont soulagés. Avec le médicament M, 90% des patients sont soulagés.

1) Quel est le taux global de patients soulagés ?

2) Sachant que le patient est soulagé, quelle est la probabilité que le patient ait pris de l'aspirine ? le médicament M ?.

Solution :

Soit A l'évènement "Le patient prend de l'aspirine", donc $P(A) = \frac{3}{5}$,
et soit M l'évènement "Le patient prend du médicament", donc $P(M) = \frac{2}{5}$.
On remarque que $\{A, M\}$ forme **une partition** de Ω.
Et S l'évènement "Le patient soit soulagé" .
On a $P(S \mid A) = 0.75$ et $P(S \mid M) = 0.9$.

1) On applique **la formule de probabilité totale** sur le système complet d'évènements $\{A, M\}$, on obtient

$$\begin{aligned} P(S) = P(S \cap A) + P(S \cap M) &= P(S \mid A)\ P(A) + P(S \mid M)\ P(M) \\ &= 0.75\ \ \frac{3}{5} + 0.9\ \ \frac{2}{5} = 0.81 \end{aligned}$$

2) On applique **la formule de Bayes**, on obtient :

$$\begin{aligned} P(A \mid S) = \frac{P(A \cap S)}{P(S)} &= \frac{P(S \mid A)\ P(A)}{P(S)} \\ &= \frac{0.75\ \ \frac{3}{5}}{0.81} = 0.56 \end{aligned}$$

Et

$$P(M \mid S) = \frac{P(M \cap S)}{P(S)} = \frac{P(S \mid M)\ P(M)}{P(S)}$$
$$= \frac{0.9 \quad \frac{2}{5}}{0.81} = 0.44$$

2.4 Indépendance d'évènements

Deux évènements sont indépendants lorsque le résultat de l'un n'influence pas le résultat de l'autre.

Définition 2.2. *Deux évènements A et B sont indépendants si*

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

qui se généralise en

$$P(\cap_{i=1}^{n} A_i) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i)$$

pour n évènements $A_1, ..., A_n$.

Attention : la réciproque est fausse.

Remarques :

1. si $P(A) > 0$ et $P(B) > 0$ et les évènements A et B sont indépendants alors

$$P(A \mid B) = P(A) \quad et \quad P(B \mid A) = P(B)$$

2. Les évènements $\{A_1, ..., A_k\}$ sont indépendants deux à deux si

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j) \quad \textit{pour tous indices i, j.}$$

Exemple 5 : On prend l'exemple 1, où $\Omega = \{PP, FP, PF, FF\}$.C'est évident que cet espace muni de la probabilité uniforme. Soient A l'évènement "la première pièce donne Pile", B l'évènement "la seconde pièce donne Face" et C l'évènement "les deux pièces donnent le même résultat".

$A = \{PF, PP\} \quad P(A) = \frac{2}{4} = 0.5$

$B = \{PF, FF\} \quad P(B) = \frac{2}{4} = 0.5$

$C = \{PP, FF\} \quad P(C) = \frac{2}{4} = 0.5$

$A \cap B = \{PF\} \quad P(A \cap B) = \frac{1}{4} = P(A)\ P(B)$

$A \cap C = \{PP\} \quad P(A \cap C) = \frac{1}{4} = P(A)\ P(C)$

$B \cap C = \{FF\} \quad P(B \cap C) = \frac{1}{4} = P(C)\ P(B)$

$A \cap B \cap C = \emptyset \quad P(A \cap B \cap c) = 0.$

Ainsi les évènements A, B et C sont 2 à 2 indépendants mais pas indépendants.