الحل النموذجي لامتحان الدورة العادية في مادة الرياضيات 2

التمرين الأول: (05 نقاط)

1) المعادلة التفاضلية من الرتبة الاولى قابلة للفصل و منه

$$xy' = 3y \leftrightarrow \frac{dy}{y} = \frac{3dx}{x} \leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = 3\int \frac{dx}{x}$$ ....(0.5 ن)

$$\leftrightarrow ln(y) = 3ln(x) + c \leftrightarrow e^{ln(y)} = e^{3ln(x)+c}$$

$$\leftrightarrow y = kx^3.$$ ....(0.5 ن).

$$y(1) = 2 \leftrightarrow 2 = k \leftrightarrow y = 2x^3.$$ ....(0.5 ن).

2) المعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية غير المتجانسة شكلها العام

$$ay'' + by' + cy = f(x)$$

و منه فحلها العام هو : $y_G = y_h + y_p$ ....(0.5 ن).

<u>حساب الحل المتجانس</u>

المعادلة المتجانسة المرافقة هي

$$y'' + 2y' + y = 0$$ ....(0.5 ن).

المعادلة المميزة له هي

$$r^2 + 2r + 1 = 0$$ ....(0.5 ن).

حيث المميز يساوي الصفر فان المعادلة تقبل حل مضاعف و منه فان

$$y_h = (c_1 + c_2x)e^{-x}$$ ....(0.5 ن).

<u>حساب الحل الخاص</u>

بما ان الطرف الثاني للمعادلة التفاضلية عبارة عن كثير حدود من الدرجة الاولى و المعامل c لا يساوي 0 فان الحل الخاص عبارة عن كثير حدود من الدرجة الاولى شكله العام هو

$$y_p = a_1x + a_2 \rightarrow y_p' = a_1 \rightarrow y_p'' = 0$$ ....(0.5 ن).

بالتعويض في المعادلة نجد

$$2a_1 + a_1x + a_2 = 3x + 4$$

بالمطابقة نجد

$a_1 = 3$ و $a_2 = -2 \rightarrow y_p = 3x - 2$ ....(0.5 ن).

و في الاخير نجد ان

$$y_G = (c_1 + c_2x)e^{-x} + 3x - 2.$$ ....(0.5 ن).

التمرين الثاني : (04 نقاط)

لتكن f, g دالتين ذات متغيرين حقيقين معرفتان ب

$$f(x,y) = x^3 + y^3 + x^2 + xy \qquad , \ g(x,y) = \frac{x+y}{3x-y-1}$$

1) احسب مايلي :

$f(0,0) = 0$ .... (0.5 ن)

$g(2,1) = \frac{3}{4}$ .... (0.5 ن)

(2

- بما ان الدالة f عبارة عن متعدد حدود فان

$Df = IR^2$. .... (0.5 ن)

- $Dg = IR^2 = \{(x,y) \in IR^2 \backslash 3x - y - 1 \neq 0\}$ .... (0.5 ن)

$= \{(x,y) \in IR^2 \backslash y \neq 3x - 1\}$

فان ميدان تعريف الدالة g هي جميع نقاط المستوي ماعدا نقاط المستقيم ذو المعادلة $y = 3x - 1$ (0.5 ن)

(3

- $f'_x = 3x^2 + 2x + y$ .... (0.25 ن)
- $f'_y = 3y^2 + x$ .... (0.25 ن)
- $f''_{xx} = 6x + 2$ .... (0.25 ن)
- $f''_{xy} = 1$ .... (0.25 ن)
- $f''_{yy} = 6y$ .... (0.25 ن)
- $f''_{yx} = 1$ .... (0.25 ن)

التمرين الثالث: (05 نقاط)

لتكن المصفوفة

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ حيث I_2 هي مصفوفة الوحدة

1) احسب : .

- $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ .... (0.5 ن)
- $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ .... (0.5 ن)
- $Tr(A) = 1 + 1 = 2$ .... (0.5 ن)
- $\det(A) = 1 - 4 = -3$ .... (0.5 ن)

3) احسب :

$2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ .... (0.5 ن)

(ن 0.5). ....$3I_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

(ن 0.5). ....$A^2 - 2A - 3I_2 = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

2) لدينا

(ن 0.5). ....$A^2 - 2A - 3I_2 = 0_M \leftrightarrow A\frac{1}{3}(A - 2I) = I_2$

ومنه فان المصفوفة قابلة للقلب حيث

(ن 0.5). ....$\frac{1}{3}(A - 2I) = A^{-1}$

اذن

(ن 0.5). ....$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

التمرين الرابع : (06 نقاط)

يختار الطالب طريقتين من بين ثلاث الطرق كل طريقة على 2.5 ن

لتكن جملة المعادلات التالية :

1) الشكل المصفوفي هو $AX = B$ حيث

(ن 01). ...$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

- **طريقة كرامر :**

لدينا n= m=3 و

(ن 1). .... det(A)=5≠ 0

و منه الجملة قابلة للحل بطريقة كرامر

$$x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)}$$

$$x = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{9}{5}; \quad \ldots\ldots\ldots .(0.5\ ن)$$

$$y = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{1}{5} \ldots\ldots\ldots\ldots (0.5\ ن);$$

$$z=\frac{\det(A_1)}{\det(A)}=\frac{\begin{vmatrix}1&1&2\\-1&1&-2\\0&3&1\end{vmatrix}}{\det(A)}=\frac{2}{5};\ \ldots\ldots\ldots\ (0.5\text{ ن})$$

- **طريقة المقلوب** : $X=A^{-1}B$......... (0.5 ن)

حساب A^{-1}

$$(0.5\text{ ن})\ \ldots\ldots\ldots\ A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\tilde{A}^t,\tilde{A}=(-1)^{i+j}\det A_{ij}$$

$$\to\ \tilde{A}=\begin{pmatrix}4&1&-3\\-1&1&-3\\-1&1&2\end{pmatrix}\ \ldots\ldots\ (0.5\text{ ن})$$

$$A^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4&-1&-1\\1&1&1\\-3&-3&2\end{pmatrix}.\ \ldots\ldots\ (0.5\text{ ن})$$

و منه

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4&-1&-1\\1&1&1\\-3&-3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{9}{5}\\\frac{1}{5}\\\frac{2}{5}\end{pmatrix}\ \ldots\ldots\ (0.5\text{ ن})$$

- **طريقة غوص :** الشكل المصفوفي الموسع هو

$$(0.5\text{ ن})\ \ldots\ \left(\begin{array}{ccc|c}\boxed{1}&1&0&2\\-1&1&-1&-2\\0&3&1&1\end{array}\right)$$

<u>العمليات الاولية هي كالاتي</u>

(جمع العمود السطر الاول و الثاني)

$$(0.5\text{ ن})\ \ldots\ldots\ \left(\begin{array}{ccc|c}\boxed{1}&1&0&2\\-1&1&-1&-2\\0&3&1&1\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&2\\0&\boxed{2}&-1&0\\0&3&1&1\end{array}\right)$$

(-3السطر الثاني+2السطر الثالث)

$$(0.5\text{ ن})\ \ldots\ldots\ \approx\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&2&2\\0&\boxed{2}&-1&0\\0&0&5&2\end{array}\right)$$

و منه حل الجملة مكافئ لحل الجملة

$$(0.5\text{ ن})\ \ldots\ldots\ \begin{cases}x+y+2z=2\\2y-z=0\\5z=2\end{cases}\ \to$$

$$(0.5\text{ ن})\ \ldots\ldots\ x=\frac{9}{5},y=\frac{1}{5},z=\frac{2}{5}$$