— Série N°3 —

Exo1 : une mole de gaz carbonique obéit à l'équation de Van der Waals :
$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT$$

1/ Exprimer, en fonction des variables indépendantes (V, T) les coefficients de dilatation à pression constante α et à volume constant β.

2/ Trouver la relation générale entre les coefficients χ de compressibilité isotherme, α, β et la pression p du gaz. En déduire le coefficient χ du gaz de Van der Waals.

3/ Dans le cas où l'on peut négliger la pression interne du gaz, Montrer que $\chi = \frac{V}{R} \cdot \frac{\alpha^2}{\beta}$.

Exo2 : une mole de gaz reçoit, au cours d'une transformation élémentaire réversible, une quantité de chaleur δQ qui peut s'exprimer de trois façons :
$$\delta Q = C_V dT + l\,dV$$
$$\delta Q = C_p dT + h\,dp$$
$$\delta Q = \lambda\,dp + \mu\,dV$$

1/ Exprimer les coefficients calorimétriques l, h, μ et λ en fonction de C_p, C_V, $\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p$ et $\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V$

2/ Calculer dans le cas d'un gaz parfait l, h, μ et λ en fonction de P, V et $\gamma = C_p/C_V$

3/ En déduire la relation entre P et V au cours d'une transformation adiabatique réversible du gaz ($\gamma = cte$).

A. Chelghoum

solution série N°3

Exo 1 : $\left(P+\frac{a}{V^2}\right)(V-b) = RT$

1°/ * Différentions l'équation d'état du gaz, à pression constante :

$$\left(P+\frac{a}{V^2}\right)dV - (V-b)\frac{2a}{V^3}dV = RdT$$

On ne conserve que T et V, de l'équation d'état on a :

$$P+\frac{a}{V^2} = \frac{RT}{V-b}$$

donc : $\frac{RT}{V-b}dV - (V-b)\frac{2a}{V^3}dV = RdT \Leftrightarrow$

$$\left(\frac{RT}{V-b} - \frac{(V-b)\cdot 2a}{V^3}\right)dV = RdT \Rightarrow \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \left[\frac{T}{V-b} - \frac{(V-b)2a}{RV^3}\right]^{-1}$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \left[\frac{RTV^3-(V-b)^2\cdot 2a}{RV^3(V-b}\right]^{-1} = \frac{RV^3(V-b)}{RTV^3-(V-b)^2\cdot 2a}$$

d'où $\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \frac{RV^2(V-b)}{RTV^3-2a(V-b)^2}$ (1)

* Différentions l'équation d'état du gaz, à volume constant :

$$(V-b)dP = RdT \Rightarrow \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = \frac{R}{V-b} \quad (2,a)$$

d'autre part : $P = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}$ et $\beta = \frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V$

il vient que $\beta = \frac{1}{\frac{RT}{V-b}-\frac{a}{V^2}} \cdot \frac{R}{V-b} = \frac{RV^2}{RTV^2 - a(V-b)}$ (2b)

2°/ $\chi = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T$ et $\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P = -1$

Compte tenu des relations donnant α et β on obtient

$-\chi \cdot V \cdot \beta P \cdot \frac{1}{\alpha V} = -1$ d'où la relation

générale $\boxed{\chi = \frac{\alpha}{P\beta}}$ (3)

de la relation (1) et $P\beta = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = \frac{R}{V-b}$ la relation (3) on aura :

$$\chi = \frac{V^2(V-b)^2}{RTV^3 - 2a(V-b)^2}$$

3°/ si la pression interne du gaz est négligeable $a \simeq 0$ on obtient :

$$\alpha = \frac{v-b}{Tv} \quad , \quad \beta = \frac{1}{T} \quad , \quad \chi = \frac{(v-b)^2}{RTv}$$

$$\chi = \frac{(v-b)^2}{(Tv)^2} \cdot \frac{Tv}{R} = \frac{\alpha^2 \cdot v}{R \cdot \beta} \Rightarrow \boxed{\chi = \frac{v}{R} \cdot \frac{\alpha^2}{\beta}}$$

Exo2 : 1°/ à $p = cte \Rightarrow dp = 0$ $\quad \delta Q_p = C_v dT + l dv = C_p dT = \mu dv$

donc ; $l = (C_p - C_v)\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_p$, $\mu = C_p\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_p$

à $v = cte \Rightarrow dv = 0$ $\quad \delta Q_v = C_v dT = C_p dT + h dp = \lambda dp$

donc ; $h = -(C_p - C_v)\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_v$, $\lambda = C_v\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_v$

2°/ La relation de Mayer relative à une mole de gaz parfait

$$C_p - C_v = R \quad \text{avec} \quad \frac{C_p}{C_v} = \gamma \Rightarrow C_v = \frac{R}{\gamma - 1} \text{ et } C_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$$

$$PV = RT \Rightarrow \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_p = \frac{P}{R} \quad , \quad \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_v = \frac{v}{R}$$

$$\Rightarrow l = p \quad , \quad h = -v \quad , \quad \mu = \frac{\gamma}{\gamma - 1} P \quad , \quad \lambda = \frac{v}{\gamma - 1}$$

3°/ pour une transformation adiabatique $\delta Q = \lambda dp + \mu dv = 0$

$$\frac{v\,dp}{\cancel{\gamma-1}} + \frac{\gamma P}{\cancel{\gamma-1}} dv = 0 \Rightarrow \frac{dp}{P} + \gamma \frac{dv}{v} = 0 \Rightarrow \ln P + \gamma \ln v = cte$$

$$\Rightarrow \ln P \cdot v^\gamma = cte \Rightarrow \boxed{P \cdot v^\gamma = cte}$$

A. Chelghoum