الفصل الرابع: الفائدة المركبة

علمنا سابقا أن الفائدة البسيطة تحسب على القروض القصيرة الأجل والتي لا تتجاوز مدتها السنة، كما أنها تحسب على المبلغ الأصلي بالمقارنة بالفائدة المركبة والتي تخص القروض طويلة الأجل وهذا ما سنتناوله في هذا الفصل.

1. تعريف الفائدة المركبة:

نقول عن مبلغ بأنه يدخر بفائدة مركبة إذا أضيفت الفائدة البسيطة المحصل عليها في نهاية السنة الأولى إلى أصل المبلغ لحساب فائدة السنة الثانية، وتضاف فائدة السنة الثانية إلى (أصل المبلغ + فائدة السنة الأولى) عند حساب فائدة السنة الثالثة، [1]حيث تقوم الفائدة المركبة على مبدأ رسملة الفوائد، وهذا يعني أنه في نهاية كل وحدة زمنية (سنة، سداسي، ...الخ) تحتسب فوائدها لتضاف إلى أصل بداية المدة لتشكل مبلغا جديدا يكون أساس احتساب الفوائد للفترة الموالية، أي ان الفائدة المركبة في نهاية كل وحدة زمنية تصبح جزءا من الأصل قابل بدوره إلى الاستثمار[2].

2. المعادلة العامة للفائدة المركبة (معادلة الجملة):

- **قانون الفائدة المركبة:**

ليكن:

C: مبلغ القرض أو التوظيف في بداية المدة؛

n: هي مدة القرض، أو التوظيف بالسنوات؛

i : هو سعر الفائدة للدينار الواحد من المبلغ وللسنة واحدة؛

A: الجملة في نهاية المدة t.

مثال:

1 نذير مياح، مرجع سبق ذكره، ص 07.

2لحسن عبد الله باشيوة، **مدخل إلى الرياضيات المالية وتطبيقاتها**، دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع، الأردن،2011، ص ص 191-192.

قام شخص بإدخار مبلغ 90000 دج لمدة 3 سنوات بمعدل فائدة مركبة 5%، فكم يصبح في نهاية المدة؟

الحل:

السنوات	**المبلغ في بداية السنة (1)**	**الفائدة السنوية (2)**	**المبلغ في نهاية السنة (1)+(2)**
1	90000	4500	94500
2	94500	4725	99225
3	99225	4961,25	104186,25

يصبح مبلغ 90000دج بعد 3 سنوات 104186,25دج

حسب المثال السابق نجد أن فائدة السنة الأولى للمبلغ C بالمعدل i هي C_i، ويقدم الجدول التالي حساب الفوائد ورسملتها نهاية كل سنة بداية من السنة الأولى.

الفترة	الرسملة بداية كل سنة (1)	فوائد السنة (2)	القيمة المحصلة نهاية كل سنة بعد رسملة الفوائد المحتسبة للسنة
1	C	Ci	C+ $C_i = C(1+i)$
2	$C(1+i)$	$C(1+i)\times i$	$C(1+i)+C(1+i)\times i = C(1+i)^2$
3	$C(1+i)^2$	$C(1+i)^2\times i$	$C(1+i)^2+C(1+i)^2\times i = C(1+i)^3$
...	....	....	....
....	....	....	....
N	$C(1+i)^{n-1}$	$C(1+i)^{n-1}\times i$	$C(1+i)^{n-1}+C(1+i)^{n-1}\times i = C(1+i)^n$

المصدر: نذير مياح، **الرياضيات المالية –محاضرات وتمارين**- مطبوعة موجهة لطلبة للسنة الثانية نظام LMD، جامعة الأمير عبد القادر للعلوم الإسلامية –قسنطينة- 2012-2013، ص 07.

نستنج من الجدول أن القيمة المحصلة للمبلغ C بعد عدد من الوحدات الزمنية n بمعدل فائدة مركبة i بالمئة لكل وحدة زمنية تعطى بالعلاقة التالية:[1]

$$C_n = C(1+i)^n$$

وهي تمثل القانون الأساس للفائدة المركبة، ويمكن كتابة هذه العلاقة باللوغاريتمات بالشكل التالي:

$$\text{Log}.\, C_n = \text{Log C} + \text{n}.\text{Log}(1+\text{i})$$

ملاحظات:

- إن القانون الأساسي المقدم أعلاه يصلح في حالة كون معدل الفائدة ومدة الرسملة متطابقين، لأننا افترضنا أن معدل الفائدة سنوي وأن مدة الرسملة هي كذلك السنة، فإذا اتفق ان تتم رسملة الفوائد كل شهر، يجب ان يكون سعر الفائدة شهريا؛
- تمثل فوائد السنوات المتتالية متوالية هندسية أساسها $(1+\text{i})$؛
- القيم المحصلة نهاية السنوات المتتالية تشكل هي الأخرى متوالية هندسية لها نفس الأساس $(1+\text{i})$؛
- قانون الفائدة المركبة يعطي القيمة المحصلة من عملية القرض أو التوظيف، بينما قانون الفائدة البسيطة يمدنا بالفائدة مباشرة، ولحساب الفائدة الناتجة عن قانون الفائدة المركبة فإننا نطرح أصل القرض من القيمة المحصلة له أي:

- $\text{I} = C_n - C = C(1+i)^n - C$

$$\text{I}=\text{C}[(1+i)^n - 1]$$

وحسب المثال السابق فان القيمة المحصلة بعد ثلاث سنوات هي:

$$C_3 = 90000(1+0.05)^3$$
$$C_3 = 104186{,}25 \text{ DA}$$

وباستخدام علاقة اللوغاريتم نجد:

$$\text{Log}.\, C_n = \text{Log } 90000 + 3.\text{Log}(1+0{,}05)$$

مثال 01:

وظف مبلغ 35000دج بمعدل فائدة سنوي 10% ورسملة سنوية لمدة 5 سنوات.

المطلوب:

1 نور الدين زعيبط، مرجع سبق ذكره، ص 65.

Devolder, Pierre, Mathilde Fox, and Francis Vaguener. **Mathématiques financières**. Pearson Education France, 2012. P 05.

- أحسب القيمة المحصلة نهاية التوظيف.
- احسب قيمة الفائدة.

الحل:

لدينا:

$$C_n = C(1+i)^n$$
$$C_n = 35000(1+0{,}1)^5$$
$$C_5 = 56367{,}85DA$$
$$\mathrm{I} = C_n - C = 56367{,}85 - 35000 = 21367{,}85DA$$

مثال02:

اقترض أحمد مبلغ 25000دج بمعد ل فائدة نصف سنوي 4% ورسملة نصف سنوية كذلك، ومدة القرض6 سنوات.

المطلوب:

حدد القيمة التي يسددها إلى البنك نهاية المدة.

الحل:

$$C_{12} = C(1+i)^{12} = C_{12} = 25000(1+0{,}04)^{12}$$
$$C_{12} = 40025{,}8DA$$

مثال03:

وظف عبد الرحمن رأس مال قيمته 30000دج بقائدة مركبة بمدة 10 سنوات، بلغت القيمة المحصلة بعد 10 سنوات 48866,83دج.

المطلوب:

احسب معدل التوظيف i.

الحل:

$$C_n = C(1+i)^n$$
$$48866{,}83 = 30000(1+i)^{10}$$
$$(1+i)^{10} = \frac{48866{,}83}{30000} = 1{,}6288943$$
$$(1+i)^{10.\frac{1}{10}} = 1{,}6288943^{\frac{1}{10}}$$

$$(1+i) = 1{,}0499999$$
$$i = 1{,}0499999 - 1$$
$$i = 5\%$$

3. طرق حساب الفائدة المركبة لمدة عددها غير صحيح:

لحساب الفائدة المركبة لما تكون المدة عدد غير صحيح، أي وجود عدد من السنوات وجزء من السنة سواء كان أشهر أو عدد من الأيام لدينا ثلاث طرق هي[1]:

أ. طريقة الرسملة المتقطعة:

تقوم هده الطريق على مبدأ حساب فائدة السنوات بقانون الفائدة المركبة $C_n = C(1+i)^n$، في حين يتم حساب الفترة المتبقية بقانون الفائدة البسيطة سواء كانت المدة عدد من الشهر أو عدد من الأيام.

مثال:

وظف عبد الرحمان مبلغ قيمته 50000دج بفائدة مركبة لمدة 5 سنوات و8 أشهر وبمعدل 6%.

المطلوب:

أحسب القيمة المحصلة نهاية التوظيف.

الحل:

نقوم بحساب فائدة خمس سنوات بقانون الفائدة المركبة، ونضيف لها فائدة 8 أشهر المتبقية باستعمال قانون الفائدة البسيطة.

$$C_5 = 50000(1+0{,}06)^5$$

$$C_{5+\frac{8}{12}} = C_5 + \frac{C_5.m.t}{1200}$$

$$C_5 = 66911{,}27$$
$$\mathrm{i}_8 = \frac{66911{,}27.6.8}{1200} = 2676{,}45$$

1 محمد الأمين وليد طالب، مرجع سبق ذكره، 38-39.

$$C_{5+\frac{8}{12}} = 66911,27 + 2676,45$$

ب. طريقة الاستقطاب الخطي:

تقوم هذه الطريقة على مبدأ حساب فائدة السنوات وفق قانون الفائدة المركبة، أما فيما يخص فائدة المدة المتبقية سواء كانت عدد من الأشهر أو عدد من الأيام فيتم حساب فائدة السنة الأخيرة فقط بقانون الفائدة المركبة ثم ضربها في عدد الأيام وتقسيمها على 360 إذا كانت المدة عدد من الأيام، أو ضربها فب عدد الأشهر وقسمتها على عدد 12.

مثال:

وظف أحمد مبلغ قيمته 20000دج بفائدة مركبة لمدة 4 سنوات و5 أشهر وبمعدل 6%.

المطلوب:

أحسب القيمة المحصلة نهاية التوظيف.

الحل:

$$C_{4+\frac{8}{12}} = C_4 + (C_5 - C_4).\frac{8}{12}$$
$$C_4 = 20000(1,06)^4$$
$$C_4 = 25249,53$$
$$C_5 = 20000(1,06)^5$$
$$C_5 = 26764,51$$
$$C_5 - C_4 = 26764,51 - 25249,53$$
$$C_{4+\frac{8}{12}} = 25249,53 + 1514,92.\frac{8}{12}$$

$$C_{4+\frac{8}{12}} = 25249,53 + 1009,94$$
$$C_{4+\frac{8}{12}} = 26259,47$$

ت. طريقة الرسملة المستمرة:

لحساب القيمة المكتسبة حسب هذه الطرية نستعمل إما اللوغاريتم العشري أو اللوغاريتم النيبيري.

مثال:

وظف مبلغ قيمته 10000دج بفائدة مركبة لمدة 5 سنوات و5 أشهر وبمعدل 6%.

المطلوب:

أحسب القيمة المحصلة نهاية التوظيف.

الحل:

- باستعمال اللوغاريتم العشري نجد:

لدينا:

$$C_{4+\frac{8}{12}} = 10000(1,06)^{5+\frac{5}{12}}$$

$$logC_{4+\frac{8}{12}} = log10000(1,06)^{5+\frac{5}{12}}$$

$$logC_{4+\frac{8}{12}} = log10000 + (5+\frac{5}{12})log(1,06)$$

$$logC_{4+\frac{8}{12}} = 4 + (5,4166666)0,0253058$$

$$logC_{4+\frac{8}{12}} = 4,1370730$$

$$C_{4+\frac{8}{12}} = 10^{4,1370730}$$

$$C_{4+\frac{8}{12}} = 13711,12$$

4. تـــــــمــــاريـــــن

تمرين 01:

تريد مؤسسة شراء آلات بقيمة 45000دج، تستعمل لمدة 6 سنوات مع أمكانية بيعها بـ 5000دج بعد الامتلاك.

المطلوب: حساب تكلفة الآلات عند تاريخ الشراء بمعدل فائدة 10%.

تمرين 02:

في أول فيفري 2000، أقترض شخص مبلغا ماليا، ليسدده في أول فيفري 2007 بقيمة 100000دج.

1. أحسب قيمة رأس المال المقترض.
2. أحسب الجملة المسددة لو تم الدفع مسبقا في فيفري 2003.
3. أحسب الجملة القابلة لتسديد لو تأخر الدفع حت 2010.

علما أن معدل الفائدة المركبة 9%

تمرين 03:

تنوي مؤسسة القيام بمشروع استثماري، ولأجل ذلك تريد شراء آلات عمرها الإنتاجي 3 سنوات.

قدرت الأرباح الإضافية المنتظرة في آخر كل سنة كالتالي:

- 10000دج للسنة الأولى.
- 20000دج للسنة الثانية.
- 30000دج للسنة الثالثة.

المطلوب: حساب أدنى مبلغ مالي تستثمره لتحقيق معدل مردودية 8%.

تمرين 04:

أودعت مؤسسة مبلغ 200000دج، لمدة سبعة سنوات بمعد فائدة مركب سنوي 11,2%.

1. أحسب جملة المبلغ في نهاية المدة.
2. أحسب قيمة الفائدة للسنوات السبعة.
3. أحسب قيمة الفائدة للسنة الرابعة فقط.
4. إذا تم سحب مبلغ 200000دج في نهاية السنة الرابعة ووضع في بنك آخر بمعدل فائدة 3,5% ثلاثيا أحسب ما تجمع للمؤسسة بعد نهاية السنوات السبعة للمبلغين.