REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
Université Larbi Ben M'Hidi Oum El Bouaghi

Cours Modélisation géométrique

Chapitre 1: transformations bidimensionnelles

Dr.Belhouchette K

Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux transformations géométriques 2D telles que :
translation, changement d'échelle, rotation, etc.

- Translation
- Rotation
- Homothétie
- Symétrie
- Représentation matricielle
- Interpolation
- Transformation avancées

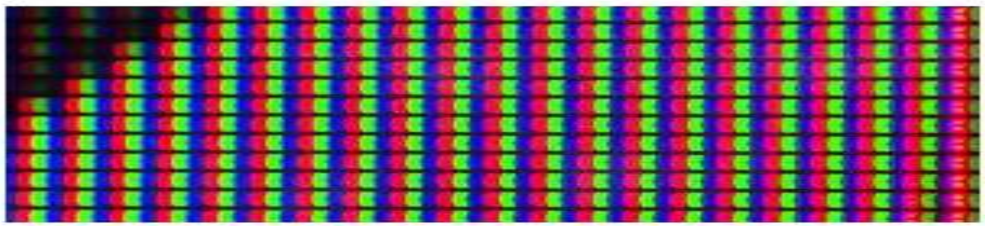
Introduction

Il existe deux types de transformations sur les pixels d'une image :

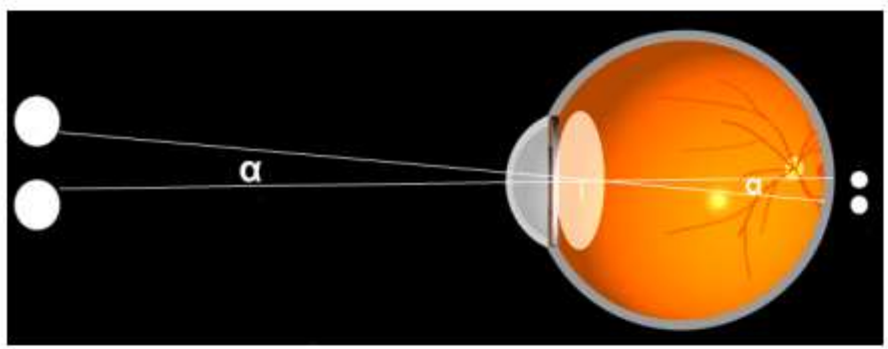
- Les transformations qui modifient les intensités des pixels.
- Les transformations géométriques qui modifient les positions des pixels.

Introduction

pixel



pixels



pouvoir séparateur de l'oeil

Introduction

Ce chapitre est consacré aux transformations géométriques qu'on peut appliquer sur une image, telles que : translation, changement d'échelle, rotation, etc.

Une transformation géométrique, est l'ensemble des transformations pouvant être appliquées aux pixels de l'image sans considérer l'intensité. Se qui permet de créer une nouvelle image en modifiant les positions des pixels de l'image initiale.

Applications Pratiques des Transformations Géométriques

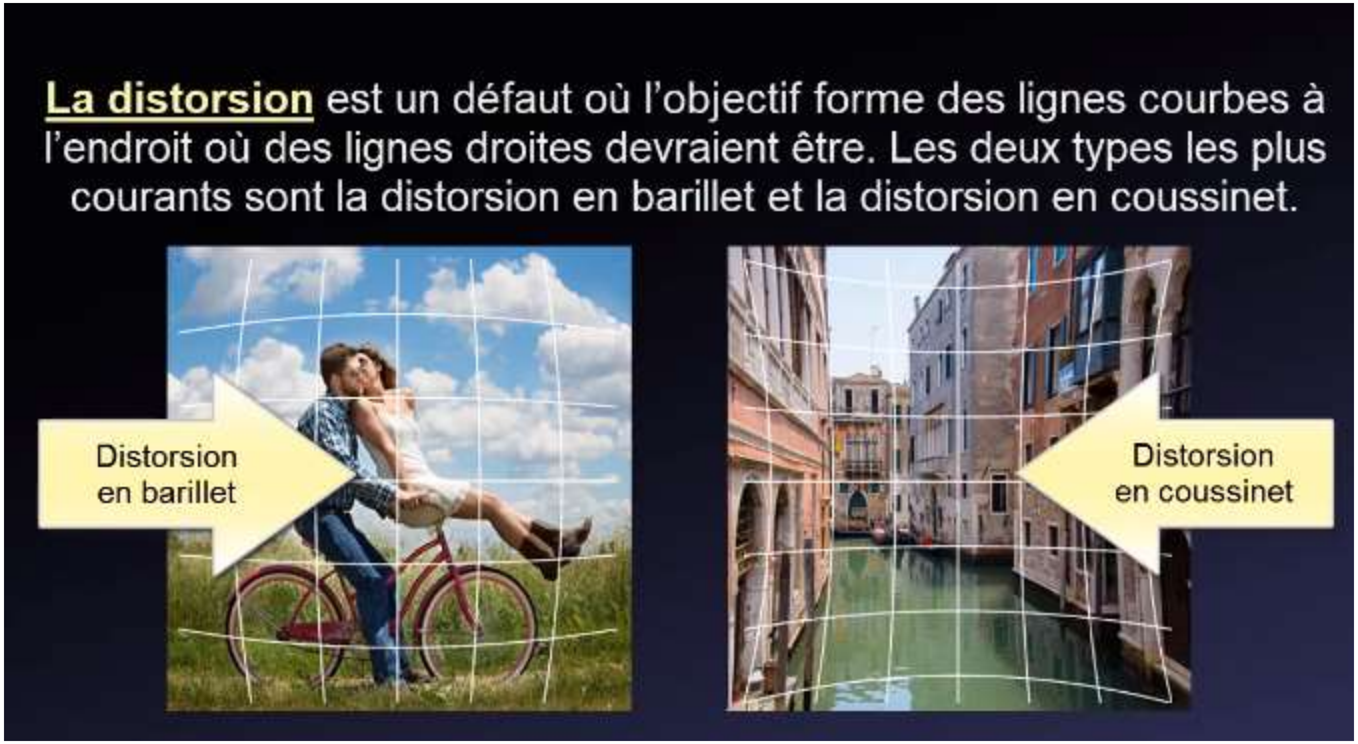
Correction de la Distorsion: Les lentilles de caméra introduisent souvent des distorsions dans les images, ce qui peut altérer la forme des objets. Les transformations géométriques sont utilisées pour corriger ces distorsions, garantissant que les objets sont représentés avec précision.

Suivi d'Objets et Détection d'Objets: Lorsque des objets se déplacent dans une scène, les transformations géométriques doivent être appliquées pour suivre leur trajectoire. Les algorithmes de détection d'objets utilisent également des transformations pour détecter des objets malgré les variations d'échelle et de perspective.

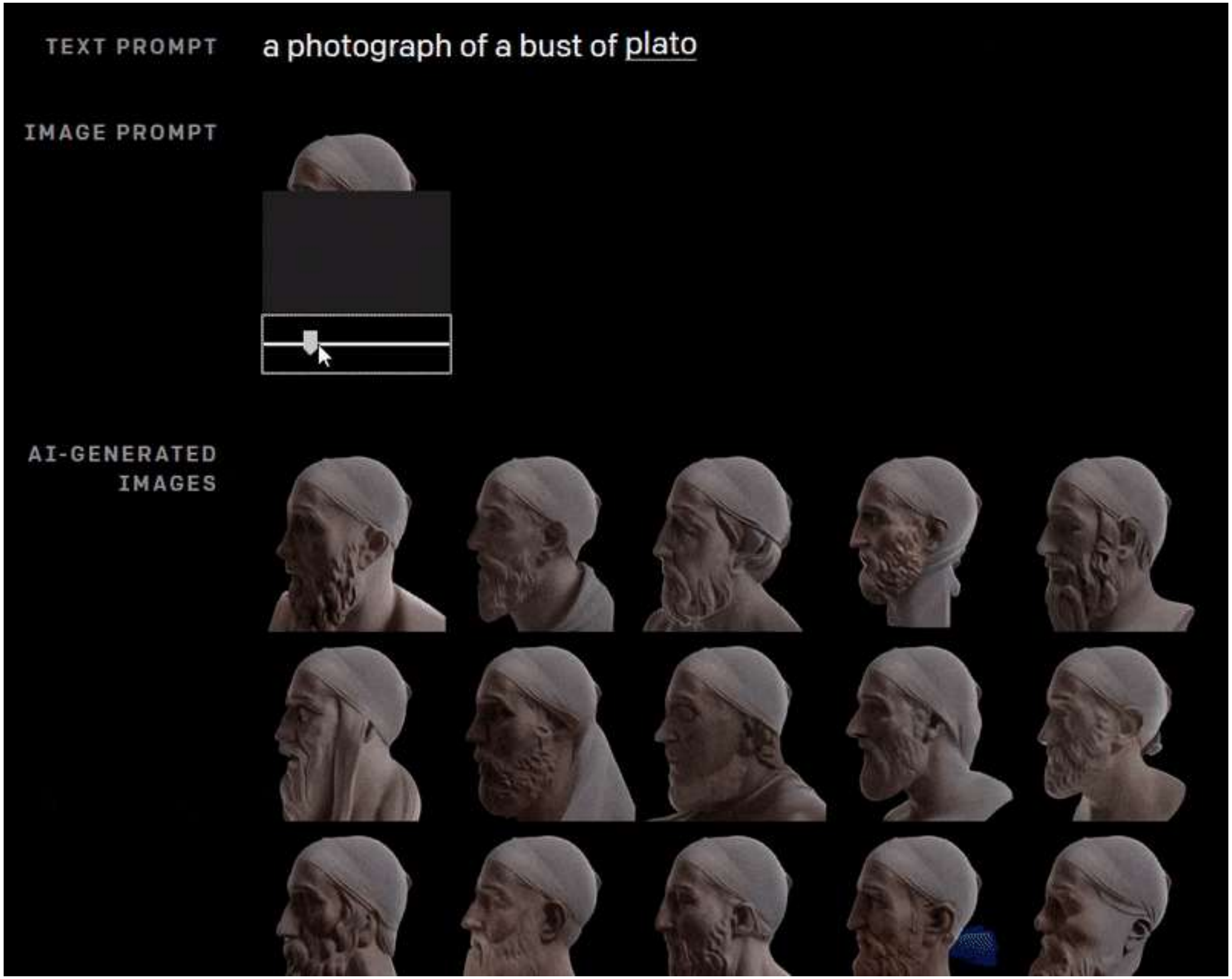
Stéréovision et Reconstruction 3D: La stéréovision implique l'utilisation de plusieurs caméras pour capturer une scène sous différents angles. Les transformations géométriques sont essentielles pour aligner les images capturées par ces caméras et reconstruire la structure tridimensionnelle de la scène.

Augmentation de la Réalité: Dans les applications d'AR, les objets virtuels doivent être superposés avec précision sur le monde réel. Les transformations géométriques sont utilisées pour ajuster la position et l'orientation des objets virtuels en fonction de la perspective de la caméra.

Applications Pratiques des Transformations Géométriques

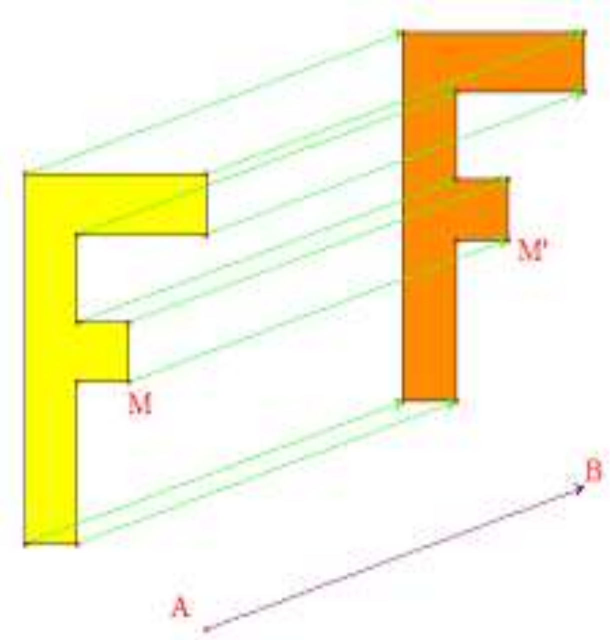


Applications Pratiques des Transformations Géométriques



Translation

Une translation permet de faire glisser une figure parallèlement à une droite sans la déformer ni la retourner.



Translation

En mathématique une translation est définie par un vecteur de composantes (Tx, Ty);

Sous l'effet de cette translation, un point (x,y) est transformé en un point (x', y').

Le système d'équation qui reflète cette transformation est:

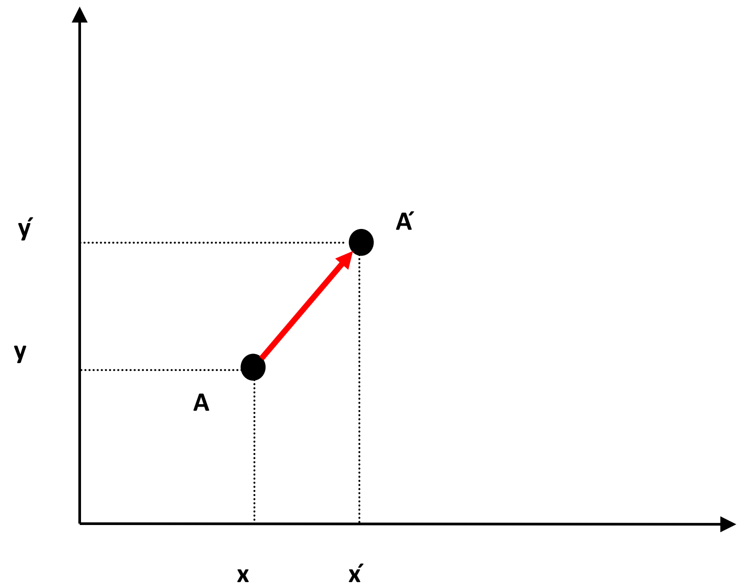
x' = x + Tx

y' = y + Ty

Où

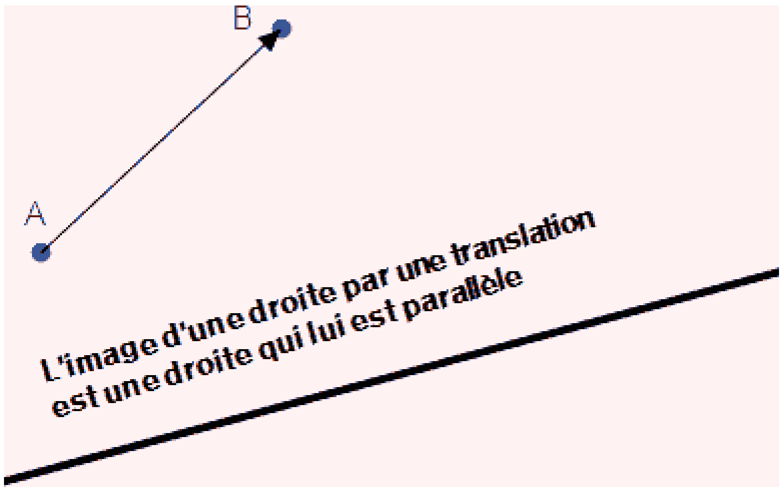
Sous forme matricielle :

$[x' \; y']^T = [x \; y]^T + T$

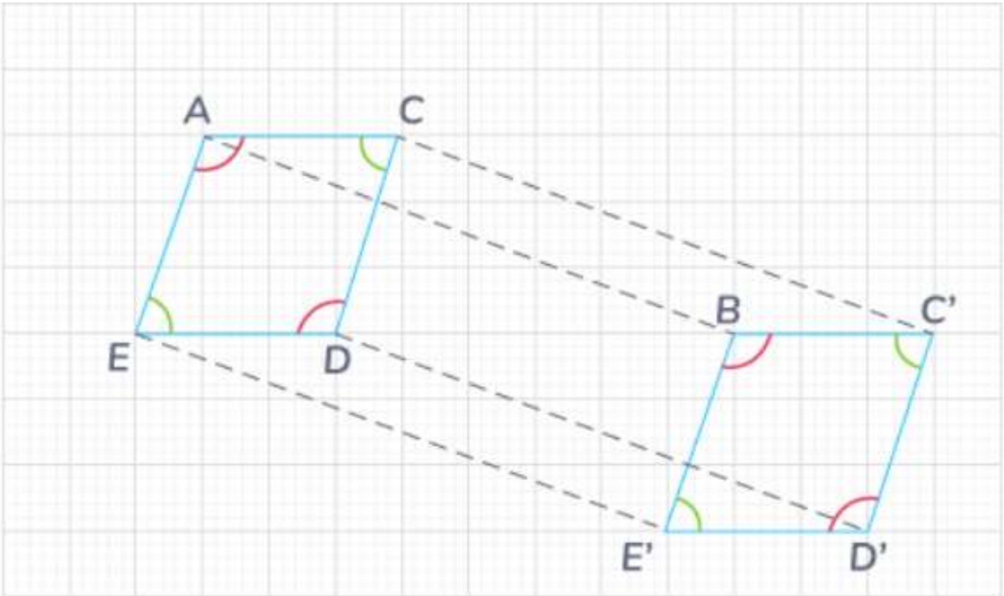


Propriétés de la translation

1. Conserve la longueur des segments de droite;



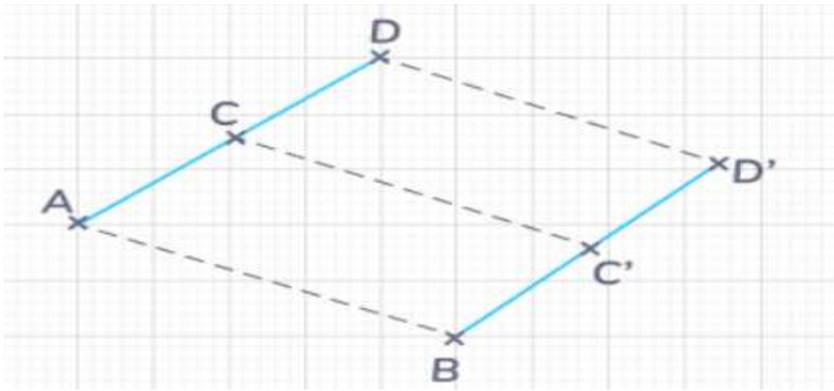
2. Conserve la mesure des angles;

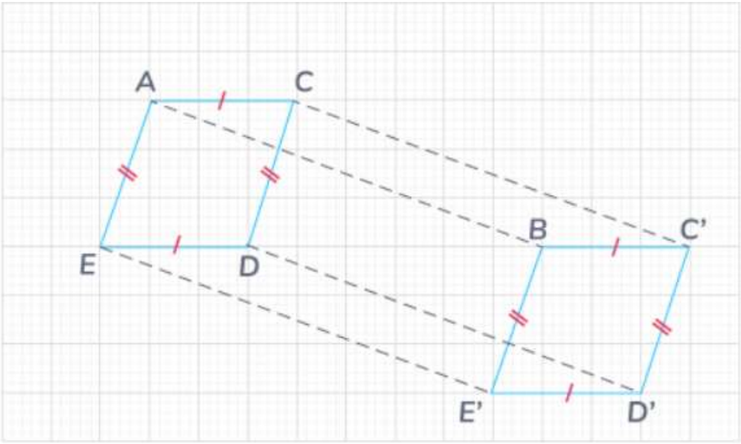


Propriétés de la translation

3. Conserve l’ordre des points, c’est-à-dire que si un point se trouve au milieu de l’un des côtés d’une figure, son image se retrouvera au milieu du côté correspondant de l’image de cette figure;

4. Conserve les droites parallèles entre elles (ou perpendiculaires), c’est-à-dire que si deux côtés d’une figure sont parallèles(ou perpendiculaires), ils seront également parallèles(ou perpendiculaires) dans l’image de cette figure;



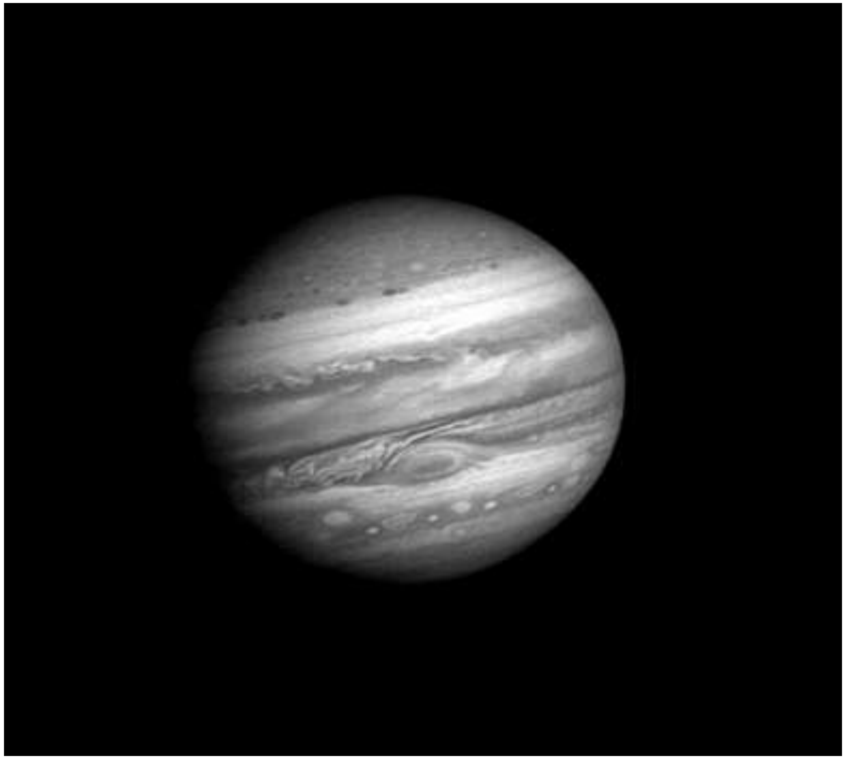


Propriétés de la translation

5. Conserve les rapports des mesures.

Rotation autour de l'origine

Une rotation est le déplacement déterminé par un angle de rotation ɵ dans un sens autour d'un point nommé centre de rotation. Il existe deux sens de rotation : horaire « sens négatif »et antihoraire « sens positif»

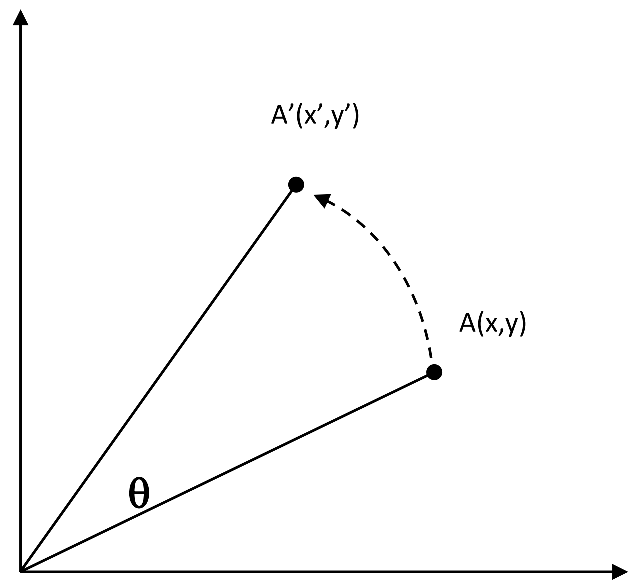


Rotation autour de l'origine

Le système d'équation qui relie (x,y) à (x',y') est:

$x' = x \cos\theta - y \sin\theta$

$y' = x \sin\theta + y \cos\theta$



En notation matricielle :

$$[x'\ y']^T = \begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{bmatrix} [x\ y]^T$$

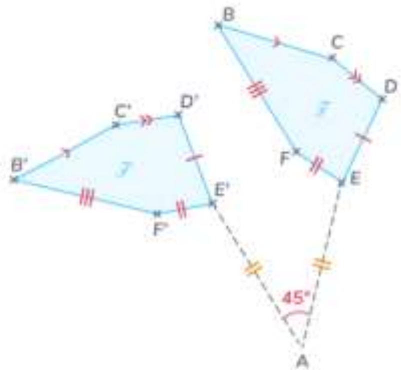
Pour une rotation dans le sens des aiguilles d'une montre, on utilise :

$$\begin{bmatrix} cos\theta & sin\theta \\ -sin\theta & cos\theta \end{bmatrix}$$

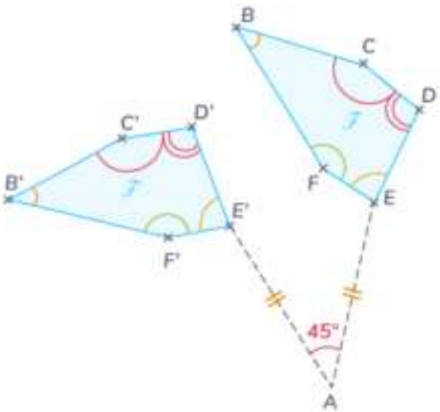
Propriétés de la rotation

Toute rotation :

1. Conserve les longueurs des segments de droite;

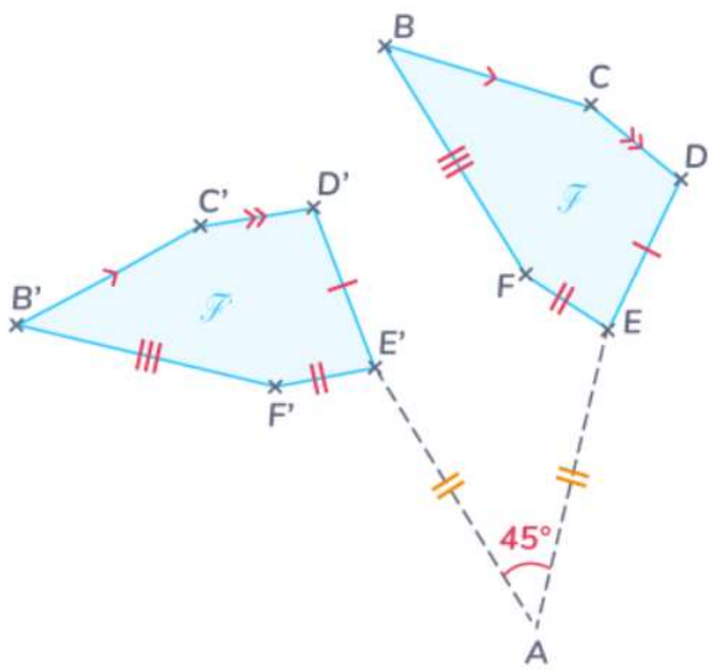


2. Conserve la mesure des angles des figures géométriques;



Propriétés de la rotation

3. Conserve l'ordre des points;
4. Conserve les droites d'une même figure parallèles ou perpendiculaires entre elles;
5. Conserve le rapport des mesures.



L'homothétie

Une homothétie n'est autre qu'un changement d'échelle (homothétie ou scaling) ;

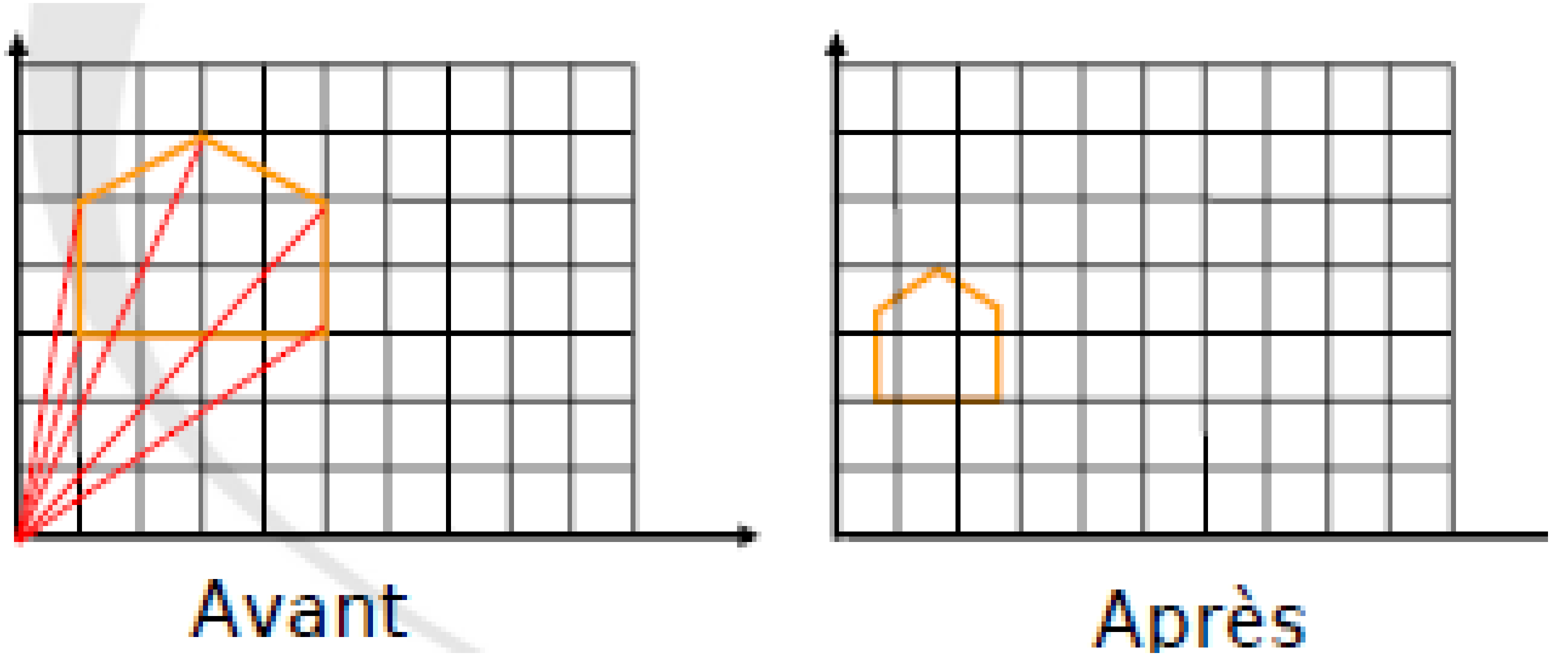
L'homothétie d'un point (x,y) en un point (x',y') est définit par le système d'équation suivant :

x' = Sxx
y' = Syy
En notation matricielle :

$$[x_1 y_1]^T = \begin{bmatrix} Sx & 0 \\ 0 & Sy \end{bmatrix} [x\ y]^T$$

L'homothétie

Les coordonnées sont multipliées par le facteur de changement d'échelle Sx et Sy



La symétrie

Les symétries sont des cas particuliers de l'homotéthie :

- Symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.

$$S_x = -1 \text{ et } S_y = 1$$

- Symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

$$S_x = 1 \text{ et } S_y = -1$$

- Symétrie par rapport à l'origine du repère(c'est aussi une rotation d'angle 180° (p radian) autour de l'origine).

$$S_x = -1 \; S_y = -1$$

Les coordonnées homogènes

L'homothétie et la rotation se calculent par multiplication de matrices, alors que la translation se calcule par addition de matrices.

On aimerait avoir un cadre unifié pour toutes les transformations.

Les coordonnées homogènes

- Les systèmes de coordonnées homogènes permettent de définir une transformation entre deux référentiels avec une simple multiplication matricielle.

- Les systèmes de coordonnées homogènes sont un élément clé de :
  - vision par ordinateur 3D
  - synthèse d'images 3D
  - modélisation des robots
  - modélisation de processus dynamiques 3D

- Ils reposent sur une notation dans laquelle un vecteur en N dimensions est représenté par un vecteur en N+1 dimensions.

.

Soit un plan Euclidienne en R^2 composé de points. En notation classique, un point est un vecteur $\vec{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

. En notation homogène, un point est un vecteur $\vec{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$

- En cartésien, une translation est une addition

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_{x1} \\ T_{y1} \end{bmatrix}$$

- En homogène, translation s'exprime par <u>une multiplication</u>

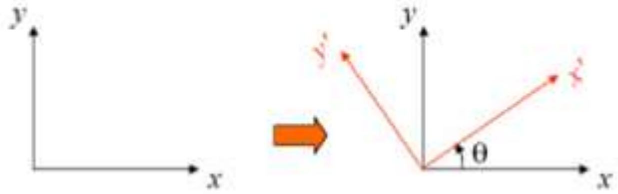
$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & T_{x1} \\ 0 & 1 & T_{y1} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P_2 = TP_1$$

Cas 2D

Etant donné une paire d'axes (x,y), la rotation de ceux ci selon un angle θ peut être obtenu en écrivant :

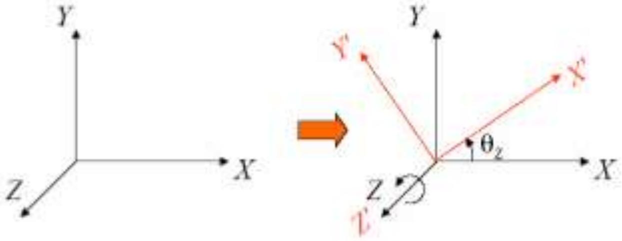
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$



Cas 3D

Pour une rotation autour de l'axe Z est obtenu de manière similaire

$$\begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_z & -\sin\theta_z & 0 \\ \sin\theta_z & \cos\theta_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$



On a que des multiplications on peut donc facilement combiner toutes les transformations dans une seule matrice

Une composition de transformations est tout simplement un enchaînement de transformations.

Rotation autour d’un point quelconque

Une rotation d'angle a autour du point W = (a,b) se décompose comme suit :

- une translation
- une rotation d'ange a autour de l'origine a
- une translation inverse

Notons P1= (x1,y1) l'image de P(x,y) par la translation de vecteur $\overrightarrow{\Omega O}$ on a :

$$[x_1 y_1\ 1]^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [x\ y\ 1]^T$$

Notons P2= (x2,y2) l'image de P1par la rotation d'angle a autour de l'origine O, on a :

$$[x_2 y_2\ 1]^T = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [x_1 y_1\ 1]^T$$

Et comme P' = (x',y') est l'image de P2par la translation de vecteur $\overrightarrow{\Omega O}$ on a:

$$[x'\ y'\ 1]^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [x_2 y_2\ 1]^T$$

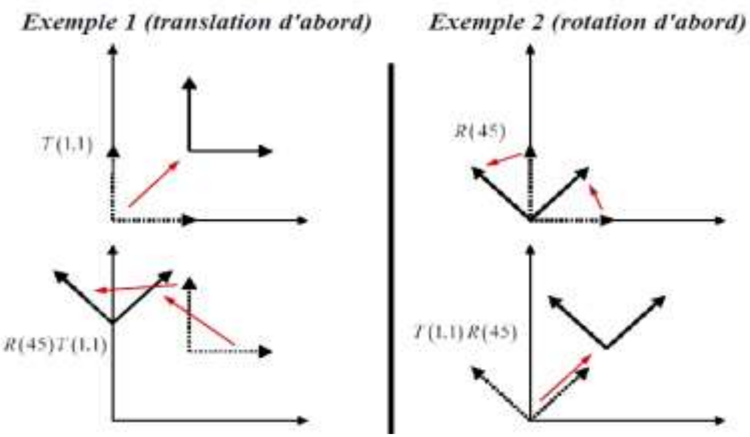
On obtient donc la relation suivante:

$$[x' y' 1]^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [x\ y\ 1]^T$$

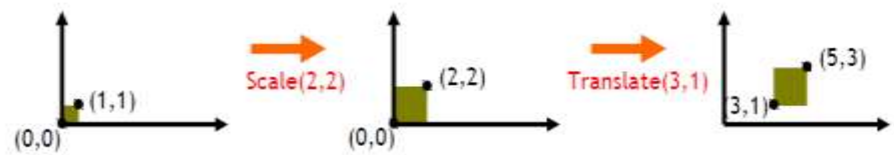
Les matrices de transformation apparaissent de gauche à droite dans le produit dans l'ordre inverse de l'ordre selon lequel elles interviennent effectivement.

Propriétés

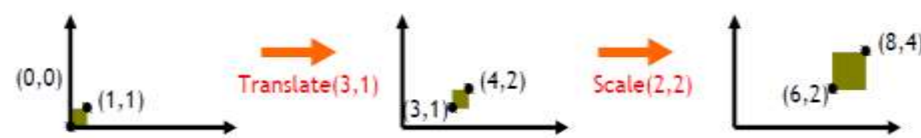
- ❑Les produits matrice par matrice et matrice par vecteur sont associatifs.
- ❑Les produits matriciels pour des transformations différentes sont non commutatifs.



Homothétie puis translation : p' = T (S p) = TS p



Translation puis homothétie : p' = S (T p) = ST p



Noter qu'il faut réaliser les transformations géométriques de la droite vers la gauche.

Propriétés

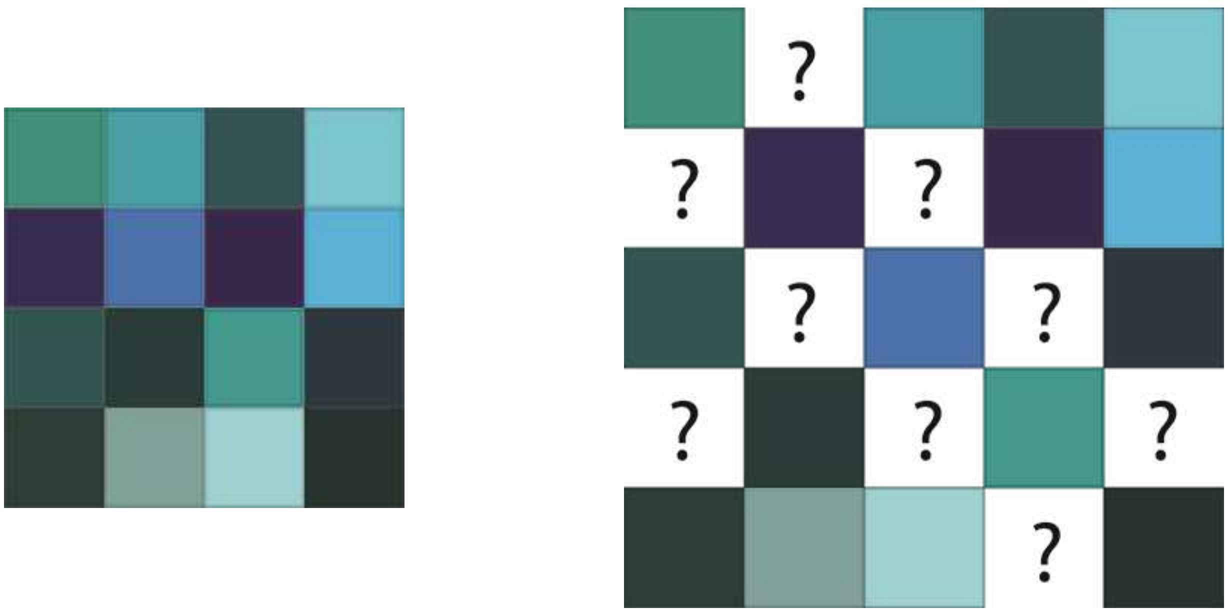
L'ordre des transformations est très important : un changement d'échelle suivi d'une translation est différent d'une translation suivie d'un changement d'échelle.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \Delta x \\ 0 & 1 & \Delta y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & \Delta x \\ 0 & s_y & \Delta y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \Delta x \\ 0 & 1 & \Delta y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & s_x\Delta x \\ 0 & s_y & s_y\Delta y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

L'interpolation

L'interpolation est l'utilisation de données connues pour estimer des valeurs inconnues dans certaines positions. Elle est utile lorsqu'une image est agrandie ou des transformations géométriques lui sont appliquées.



Dans ce sui suit nous étudierons ici les différents algorithmes d'interpolation non adaptatifs.

L'interpolation au plus proche

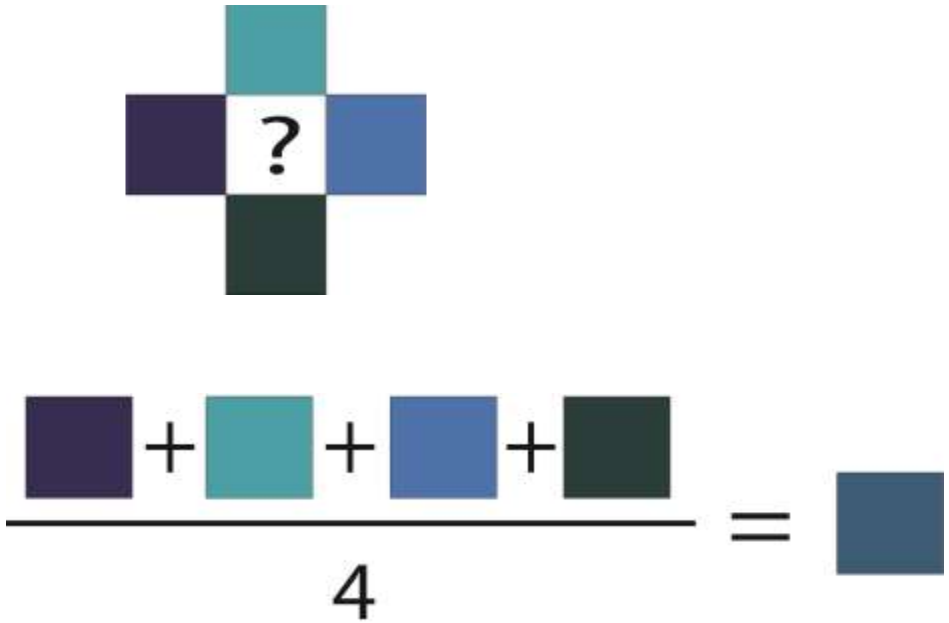
- Cet algorithme est le plus simple. Il est rapide et est le seul qui n'ajoute aucune nouvelle couleur en interpolant l'image.
- Pour calculer la couleur d'un pixel interpolé, on prend simplement la couleur du plus proche pixel dans l'image originale.
- Cette technique ne donne pas des résultats très satisfaisants et produit beaucoup d'effets de blocs puisque, si par exemple on double la taille d'une image, chaque pixel est en fait recopier 4 fois.

L'interpolation avec des splines

- La plupart des algorithmes d'interpolation utilisent un noyau de convolution. C'est-à-dire qu'ils prennent un certain nombre de voisins du pixel à calculer et font une moyenne pondérée en fonction de leur distance au pixel interpolé pour obtenir le résultat.
- Étant donné que les images en informatiques sont souvent représentées par des matrices, on peut facilement appliquer un filtre en représentant son noyau de convolution par une matrice. Ainsi, pour appliquer le filtre, il faudra multiplier pour chaque pixel, la matrice du pixel et de ses voisins par la matrice du noyau de convolution pour obtenir le pixel recherché.

Filtre bilinéaire (B-spline d’ordre 2)

- L’interpolation bilinéaire prend en compte les 4 voisins du pixel (appelé voisinage de Von Neumann) que l’on calcule.
- Il applique une fonction bilinéaire (donc d’ordre 2) sur les 4 voisins puis applique le résultat sur le pixel interpolé.



Filtre bicubique(B-spline d'ordre 4)

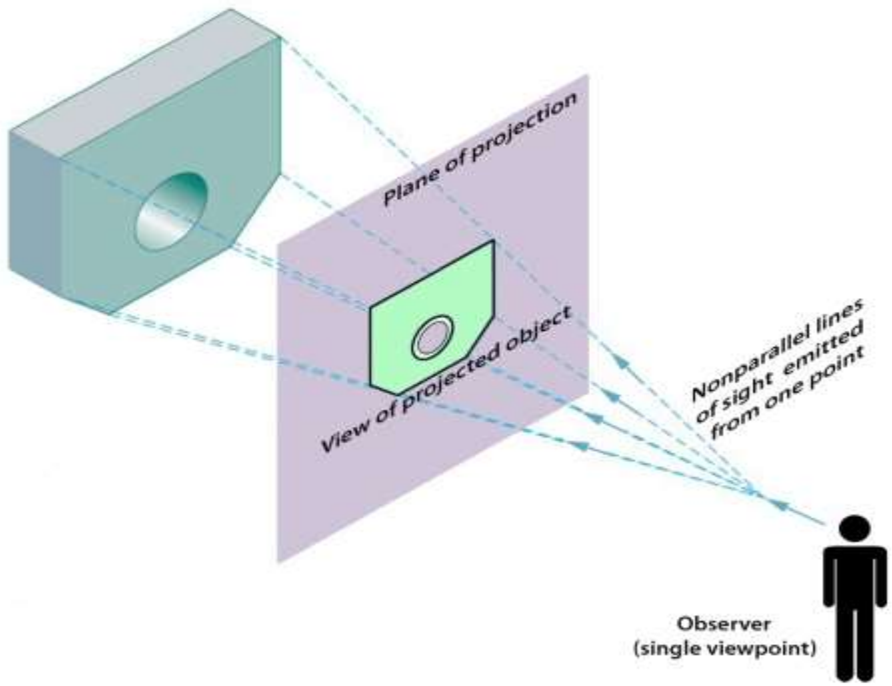
- Le filtre bicubique fonctionne sur le même principe que le filtre bilinéaire, mais prend en compte les 8 voisins du pixel (appelé voisinage de Moore) et applique une fonction bicubique (donc d'ordre 4).
- C'est cet algorithme qui est utilisé par défaut dans la plupart des logiciels de manipulation d'images. Il permet d'obtenir un bon compromis entre la qualité du résultat et la rapidité d'exécution de l'algorithme.
- Comme le filtre bilinéaire, il produit des contours lisses, mais l'effet de pixellisation est moindre par rapport aux interpolations d'ordre inférieur.

Transformations géométriques avancées :

Projection Perspective

La projection perspective est une transformation qui simule la façon dont un objet est vu par une caméra lorsque l'objet est à une certaine distance de la caméra. Cette transformation est couramment utilisée pour créer des effets de perspective dans les images et les scènes 3D. Elle est souvent utilisée pour simuler la vue d'une caméra inclinée.

:



Projection Perspective

Matrice de Projection Perspective

La projection perspective est généralement réalisée à l'aide d'une matrice de projection. La matrice de projection perspective typique est la suivante

P = [1, 0, 0, 0]
[0, 1, 0, 0]
[0, 0, 1, 0]
[0, 0, 1/d, 0]

Où d est la distance focale de la caméra. La matrice de projection est utilisée pour transformer les coordonnées tridimensionnelles d'un point (X, Y, Z) en coordonnées bidimensionnelles (x, y) sur le plan de l'image.

Pour appliquer la transformation, nous utilisons la formule suivante :

[x, y, z, w] = P * [X, Y, Z, 1]
x' = x / w
y' = y / w

Projection Perspective

"w" est utilisé pour normaliser ces coordonnées afin d'obtenir des coordonnées cartésiennes appropriées après l'application de la transformation projective.

Lorsque vous appliquez cette transformation à chaque point de l'image, elle simule la perspective et crée l'effet d'une caméra inclinée.

Distorsion Radiale

une transformation qui modifie la forme d'une image en fonction de la distance par rapport à un point central. Elle est couramment utilisée pour corriger ou créer des effets de distorsion dans les images, comme ceux que l'on peut observer dans les objectifs d'appareils photo grand angle ou fisheye.

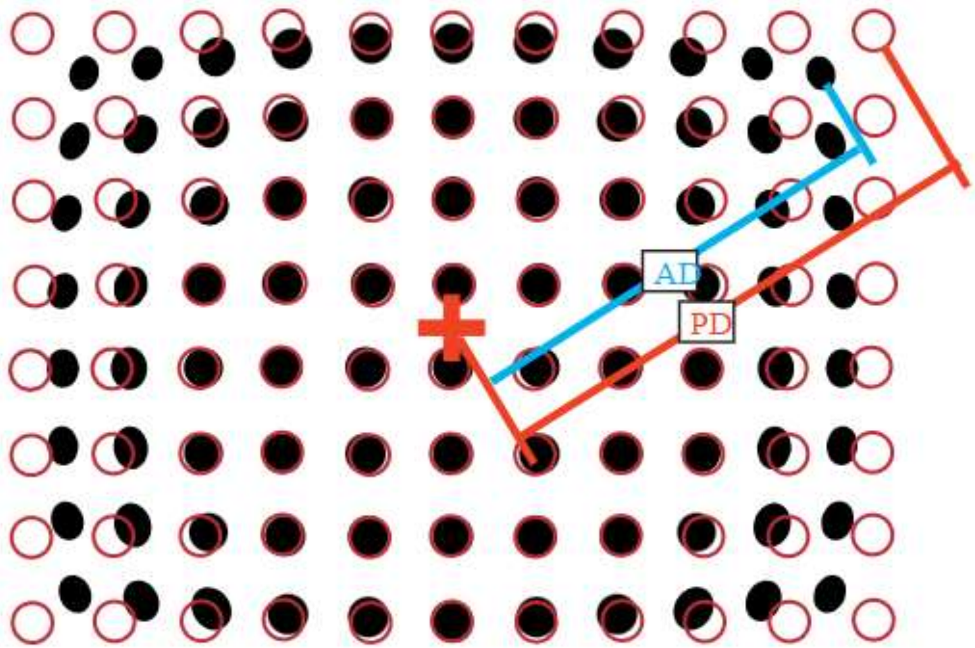


Figure 5 : Modèle de distorsion des points de la mire calibrée (cercles rouges) et de l'image (points noirs).

Distorsion Radiale

Équation de Distorsion Radiale

La distorsion radiale est souvent modélisée par
une équation de distorsion radiale, telle que : r' = r + k1 * r^3 + k2 * r^5 + k3 * r^7+……..

Où r est la distance entre un pixel et le point central, r' est la nouvelle distance après la distorsion, et k1 et k2 sont des coefficients de distorsion radiale.

(k1) : Ce coefficient mesure la distorsion radiale en tangage (ou radiale positive) signifie que les points situés plus loin du centre de l'image semblent être étirés vers l'extérieur.

Le coefficient k2 mesure la distorsion radiale en barillet (ou radiale négative) signifie que les points situés plus loin du centre de l'image semblent être comprimés vers l'intérieur.

(k3) : Les distorsions radiales de troisième ordre sont moins courantes, mais elles peuvent être présentes dans certaines lentilles. Ce coefficient corrige les distorsions de troisième ordre, qui sont encore plus complexes que celles du premier et du second ordre.

Distorsion Radiale

Pour chaque pixel (x, y) dans l'image, nous calculons d'abord la distance r par rapport au point central (cx, cy) :

r = sqrt((x - cx)^2 + (y - cy)^2)

Ensuite, nous utilisons l'équation de distorsion radiale pour calculer r' :

r' = r + k1 * r^3 + k2 * r^5

Enfin, nous calculons les nouvelles coordonnées (x', y') en ajustant la position en fonction de r' et de l'angle θ :

x' = cx + (x - cx) * (r' / r)
y' = cy + (y - cy) * (r' / r)

Lorsque vous appliquez cette transformation à chaque pixel de l'image, elle modifie la forme de l'image en fonction de la distance par rapport au point central.