Résolution numérique des EDO d'ordre un

Introduction

Méthodes d'Euler (explicites, implicites).

Méthode d'Euler modifiée (Méthode de Heun).

Méthode du point médian.

Méthodes Runge-Kutta d'ordre 2, 3 et 4.

1 Introduction

Une EDO du premier ordre a la forme:

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

avec la condition initiale:

$$y(x_1) = y_1. \tag{2}$$

La solution est la fonction $y(x)$ qui satisfait l'équation et la condition initiale.

Dans l'équation différentielle, Eq. (1)-(2), la fonction $f(x, y)$ donne la pente de $y(x)$ en fonction de x et y.

2 MÉTHODES D'EULER

La méthode d'Euler est la technique la plus simple pour résoudre une EDO du premier ordre de la forme de l'Eq. (1):

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{3}$$

avec la condition initiale:

$$y(x_1) = y_1. \tag{4}$$

La méthode peut être formulée comme une méthode explicite ou implicite.

2.1 Méthode explicite d'Euler

La méthode explicite d'Euler (également appelée méthode d'Euler avancée) est une technique numérique en une seule étape pour résoudre une EDO de premier ordre. Cette pente est effectivement calculé à partir de l'équation différentielle:

$$Pente = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_i} = f(x_i, y_i) \tag{5}$$

La méthode d'Euler suppose que pour une courte distance h près de (x_i, y_i), la fonction $y(x)$ a une pente constante égale à la pente en (x_i, y_i). Avec cette hypothèse, le point suivant de la solution numérique (x_{i+1}, y_{i+1}) est calculé par:

$$x_{i+1} = x_i + h, \tag{6}$$

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), \tag{7}$$

Une solution approximative de (1)-(2) peut être obtenu soit par en intégrant numériquement l'équation ou en utilisant une différence finie approximation de la dérivée.

Dériver la méthode d'Euler en utilisant l'intégration numérique

L'équation (1) peut être écrite comme un problème d'intégration en multipliant les deux côtés par dx:

$$\int_{y_i}^{y_{i+1}} dy = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f\left(x, y\right) dx. \tag{8}$$

Réalisation de l'intégration sur le côté gauche et résolution de y_{i+1} donne:

$$y_{i+1} = y_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f\left(x, y\right) dx.$$

Le deuxième terme sur le côté droit est une intégrale qui doit être évaluée.

$$y_{i+1} = y_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f\left(x, y\right) dx = y_i + f\left(x_i, y_i\right)\left(x_{i+1} - x_i\right). \tag{9}$$

qui est identique à Eq. (5) puisque $h = (x_{i+1} - x_i)$.

Dériver la méthode d'Euler en utilisant l'approximation aux différences finies à la dérivée

La formule d'Euler, Eq. (5), peut également être dérivée en utilisant une approximation pour la dérivée dans l'équation différentielle. Le dérivé $\frac{dy}{dx}$ dans Eq. (5) peut être approximé avec la formule de différence à terme en évaluant l'EDO au point $x = x_i$:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_i} \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} = f\left(x_i, y_i\right) \tag{10}$$

Résolution de l'équation. (8) pour y_{i+1} donne l'équation (5) de la méthode d'Euler.

Exemple: Résolution d'une EDO du premier ordre en utilisant la méthode explicite d'Euler. Utilisez la méthode explicite d'Euler pour résoudre l' EDO

$$\frac{dy}{dx} = -1.2y + 7e^{-0.3x}$$

de $x = 0$ à $x = 2.5$ avec la condition initiale $y = 3$ à $x = 0$. y(0)=3

Résoudre à la main en utilisant $h = 0.5$.

Comparez les résultats avec la solution exacte (analytique):

$$y = \frac{70}{9}e^{-0.3x} - \frac{43}{9}e^{-1.2x}.$$

Solution. Le premier point de la solution est $(0, 3)$, qui est le point où l'initiale condition est donnée. Pour le premier point $i = 1$. Les valeurs de x et y sont $x_1 = 0$ et $y_1 = 3$.

Le reste de la solution est déterminé à l'aide des équations (6) et (7). Dans le problème actuel, ces équations ont la forme:

$$x_{i+1} = x_i + h = x_i + 0.5, \tag{11}$$

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) = y_i + 0.5\left(-1.2y_i + 7e^{-0.3x_i}\right), \tag{12}$$

Les équations (11) et (12) sont appliquées cinq fois avec $i = 1, 2, 3, 4$ et 5.

Première étape: Pour la première étape $i = 1$. Les équations (11) et (12) donnent:

$x_2 = x_1 + 0.5 = 0 + 0,5 = 0,5$

$y_2 = y_1 + (-1.2y_1 + 7e^{-0.3x_1})0.5 = 3 + (-1.2 \cdot 3 + 7e^{-0.3 \cdot 0})0.5 = 4.7.$

Le deuxième point est $(0.5, 4.7)$.

Deuxième étape: pour la deuxième étape $i = 2$. Les équations (11) et (12) donnent:

$x_3 = x_2 + 0.5 = 0.5 + 0.5 = 1.0$

$y_3 = y_2 + (-1.2y_2 + 7e^{-0.3x_2})0.5 = 3 + (-1.2 \cdot 4.7 + 7e^{-0.3 \cdot 0.5})0.5 = 4.893$

Le troisième point est $(1.0, 4.893)$.

Troisième étape: pour la troisième étape $i = 3$. Les équations (11) et (12) donnent:

$x_4 = x_3 + 0.5 = 1.0 + 0.5 = 1.5$

$y_4 = y_3 + (-1.2y_3 + 7e^{-0.3x_3})0.5 = 4.893 + (-1.2 \cdot 4.893 + 7e^{-0.3 \cdot 1.0})0.5 = 4.550$

Le quatrième point est $(1.5, 4.550)$.

Quatrième étape: pour la quatrième étape $i = 4$. Les équations (11) et (12) donnent:

$x_5 = x_4 + 0.5 = 1.5 + 0.5 = 2.0$

$y_5 = y_4 + (-1.2y_4 + 7e^{-0.3x_4})0.5 = 4.550 + (-1.2 \cdot 4.550 + 7e^{-0.3 \cdot 1.5})0.5 = 4.052$

Le cinquième point est $(2.0, 4.052)$.

Cinquième étape: pour la cinquième étape $i = 5$. Les équations (11) et (12) donnent:

$$x_6 = x_5 + 0.5 = 2.0 + 0.5 = 2.5$$

$$y_6 = y_5 + (-1.2y_5 + 7e^{-0.3x_5})0.5 = 4.052 + (-1.2 \cdot 4.052 + 7e^{-0.3 \cdot 2.0})0.5 = 3.542$$

Le sixième point est $(2.5, 3.542)$.

i	1	2	3	4	5	6
x_i	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5
y_i (num)	3.0	4.70	4.893	4.55	4.052	3.542
y_i (exa)	3.0	4.072	4.323	4.170	3.835	3.436
Erreur	0.0	-0.62	-0.57	0.380	-0.2165	-0.105

2.2 Méthode implicite d'Euler

La forme de la méthode implicite d'Euler est la même que celle du schéma explicite. Avec ces hypothèse, le point suivant de la solution numérique (x_{i+1}, y_{i+1}) est calculé par:

$$x_{i+1} = x_i + h, \tag{13}$$

$$y_{i+1} = y_i + hf\left(x_{i+1}, y_{i+1}\right), \tag{14}$$

Maintenant, l'inconnu y_{i+1} apparaît des deux côtés de l'Eq. (14), et sauf si $f\left(x_{i+1}, y_{i+1}\right)$ dépend de y_{i+1} dans un simple linéaire ou quadratique forme, il n'est pas facile ni même possible de résoudre l'équation pour y_{i+1} explicitement.

Exemple: Résolution d'un EDO du premier ordre à l'aide de la méthode implicite d'Euler.

Un composé chimique se désintègre au fil du temps lorsqu'il est exposé à l'air, à un taux proportionnel à sa concentration à la puissance 3/2. Dans le même temps, le composé est produit par un autre procédé. Le différentiel l'équation pour sa concentration instantanée est:

$$\frac{dn\left(t\right)}{dt} = -0.8n^{3/2} + 10n_1\left(1 - e^{-3t}\right) \tag{15}$$

où $n\left(t\right)$ est la concentration instantanée et $n_1 = 2000$ est la concentration initiale à $t = 0$.

Résolvez l'équation différentielle pour trouver la concentration en fonction du temps de $t = 0$ jusqu'à $t = 0.5$ s, en utilisant *la méthode implicite d'Euler* pour résoudre les racines d'une équation non-linéaire. Utilisez une taille de pas de $h = 0.002$ s et tracez n en fonction du temps.

Solution. Dans ce problème, c'est la variable indépendante et n est la variable dépendante. La fonction $f\left(t,n\right)$ est donné par:

$$f\left(t,n\right) = -0.8n^{3/2} + 10n_1\left(1 - e^{-3t}\right). \tag{16}$$

La solution numérique de l'équation différentielle se fait de manière incrémentielle à l'aide des équations (13) et (14):

$$n_{i+1} = n_i + h, \tag{17}$$

$$n_{i+1} = n_i + h\left[-0.8n_{i+1}^{3/2} + 10n_1\left(1 - e^{-3t_{i+1}}\right)\right], \tag{18}$$

où $f(t, n)$ de l'Eq. (16) a été remplacé dans l'équation (15).

2.3 Méthode d'Euler modifiée (Méthode de Heun, Méthode de correction du prédicteur d'Euler)

La méthode est une modification de la méthode explicite d'Euler. La pente au début est donnée par:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_i} = f(x_i, y_i). \tag{19}$$

L'estimation de la pente à la fin de l'intervalle est déterminée en calculant d'abord une valeur approximative pour y_{i+1} écrit comme $y_{i+1}^{(0)}$ en utilisant **la méthode explicite d'Euler**:

$$y_{i+1}^{(0)} = y_i + hf\left(x_i, y_i\right), \tag{20}$$

Cependant, dans la méthode de Heun, n'est pas la réponse finale, mais **une prédiction intermédiaire.**

Puis en estimant la pente à la fin de l'intervalle en substituant le point $\left(x_{i+1}, y_{i+1}^{(0)}\right)$ dans l'équation pour $\dfrac{dy}{dx}$:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\substack{y=y_{i+1}^{(0)} \\ x=x_{i+1}}} = f\left(x_{i+1}, y_{i+1}^{(0)}\right) \tag{21}$$

C'est ce qu'on appelle **une équation correctrice**.

La méthode Heun est une approche **prédicteur-correcteur**.

Une fois les deux pentes calculées, une meilleure valeur de y_{i+1} est calculée en utilisant la moyenne des deux pentes:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left[f\left(x_i, y_i\right) + f\left(x_{i+1}, y_{i+1}^{(0)}\right)\right]. \quad (22)$$

Elle peut être exprimé de manière concise comme

$$\begin{array}{ll} \text{Prédicteur} & y_{i+1}^{(0)} = y_i + hf\left(x_i, y_i\right), \\ \text{Correcteur} & y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left[f\left(x_i, y_i\right) + f\left(x_{i+1}, y_{i+1}^{(0)}\right)\right]. \end{array}$$

La méthode Euler modifiée est résumée dans l'algorithme suivant:

Algorithme pour la méthode Euler modifiée (Heun)

1. Étant donné une solution au point (x_i, y_i), calculez la valeur suivante de la variable indépendante:

$$x_{i+1} = x_i + h, \tag{23}$$

2. Calculez $f(x_i, y_i)$.

3. Estimer y_{i+1} en utilisant la méthode d'Euler:

$$y_{i+1}^{(k)} = y_i + hf(x_i, y_i), \tag{24}$$

4. Calculez $f\left(x_{i+1}, y_{i+1}^{(k)}\right)$.

5. Calculez la solution numérique à $x = x_{i+1}$:

$$y_{i+1}^{(k+1)} = y_i + \frac{h}{2}\left[f(x_i, y_i) + f\left(x_{i+1}, y_{i+1}^{(k)}\right)\right]. \tag{25}$$

Exemple: Résolution d'un EDO du premier ordre à l'aide de la méthode Euler modifiée. Déterminer la valeur de y lorsque $x = 0.1$ étant donné que

$$y' = x^2 + y^2, \quad y(0) = 1.$$

$$f(x_0, y_0) = 1$$

Solution: Nous prenons, $h = 0.05$. Ici, $x_0 = 0$ et $y_0 = 1$. Par conséquent, $f(x_0, y_0) = 1$. Par la formule d'Euler, on obtient

$$y_1^{(0)} = y_0 + hf(x_0, y_0) = 1.05.$$

Cette valeur prédite de $y_1^{(0)}$ est utilisée dans la formule du correcteur comme première approximation. En utilisant la formule de correction de la formule d'Euler améliorée, nous obtenons la première approximation de y_1 comme

$$\begin{aligned} y_1^{(1)} &= y_0 + \frac{h}{2}\left[f(x_0, y_0) + f\left(x_1, y_1^{(0)}\right)\right] \\ &= 1 + \frac{0.05}{2}\left[1 + (1.05)^2\right] \\ &= 1.05256. \end{aligned}$$

Encore une fois, la deuxième approximation de y_1 est

$$\begin{aligned} y_1^{(2)} &= y_0 + \frac{h}{2}\left[f(x_0, y_0) + \underbrace{f\left(x_1, y_1^{(1)}\right)}\right] \\ &= 1 + \frac{0.05}{2}\left[1 + \underbrace{\left\{(0.05)^2 + (1.05256)^2\right\}}\right] \\ &= 1.0527. \end{aligned}$$

Par conséquent, nous prenons $y_1 = 1.053$, corrigé à trois décimales, c'est-à-dire $y\left(0.05\right) = 1.053$. Ensuite, encore une fois par en utilisant la formule d'Euler, on obtient

$$y_2^{(0)} = y_1 + hf\left(x_1, y_1\right) = 1.10857.$$

Cette valeur prédite de $y_2^{(0)}$ est utilisée dans la formule du correcteur comme première approximation. En utilisant la formule de correction de la méthode d'Euler améliorée, nous obtenons la deuxième approximation de y_2 comme

$$y_2^{(1)} = y_0 + \frac{h}{2}\left[f\left(x_1, y_1\right) + f\left(x_1, y_2^{(0)}\right)\right] = 1.11157,$$

$$y_2^{(2)} = y_0 + \frac{h}{2}\left[f\left(x_1, y_1\right) + f\left(x_1, y_2^{(1)}\right)\right] = 1.11173.$$

Par conséquent, nous prenons $y_2 = 1.112$, corrigé à trois décimales, c'est-à-dire $y\left(0.1\right) = 1.112$. La solution recherchée est donc

$$y(0.1) = 1.112.$$

2.4 Méthode du point médian

La méthode du point milieu est une autre modification de l'explicite d'Euler méthode. Ici, la pente utilisée pour calculer y_{i+1} est une estimation de la pente au milieu de l'intervalle (pas). Cette estimation est calculée en deux étapes. Premièrement, la méthode d'Euler est utilisée pour calculer une valeur approximative de y au point médian de l'intervalle

$$x_m = x_i + h/2, \tag{26}$$

écrit comme y_m:

$$y_m = y_i + \frac{h}{2} f\left(x_i, y_i\right). \tag{27}$$

Ensuite, la pente estimée au point médian est calculée en remplaçant (x_m, y_m) dans l'équation différentielle pour $\dfrac{dy}{dx}$:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_m} = f\left(x_m, y_m\right). \tag{28}$$

La pente de l'Eq. (28) est ensuite utilisé pour calculer la solution numérique, y_{i+1}:

$$y_{i+1} = y_i + hf\left(x_m, y_m\right). \tag{29}$$

Exemple: Résolution d'un EDO de premier ordre à l'aide de la méthode du point médian. En utilisant la méthode du point médian, trouvez la valeur de y à $x = 1.4$, étant donné que

$$y' = -xy^2, \quad y\left(1\right) = 1.$$

Solution: Ici, $f(x,y) = -xy^2$, $x_0 = 1$, $y_0 = 1$. En prenant $h = 0.2$ et $n = \dfrac{1.4 - x_0}{h} = 2$. Par la méthode d'Euler,

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = 1 + (0.2) \times \left(-1 \times 1^2\right) = 0.8.$$

Par la méthode du point médian,

$$y_2 = y_0 + hf(x_1, y_1) = 1 + (0.2) \times \left(-1.2 \times (0.8)^2\right) = 0.69$$

D'où,

$$y(1.4) = 0.6928.$$

3 RUNGE-KUTTA METHODS

3.1 Méthodes Runge-Kutta du second ordre

La forme générale des méthodes de Runge-Kutta du second ordre est :

$$y_{i+1} = y_i + (c_1 K_1 + c_2 K_2)\, h, \tag{30}$$

avec

$$\begin{array}{l} K_1 = f\,(x_i, y_i) \\ K_2 = f\,(x_i + a_2 h, y_i + b_{21} K_1 h) \end{array} \tag{31}$$

où c_1, c_2, a_2 et b_{21} sont des constantes. Les valeurs de ces constantes varient avec la méthode spécifique du second ordre.

Méthode Euler modifiée sous la forme d'une méthode Runge-Kutta du second ordre

Pour la méthode d'Euler modifiée, les constantes dans Eqs. (30) et (31) sont :

$$c_1 = \frac{1}{2}, \quad c_2 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = 1 \quad \text{et} \quad b_{21} = 1.$$

En substituant ces constantes dans les équations (30) et (31) donnent :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left(K_1 + K_2\right).$$

avec

$$K_1 = f\left(x_i, y_i\right)$$
$$K_2 = f\left(x_i + h, y_i + K_1 h\right) \tag{32}$$

Exemple: Résolution d'un EDO de premier ordre à l'aide de la méthode Runge-Kutta de second ordre

(Méthode Euler modifiée). Utilisez la méthode Runge-Kutta du second ordre pour résoudre l'EDO

$$\frac{dy}{dx} = -1.2y + 7e^{-0.3x} = f(x, y)$$

de $x = 0$ à $x = 2.5$ avec la condition initiale $y = 3$ à $x = 0$.

Résoudre à la main en utilisant $h = 0.5$.

Solution: Le premier point de la solution est $(0, 3)$, qui est le point où la condition initiale est donnée. Les valeurs de x et y au premier point sont $x_1 = 0$ et $y_1 = 3$. Le reste de la solution se fait par étapes. À chaque étape, la valeur suivante de la variable indépendante est donnée par:

$$x_{i+1} = x_i + h = x_i + 0.5. \tag{32}$$

La valeur de la variable dépendante y_{i+1} est calculée en calculant d'abord K_1 et K_2 à l'aide de l'Eq. (31):

$$\begin{aligned} K_1 &= f(x_i, y_i) \\ K_2 &= f(x_i + h, y_i + K_1 h) \end{aligned} \tag{33}$$

puis en remplaçant les Ks dans l'Eq. (30):

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}(K_1 + K_2)\,h. \tag{34}$$

Première étape: Dans la première étape $i = 1$. Les équations (32)-(34) donnent:

$x_2 = x_1 + 0.5 = 0 + 0.5 = 0.5$

$K_1 = -1.2y_1 + 7e^{-0.3x_1} = -1.2 \cdot 3 + 7e^{-0.3 \cdot 0} = 3.4$

$y_1 + K_1 h = 3 + 3.4 \cdot 0.5 = 4.7$

$K_2 = -1.2(y_1 + K_1 h) + 7e^{-0.3(x_1+0.5)} = -1.2 \cdot 4.7 + 7e - 0.3 \cdot 0.5 = 0.385$

$y_2 = y_1 + \frac{1}{2}(K_1 + K_2)\,h = 3 + 2(3.4 + 0.385) \cdot 0.5 = 3.946$

À la fin de la première étape: $x_2 = 0.5$, $y_2 = 3.946$.

Deuxième étape: Dans la deuxième étape, $i = 2$. Les équations (32)-(34) donnent:

$x_3 = x_2 + 0.5 = 0.5 + 0.5 = 1.0$

$K_1 = -1.2y_2 + 7e^{-0.3x_2} = -1.2 \cdot 3.946 + 7e^{-0.3 \cdot 0.5} = 1.290$

$y_2 + K_1 h = 3.946 + 1.290 \cdot 0.5 = 4.591$

$K_2 = -1.2(y_2 + K_1 h) + 7e^{-0.3(x_2+0.5)} = -1.2 \cdot 4.591 + 7e^{-0.3 \cdot 1.0} = -0.3223$

$y_3 = y_2 + \frac{1}{2}(K_1 + K_2)h = 3.946 + \frac{1}{2}(1.290 + (-0.3223)) \cdot 0.5 = 4.188$

À la fin de la deuxième étape: $x_3 = 1.0$, $y_3 = 4.188$.

Troisième étape: Dans la troisième étape, $i = 3$. Les équations (32)-(34) donnent:

$x_4 = x_3 + 0.5 = 1.0 + 0.5 = 1.5$

$K_1 = -1.2y_3 + 7e^{-0.3x_3} = -1.2 \cdot 4.188 + 7e^{-0.3 \cdot 1.0} = 0.1601$

$y_3 + K_1 h = 4.188 + 0.1601 \cdot 0.5 = 4.268$

$K_2 = -1.2(y_3 + K_1 h) + 7e^{-0.3(x_3+0.5)} = -1.2 \cdot 4.268 + 7e^{-0.3 \cdot 1.5} = -0.6582$

$y_4 = y_3 + \frac{1}{2}(K_1 + K_2)\, h = 4.188 + \frac{1}{2}(0.1601 + (-0.6582)) \cdot 0.5 = 4.063.$

À la fin de la troisième étape: $x_4 = 1.5$, $y_4 = 4.063$.

Quatrième étape: Dans la troisième étape, $i = 4$. Les équations (32)-(34) donnent:

$x_5 = x_4 + 0.5 = 1.5 + 0.5 = 2.0.$

$K_1 = -1.2 y_4 + 7e^{-0.3 x_4} = -1.2 \cdot 4.063 + 7e^{-0.3 \cdot 1.5} = -0.4122$,

$y_4 + K_1 h = 4.063 + (-0.4122) \cdot 0.5 = 3.857$,

$K_2 = -1.2(y_4 + K_1 h) + 7e^{-0.3(x_4 + 0.5)} = -1.2 \cdot 3.857 + 7e^{-0.3 \cdot 2.0} = -0.7867$,

$y_5 = y_4 + \frac{1}{2}(K_1 + K_2)\, h = 4.063 + 2(-0.4122 + (-0.7867)) \cdot 0.5 = 3.763$.

À la fin de la quatrième étape: $x_5 = 2.0$, $y_5 = 3.763$.

Méthode du point médian sous la forme d'une méthode Runge-Kutta du second ordre

Pour la méthode du point médian, les constantes dans les équations (30) et (31) sont :

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 1, \quad a_2 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad b_{21} = \frac{1}{2}.$$

En substituant ces constantes dans les équations (30) et (31) donnent :

$$y_{i+1} = y_i + K_2 h,$$

avec

$$K_1 = f\left(x_i, y_i\right)$$

$$K_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}K_1 h\right) \tag{35}$$

La méthode de Heun

Dans la méthode de Heun, les constantes dans Eqs. (30) et (31) sont :

$$c_1 = \frac{1}{4}, \quad c_2 = \frac{3}{4}, \quad a_2 = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad b_{21} = \frac{2}{3}.$$

En substituant ces constantes dans les équations (30) et (31) donnent :

$$
\begin{aligned}
& y_{i+1} = y_i + \left(\frac{1}{4}K_1 + \frac{3}{4}K_2\right) h. \\
& \text{avec} \\
& K_1 = f\left(x_i, y_i\right) \\
& K_2 = f\left(x_i + \frac{2}{3}h, y_i + \frac{2}{3}K_1 h\right)
\end{aligned}
\tag{36}
$$

3.2 Méthode Runge-Kutta du troisième ordre

La forme générale des méthodes de Runge-Kutta du troisième ordre est:La forme générale des méthodes de Runge-Kutta du second ordre est :

$$
y_{i+1} = y_i + \left(c_1 K_1 + c_2 K_2 + c_3 K_3\right) h,
$$

avec

$$K_1 = f(x_i, y_i)$$
$$K_2 = f(x_i + a_2 h, y_i + b_{21} K_1 h)$$
$$K_2 = f(x_i + a_3 h, y_i + b_{31} K_1 h + b_{32} K_2 h)$$

où c_1, c_2, c_3, a_2, a_3, b_{21}, b_{31} et b_{32} sont des constantes. Les valeurs de ces constantes varient avec la méthode spécifique du second ordre.

La forme générale de la méthode Runge-Kutta du troisième ordre classique est:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(K_1 + 4K_2 + K_3),$$

où

$$K_1 = f(x_i, y_i),$$
$$K_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}K_1 h\right),$$
$$K_3 = f(x_i + h, y_i - K_1 h + 2K_2 h). \tag{37}$$

Exemple: Résolution d'un EDO de premier ordre à l'aide de la méthode Runge-Kutta de troisième ordre classique. Nous allons résoudre le problème de la valeur initiale,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -2y + x + 4, \\ y(0) &= 1, \end{aligned}$$

pour obtenir $y(0.2)$ en utilisant $h = 0.2$ (c'est-à-dire que nous avancerons d'un seul h).

Solution:

$$K_1 = f(0, y(0)) = f(0, 1) = -2 \times 1 + 0 + 4 = 2$$
$$K_2 = f(0.1, y(0) + 2 \times 0.2/2) = f(0.1, 1.2) = -2 \times 1.2 +$$
$$K_3 = f(0.2, y(0) - 2 \times 0.2 + 2 \times 1.7 \times 0.2) = f(0.2, 1.2$$

Donc

$$y(0.2) = y(0) + \frac{1}{6}(2 + 4 \times 1.7 + 1.64) \times 0.2 = 1.348.$$

D'autres variantes de la méthode Runge-Kutta du troisième ordre utilisent différentes combinaisons de constantes dans les équations (37). Les constantes de trois de ces méthodes, ainsi que les constantes de la méthode classique de Runge-Kutta du troisième ordre, sont répertoriées dans le tableau

Méthode	c_1	c_2	c_3	a_2	b_{21}	a_3	b_{31}	b_{3}
classique	1/6	4/6	1/6	1/2	1/2	1	-1	2
de Nyström	2/8	3/8	3/8	2/3	2/3	2/3	0	2/
Presque optimal	2/9	3/9	4/9	1/2	1/2	3/4	0	3/
Troisième de Heun	1/4	0	3/4	1/3	1/3	2/3	0	2/

3.3 Méthode Runge-Kutta du quatrième ordre

La forme générale des méthodes Runge-Kutta du quatrième ordre est:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}\left(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4\right), \quad i = 1, \cdots, n,$$

où

$$\begin{aligned} K_1 &= f\left(x_i, y_i\right) \\ K_2 &= f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}K_1 h\right) \\ K_3 &= f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}K_2 h\right) \\ K_4 &= f\left(x_i + h, y_i + K_3 h\right) \end{aligned} \tag{38}$$

Exemple: Résolution d'un EDO de premier ordre à l'aide de la méthode Runge-Kutta de quatrième ordre. Utilisez la méthode $RK4$ pour trouver la solution numérique à $x = 0.8$ pour

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{x+y} = f\left(x, y\right), \qquad y\left(0.4\right) = 0.41$$

en supposant la longueur de pas $h = 0.2$.

Solution. Ici,

$$n = \frac{b-a}{h} = \frac{0.8-0.4}{0.2} = 2$$

Pour $i = 0$, on a $x_0 = 0.4, \quad y_0 = 0.41$

$$K_1 = f(x_0, y_0) = \sqrt{0.4+0.41} = 0.9$$

$$K_2 = f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{1}{2}K_1 h\right) = \sqrt{0.5+0.5} = 1$$

$$K_3 = f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{1}{2}K_2 h\right) = \sqrt{0.5+0.51} = 1.00499$$

$$K_4 = f(x_0 + h, y_0 + K_3 h) = \sqrt{0.6+0.6109975} = 1.100455$$

$$y(0.6) = y_1 = y_0 + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) = 0.610348$$

Pour $i = 1$, $x_1 = 0.6$ et $y_1 = 0.6103476$, de même, on obtient

$$K_1 = f(x_1, y_1) = 1.10016$$

$$K_2 = f\left(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{1}{2}K_1 h\right) = 1.1929$$

$$K_3 = f\left(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{1}{2}K_2 h\right) = 1.19563$$

$$K_4 = f(x_1 + h, y_1 + K_3 h) = 1.28432$$

$$\begin{aligned} y(0.8) = y_2 &= y_1 + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \\ &= 0.848991. \end{aligned}$$

Par conséquent, nous avons

$$y(0.8) \approx 0.84899.$$