Chapitre 02 : Intégrales généralisées

1. Définitions et Propriétés
2. Critères de Convergence
3. Convergence absolue et semi-convergente

1) Définitions et Propriétés

Définition 01: Soit $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

On dit que f est localement intégrable si elle est intégrable sur tout sous-intervalle fermé, borné De I .

Exemples : 1) Toute fonction continue sur $I \subseteq \mathbb{R}$ est localement intégrable.

2) Les fonctions en escalier sont localement intégrables.

3) Toute fonction monotone est localement intégrable.

Définition 02 :

Soit $f : I = [a \quad b[\to \mathbb{R}$ localement intégrable. Posons : $F(x) = \int_a^x f(t)dt$

Si $\lim_{x\to b} F(x) = l$ (finie), on dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est convergente.

On appelle la limite l l'intégrale généralisée de f sur$[a \quad b[$. Et on écrit :

$$\int_a^b f(t)dt = l.$$

Dans le cas contraire $\left(\lim_{x\to b} F(x) = \pm\infty \text{ ou elle n'existe pas}\right)$, on dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est divergente.

Exemples :

1) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{(t+1)^2} dt$? $\quad F(x) = \int_1^x \frac{1}{(t+1)^2} dt = \left[\frac{-1}{1+t}\right]_1^x = \frac{-1}{1+x} + \frac{1}{2}$

$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \frac{1}{2}$. Alors $\int_1^{+\infty} \frac{1}{(t+1)^2} dt$ convergente et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{(t+1)^2} dt = \frac{1}{2}$.

2) $\int_0^{+\infty} t\, e^{-t} = ?$ $\quad F(x) = \int_0^{x} t\, e^{-t} dt$ $\quad$ Par partie : $\begin{cases} u = t \\ v' = e^{-t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = 1 \\ v = -e^{-t} \end{cases}$

$F(x) = [-t\, e^{-t} - e^{-t}]_0^x = 1 - xe^{-x} - e^{-x}$

$\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$ Alors $\int_0^{+\infty} t\, e^{-t}$ convergente et $\int_0^{+\infty} t\, e^{-t} = 1$.

3) $\int_0^1 \frac{dt}{1-t} = ?$ $\; F(x) = \int_0^x \frac{dt}{1-t} = -ln|1-x|$

$\lim_{x\to 1} F(x) = +\infty$ Alors $\int_0^1 \frac{dt}{1-t}$ est divergente.

Remarque : Dans le cas $I =]a \;\; b]$ Posons : $F(x) = \int_x^b f(t)dt$

Si $\lim_{x\to a} F(x) = l$ (finie), on dit que $\int_a^b f(t)dt$ est convergente.

Si $\lim_{x\to a} F(x) = \pm\infty$ ou elle n'existe pas , on dit que $\int_a^b f(t)dt$ est divergente.

Exemples :

1) $\int_0^1 \ln(t)\, dt = ?$ $\; F(x) = \int_x^1 \ln(t)\, dt$ Par partie, $F(x) = -1 - x\, ln(x) + x$

$\lim_{x\to 0} F(x) = -1$ Alors $\int_0^1 \ln(t)\, dt$ est convergente, et $\int_0^1 \ln(t)\, dt = -1.$

2) $\int_{-\infty}^{0} \frac{\mathrm{dt}}{\mathrm{t}^2 + 2\mathrm{t} + 2} dt = ?$ $\quad F(x) = \int_x^0 \frac{\mathrm{dt}}{\mathrm{t}^2 + 2\mathrm{t} + 2} dt = \int_x^0 \frac{\mathrm{dt}}{(\mathrm{t}+1)^2 + 1} dt = \left(arctan(t+1)\right)_x^0$

$F(x) = \arctan(1) - \arctan(x+1) = \frac{\pi}{4} - \arctan(x+1)$

$\lim_{x\to-\infty} F(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}$ Alors $\int_{-\infty}^{0} \frac{\mathrm{dt}}{\mathrm{t}^2 + 2\mathrm{t} + 2} dt$ est convergente, et $\int_{-\infty}^{0} \frac{\mathrm{dt}}{\mathrm{t}^2 + 2\mathrm{t} + 2} dt = \frac{3\pi}{4}$.

Définition 03 : Soit $f\ :\ ]a\quad b[\ \rightarrow\ \mathbb{R}$ localement intégrable.

On dit que $\int_a^b f(t)dt$ est convergente s'il $c \in\ ]a\quad b[$ tel que les intégrales :

$\int_a^c f(t)dt$ et $\int_a^c f(t)dt$ Soit convergentes. Et $\int_a^b f(t)dt = l_1 + l_2$

Avec : $\lim\limits_{x\to a} \int_x^c f(t)dt = l_1$ et $\lim\limits_{x\to b} \int_c^x f(t)dt = l_2$

Exemples :

1) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \int_{-\infty}^{c} \frac{dt}{1+t^2} + \int_{c}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$ (on peut prendre $c = 0$)

$$\int_{-\infty}^{c} \frac{dt}{1+t^2} = \lim_{x\to-\infty} \int_x^0 \frac{dt}{1+t^2} = \lim_{x\to-\infty} -\arctan(x) = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{c}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \lim_{x\to+\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \pi \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} \text{ est convergente} \right)$$

2) $\int_{-\infty}^{0} \frac{dt}{t(t-1)} = \int_{-\infty}^{c} \frac{dt}{t(t-1)} + \int_{c}^{0} \frac{dt}{t(t-1)}$

$$\int_{-\infty}^{c} \frac{dt}{t(t-1)} = \lim_{x\to-\infty} \int_x^{-2} \frac{dt}{t(t-1)} = \lim_{x\to-\infty} \left[-\int_x^{-2} \frac{dt}{t} + \int_x^{-2} \frac{dt}{t-1} \right] = \lim_{x\to-\infty} \left(\ln(2) + ln\left|\frac{x-1}{x}\right| \right) = \ln(2)$$

.

$$\int_c^0 \frac{dt}{t(t-1)} = \lim_{x\to 0} \int_{-2}^{x} \frac{dt}{t(t-1)} = \lim_{x\to 0}\left[-\int_{-2}^{x}\frac{dt}{t} + \int_{-2}^{x}\frac{dt}{t-1}\right] = \lim_{x\to 0}\left(-\ln\left(\frac{3}{2}\right) + ln\left|\frac{x}{x+1}\right|\right) = -\infty$$

$$\int_c^0 \frac{dt}{t(t-1)} \text{ est divergente, alors } \int_{-\infty}^{0} \frac{dt}{t(t-1)} \text{ est divergente.}$$

Remarque : 1) la nature de l'intégrale de f sur $]a \quad b[$ ne dépend pas de choix de réel c .

2) Attention : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt \neq \lim_{x\to+\infty} \int_{-x}^{x} f(t)dt$

Exemple : $\int_{-x}^{x} tdt = \left[\frac{1}{2}t^2\right]_{-x}^{x} = 0$ mais $\int_{-\infty}^{+\infty} tdt$ est divergente.

Propriétés : Soient $f, g : [a \quad b[\rightarrow \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On a

1) Si $\begin{cases} \int_a^b f(t)dt \text{ convergente} \\ \int_a^b g(t)dt \text{ convergente} \end{cases}$ Alors $\begin{cases} \int_a^b (f(t)+g(t))dt \quad \text{convergente} \\ \int_a^b \alpha f(t)dt \quad \text{convergente} \end{cases}$

2) Si $\int_a^b f(t)dt$ divergente (ou $\int_a^b g(t)dt$ divergente) Alors $\begin{cases} \int_a^b (f(t)+g(t))dt \text{ divergente} \\ \int_a^b \alpha f(t)dt \quad \text{divergente} \end{cases}$

3) Si $\begin{cases} \int_a^b f(t)dt \text{ divergente} \\ \int_a^b g(t)dt \text{ divergente} \end{cases}$ on ne peut rien conclure.

Exemple :

Soient : $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t+1}$ sont divergentes

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t} + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t+1} = \lim_{x\to+\infty} lnx(x+1) = +\infty \text{ Alors } \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t} + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t+1} \text{ divergente .}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t} \text{ - } \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t+1} = \lim_{x\to+\infty} \ln(2) + ln\frac{x}{x+1} = \ln(2) \text{ Alors : } \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t} \text{ - } \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t+1} \text{ convergente.}$$

Intégrales de Riemann : $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$, $\int_0^{1} \frac{dt}{t^\alpha}$, $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ On a : $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} = \int_0^{1} \frac{dt}{t^\alpha} + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$

Pour $\alpha = 1$: $\begin{cases} \int_0^1 \frac{dt}{t} = \lim_{x\to 0} \int_x^1 \frac{dt}{t} = \lim_{x\to 0}[-ln|x|] = +\infty \\ \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t} = \lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{dt}{t} = \lim_{x\to+\infty} [ln|x|] = +\infty \end{cases}$

Pour $\alpha < 1$: $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha} = \lim_{x\to 0} \int_x^1 \frac{dt}{t^\alpha} = \lim_{x\to 0} \int_x^1 t^{-\alpha} dt = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1-\alpha} [1 - x^{1-\alpha}] = \frac{1}{1-\alpha}$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} = \lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{dt}{t^\alpha} = \lim_{x\to+\infty} \int_1^x t^{-\alpha} dt = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1-\alpha} [x^{1-\alpha} - 1] = +\infty$$

Pour $\alpha > 1$: $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha} = \lim_{x\to 0} \int_x^1 \frac{dt}{t^\alpha} = \lim_{x\to 0} \int_x^1 t^{-\alpha} dt = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1-\alpha} [1 - x^{1-\alpha}] = +\infty$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} = \lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{dt}{t^\alpha} = \lim_{x\to+\infty} \int_1^x t^{-\alpha} dt = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1-\alpha} [x^{1-\alpha} - 1] = \frac{1}{\alpha-1}$$

Conclusion :

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{dt}{t^{\alpha}} \begin{cases} \text{convergente si } \alpha>1 \\ \text{divergente si } \alpha\leq 1 \end{cases} \quad , \quad \int_{0}^{1} \frac{dt}{t^{\alpha}} \begin{cases} \text{convergente si } \alpha<1 \\ \text{divergente si } \alpha\geq 1 \end{cases}$$

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{dt}{t^{\alpha}} \text{ est divergente.}$$

Intégrale de Bertrand : $\displaystyle\int_{a}^{+\infty} \frac{dt}{t\ln^{\beta}(t)} \quad , \quad a>1$

$$F(x)=\int_{a}^{x} \frac{dt}{t\ln^{\beta}(t)}$$ Par un changement de variable : $u=\ln(t)$

Pour $\beta=1$ $\quad F(x)=\ln(\ln(x))-\ln(\ln(\mathrm{a}))$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\ln(\ln(x))-\ln(\ln(\mathrm{a}))\right)=+\infty$.

Pour $\beta\neq 1$ $\quad F(x)=\frac{1}{1-\beta}\left[(\ln(t))^{1-\beta}\right]_{a}^{x}=\frac{1}{1-\beta}\left((\ln(x))^{1-\beta}-(\ln(a))^{1-\beta}\right)$

$$\lim_{x\to+\infty} F(x)=\begin{cases} +\infty & \beta<1 \\ \dfrac{(\ln(a))^{1-\beta}}{\beta-1} & \beta>1 \end{cases} \quad \text{Alors : } \int_{a}^{+\infty} \frac{dt}{t\ln^{\beta}(t)} \text{ est } \begin{cases} \text{Convergente si } \beta>1 \\ \text{Divergente si } \beta\leq 1 \end{cases}$$

2) Convergence des intégrales des fonctions positives :

Soient f,g : $[a \quad b[\ \to \mathbb{R}_+ \quad (f,\ g\ \geq 0)$ Localement intégrables

Théorème (01) : (Critère de comparaison)

Si $f(t)\leq g(t)$ sur$[a \quad b[$ Alors on a $\begin{cases} \displaystyle\int_{a}^{b} g(t)dt \text{ convergente } \Rightarrow \int_{a}^{b} f(t)dt \text{ convergente} \\ \displaystyle\int_{a}^{b} f(t)dt \text{ divergente } \Rightarrow \int_{a}^{b} g(t)dt \text{ divergente} \end{cases}$

Exemples : 1) $\int_{1}^{+\infty} e^{-t^2} dt$

On a sur $[1 \quad +\infty[$: $e^{-t^2} \leq e^{-t}$ et $\int_{1}^{+\infty} e^{-t} dt = \lim_{x \to +\infty} (e^{-1} - e^{-x}) = e^{-1}$

$\int_{1}^{+\infty} e^{-t} dt$ Convergente alors $\int_{1}^{+\infty} e^{-t^2} dt$ est convergente.

2) $\int_{1}^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2} dt$ On a pour $t \in [1 \quad +\infty[$ $\frac{\sin^2(t)}{t^2} \leq \frac{1}{t^2}$

$\int_{1}^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ Intégrale de Riemann convergente $(\alpha > 1)$ alors $\int_{1}^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2} dt$ convergente.

Théorème (02) : (Critère d'équivalence)

Si $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(t)}{g(t)} = 1$ On dit que les deux fonctions f et g sont équivalentes.

Alors les intégrales $\int_{a}^{b} f(t) dt$ et $\int_{a}^{b} g(t) dt$ sont de même nature.

Exemples : 1) $\int_{1}^{+\infty} \frac{t+1}{t(t^2+1)}$ $f(t) = \frac{t+1}{t(t^2+1)}$

On a $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(t)}{\frac{1}{t^2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{t+1}{t(t^2+1)} t^2 = 1$alors f et $g(t) = \frac{1}{t^2}$ sont équivalentes au voisinage de $(+\infty)$.

On sait que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\, dt$ de Riemann convergente $(\alpha > 1)$ Alors $\int_1^{+\infty} \frac{t+1}{t(t^2+1)} dt$ est convergente .

.

2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin(t)} dt$ On a $\lim_{x\to 0} \frac{t}{\sin(t)} = 1$ alors $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin(t)} dt$ et $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\mathrm{t}} dt$ sont de même nature.

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\mathrm{t}} dt$ de Riemann divergente $(\alpha = 1)$alors $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin(t)} dt$ est divergente.

Remarque : Pour chercher l'équivalence des fonctions on peut utiliser les développements limités.

Exemples : 1) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{ln(1-t^2)}{t^2}\, dt$

On a au voisinage de zéro :$ln(1-t^2) = -t^2 - \frac{1}{2}t^4 - \frac{1}{3}t^6 + o(t^6)$

$$\frac{ln(1-t^2)}{t^2} = -1 - \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{3}t^4 + o(t^4)$$

Alors $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{ln(1-t^2)}{t^2}\, dt$ est convergente, comme sommes des intégrales convergentes.

2) $\int_0^1 \frac{dt}{e^t - \cos(t)}$

On a au voisinage de zéro $e^t = 1 + t + o(t)$ et $\cos(t) = 1 + o(t)$

$e^t - \cos(t) = t + o(t)$ (Veut dire $e^t - \cos(t) \sim t$

$\int_0^1 \frac{1}{t} dt$ est Divergente, alors $\int_0^1 \frac{dt}{e^t - \cos(t)}$ est divergente.

Théorème (03) : (Critère de Cauchy)

Soit f une fonction localement intégrable sur $[a \quad b[$.

$\int_a^b f(t)dt$ convergente si seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists c \in [a \quad b[\,, \forall x, x' \in [a \quad b[\,: \left(x > c \text{ et } x' > c \implies \left| \int_x^{x'} f(t)dt \right| < \varepsilon \right)$$

Théorème (04) : (Critère d'Abel)

Soient f, g deux fonctions localement intégrables sur $[a \quad b[$.

$$\text{Si} \begin{cases} f \text{ monotone et } \lim\limits_{x \to b} f(t) = 0 \\ \text{Il existe } M > 0 \text{ tel que } \forall x \in [a \quad b[\ : \left| \int_a^b g(t)\,dt \right| \leq M \end{cases}$$

Alors : $\int_a^b f(t)g(t)dt$ Est convergente.

Exemples : 1) $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$

On a $f(t) = \frac{1}{t}$ Décroissante sur $[1 \ +\infty[$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(t) = 0$

Et $\left|\int_1^x \sin(t)\,dt\right| = |\cos(1) - \cos(x)| \leq |\cos(1)| + |\cos(x)| \leq 2$

$\left|\int_1^{+\infty} \sin(t)\,dt\right| \leq 2$, Alors d'après Abel l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt$ est convergente.

3) Convergence absolue et semi convergence :

Soit f une fonction localement intégrable sur $[a \quad b[$.

Définition (01) :

On dit que $\int_a^b f(t)dt$ est absolument convergente si seulement si $\int_a^b |f(t)|dt$ est convergente.

Définition (02) :

On dit que $\int_a^b f(t)dt$ est semi convergente si $\int_a^b f(t)dt$ est convergente et $\int_a^b |f(t)|dt$ n'est Pas convergente.

Théorème : $\int_a^b |f(t)|dt$ convergente $\Longrightarrow \int_a^b f(t)dt$ convergente

Exemple : 1) $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}\,dt$ On a $\left|\frac{\cos(t)}{t^2}\right| \leq \frac{1}{t^2}$

$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ est convergente (Riemann)et $\int_1^{+\infty} \left|\frac{\cos(t)}{t^2}\right| dt$ est absolument Convergente.

Alors $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}\,dt$ est convergente.