

Chapitre 4- Systèmes de Premier et Second Ordre

Plan

A. *Système de 1^{er} ordre*

1. Définition

2. Réponse d'un système de 1^{er} ordre à quelques signaux canoniques

2.1 Réponse à un échelon

2.2 Réponse à une impulsion $e(t) = \delta(t) = 1$ pour $t = 0$

3. Système de 1^{er} ordre généralisé

3.1 Définition

3.2 Réponse indicielle

B. *Système de 2^{ème} ordre*

1. Définition

2. Fonction de transfert et équation caractéristique

2.1 Fonction de transfert et Equation caractéristique

3. Réponse indicielle

4. Placement des pôles

5. Dépassement et temps de pic ($0 < m < 1$)

6. Temps de stabilisation

A. Système de 1^{er} ordre

1. Définition

Un système est dit de 1^{er} ordre s'il est décrit par une équation différentielle de la forme :

$$\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = ke(t) \Rightarrow \tau pS(p) + S(p) = kE(p)$$

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{k}{1 + \tau p}$$

K: gain statique

τ : constante de temps qui caractérise la vitesse d'évolution de la sortie

2. Réponse d'un système de 1^{er} ordre à quelques signaux canoniques

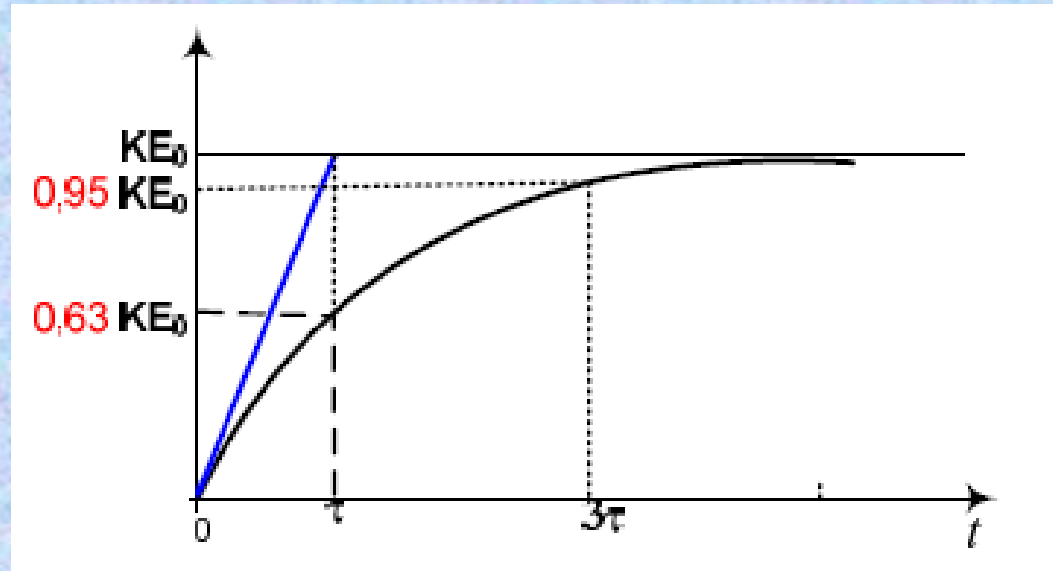
2.1. Réponse à un échelon: $e(t) = E_0 u(t)$

$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{k}{1 + \tau p} \Rightarrow S(p) = \frac{k}{1 + \tau p} E(p)$$

$$E(p) = E_0 \frac{1}{p} \Rightarrow S(p) = \frac{kE_0}{p(1 + \tau p)}$$

$$s(t) = kE_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

A. Système de 1^{er} ordre



t	0	τ	3τ	4τ	$+\infty$
$s(t)$	0	$0,63KE_0$	$0,95KE_0$	$0,98KE_0$	KE_0

- Le temps de réponse à 5% vaut 3τ ($tr_{5\%} = 3\tau$)
- Le signal de sortie atteint 63% de la valeur finale en τ unités de temps

A. Système de 1^{er} ordre

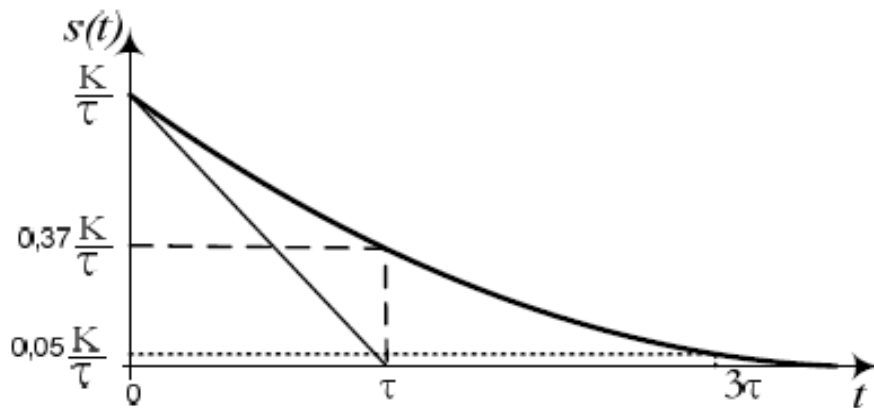
2.2 Réponse à une impulsion $e(t) = \delta(t) = 1$ pour $t = 0$

$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{k}{1 + \tau p} \Rightarrow S(p) = \frac{k}{1 + \tau p} E(p)$$

$$E(p) = 1 \Rightarrow S(p) = \frac{k}{1 + \tau p} = \frac{k}{\tau} \left(\frac{1}{\frac{1}{\tau} + p} \right)$$

Donc:

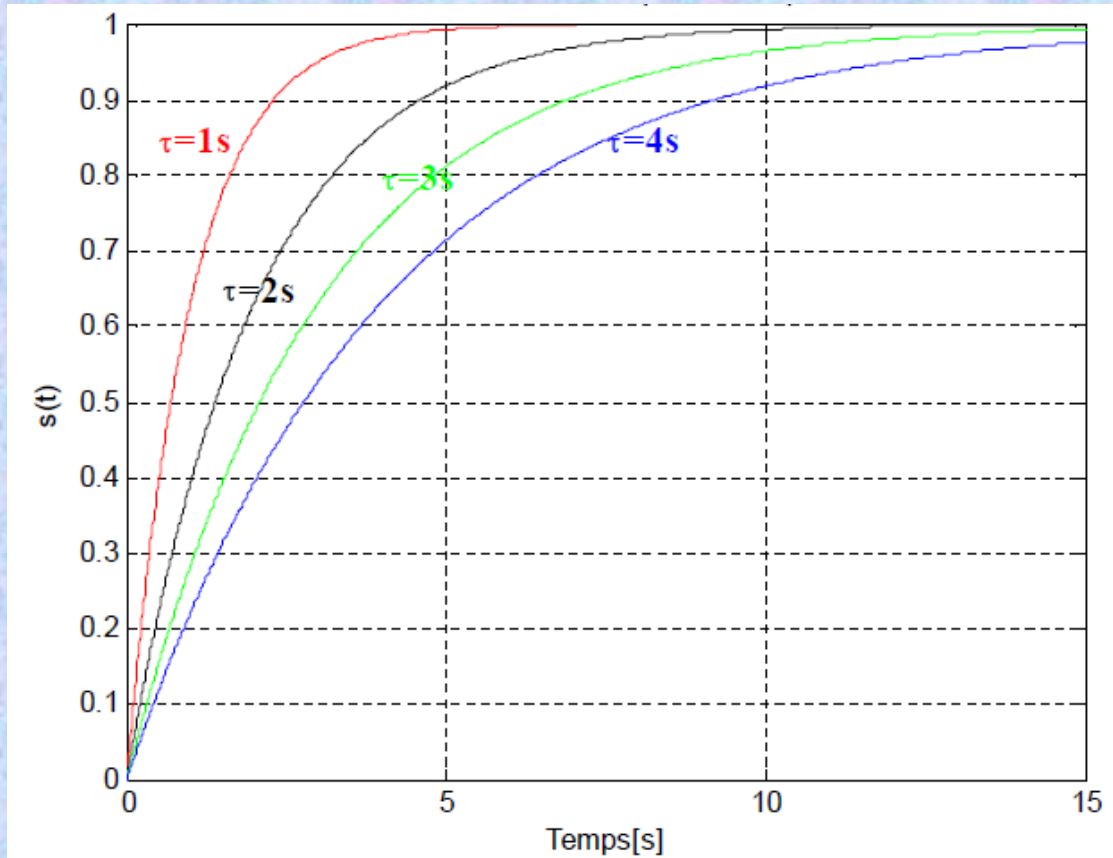
$$s(t) = \frac{k}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$$



t	0	τ	3τ	$+\infty$
$s(t)$	$\frac{K}{\tau}$	$0,37 \frac{K}{\tau}$	$0,05 \frac{K}{\tau}$	0

A. Système de 1^{er} ordre

Il est important de remarquer que plus τ est faible, plus le système est rapide.



Influence de la constante de temps (τ) sur la réponse d'un système du premier ordre

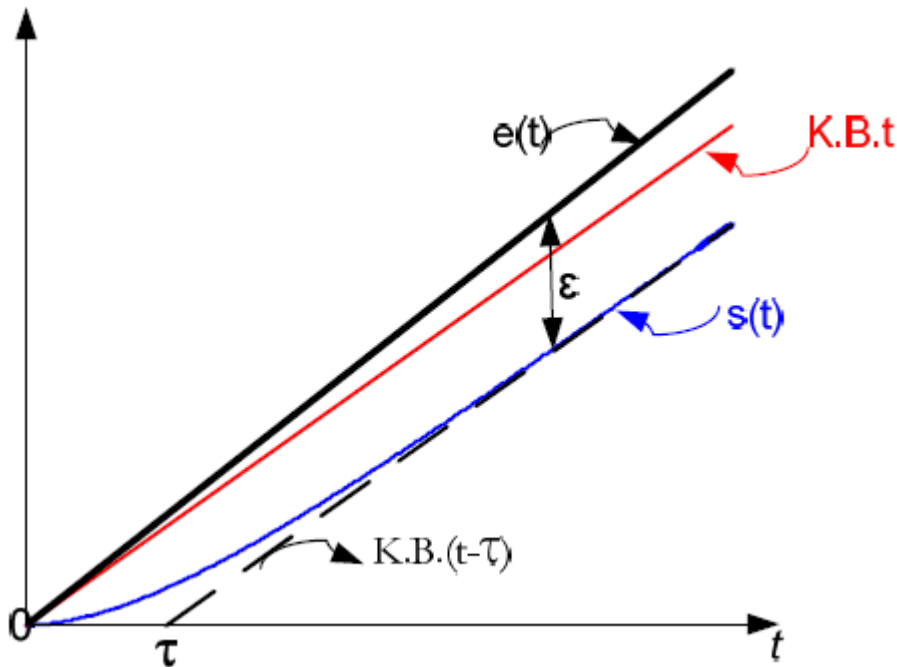
A. Système de 1^{er} ordre

2.2 Réponse à une rampe: $e(t) = B.r(t) = B.t.u(t)$.

$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{k}{1 + \tau p} \Rightarrow S(p) = \frac{k}{1 + \tau p} E(p)$$

$$E(p) = \frac{B}{p^2} \Rightarrow S(p) = \frac{-\tau Bk}{p} + \frac{Bk}{p^2} + \frac{\tau Bk}{p + \frac{1}{\tau}}$$

$$s(t) = Bk \left(t - \tau + \tau e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$



- L'asymptote à la courbe est : $a(t) = BK(t-\tau)$
- L'ecart ϵ , en régime établi, entre l'entrée et la sortie vaut $+\infty$ si $K < 1$,
- L'ecart ϵ , en régime établi, entre l'entrée et la sortie vaut $-\infty$ si $K > 1$,
- L'ecart ϵ , en régime établi, entre l'entrée et la sortie vaut $B\tau$ si $K = 1$,
- Il est baptisé erreur de traînage lorsque $K = 1$.

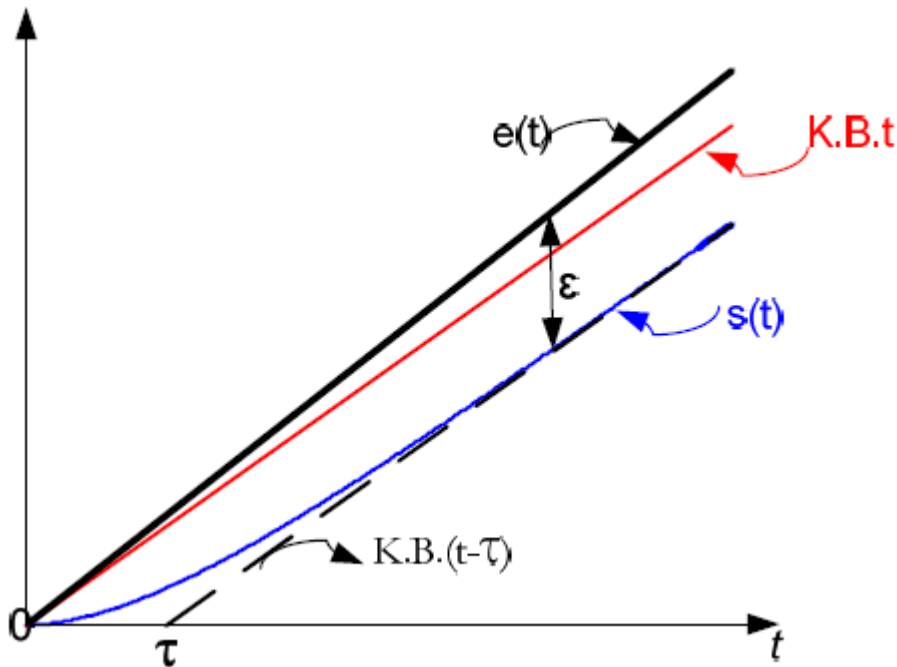
B. Système de 2^{ème} ordre

2.2 Réponse à une rampe: $e(t) = B.r(t) = B.t.u(t)$.

$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{k}{1 + \tau p} \Rightarrow S(p) = \frac{k}{1 + \tau p} E(p)$$

$$E(p) = \frac{B}{p^2} \Rightarrow S(p) = \frac{-\tau Bk}{p} + \frac{Bk}{p^2} + \frac{\tau Bk}{p + \frac{1}{\tau}}$$

$$s(t) = Bk \left(t - \tau + \tau e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$



- L'asymptote à la courbe est : $a(t) = BK(t-\tau)$

- L'ecart ϵ , en régime établi, entre l'entrée et la sortie vaut $+\infty$ si $K < 1$,

- L'ecart ϵ , en régime établi, entre l'entrée et la sortie vaut $-\infty$ si $K > 1$,

- L'ecart ϵ , en régime établi, entre l'entrée et la sortie vaut $B\tau$ si $K = 1$,

- Il est baptisé erreur de traînage lorsque $K = 1$.

A. Système de 1^{er} ordre

1. Définition

Un système est dit de 1^{er} ordre s'il est décrit par une équation différentielle de la forme :

$$\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = ke(t) \Rightarrow \tau pS(p) + S(p) = kE(p)$$

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{k}{1 + \tau p}$$

K: gain statique

τ : constante de temps qui caractérise la vitesse d'évolution de la sortie

2. Réponse d'un système de 1^{er} ordre à quelques signaux canoniques

2.1. Réponse à un échelon: $e(t) = E_0 u(t)$

$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{k}{1 + \tau p} \Rightarrow S(p) = \frac{k}{1 + \tau p} E(p)$$

$$E(p) = E_0 \frac{1}{p} \Rightarrow S(p) = \frac{kE_0}{p(1 + \tau p)}$$

$$s(t) = kE_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$