

Programme tectonique 2

Chapitre 1- Notions de contraintes et de déformations

- 1- Notions de force et de contrainte
- 2- Notions de déformation
- 3- Origine des contraintes

Chapitre 2- Déformations non tectoniques

- 2.1-La reptation
- 2.2 -Le glissement de terrain

Chapitre 3- Déformation tectonique

- 3.1-La déformation continu : les plis
 - Les structures monoclinales
 - Les plis
 - Eléments d'un pli
 - Classification des plis
- 3.2- La déformation discontinue : les failles
 - Eléments d'une faille
 - Nomenclature des failles
 - Joints de cisaillement, fentes de tension et diaclases
- 3.3- Les nappes de charriage
- 3.4- Notion de microtectonique

- 1- Notions de force et de contrainte
- 2- Notions de déformation
- 3- Origine des contraintes

I- Notions de force et de contrainte

I 1 Introduction

Qu'est-ce que la tectonique?

La Tectonique est la discipline des Sciences de la Terre qui traite des déformations de l'écorce terrestre. Du grec «Tektonikos», propre au charpentier, à l'architecte. Il implique donc une notion de structure.

Géologie Structurale est souvent employée comme synonyme de Tectonique. La *Géologie Structurale* («Structural Geology») est essentiellement l'étude de la géométrie des structures. Par contre, la *Tectonique* («Tectonics») concerne plutôt l'étude de ces structures en relation avec les mouvements (*Cinématique*) et les forces (*Dynamique*) qui les ont créées.

2- Notions de contrainte et de déformation

En Dynamique, si deux forces F et \hat{F} de même direction, de sens opposés et d'intensités égales sont appliquées en un point P, leur somme $F + \hat{F} = 0$ et leur travail $W_{F,\hat{F}} = 0$. Ceci est vrai dans le cas où P est un point virtuel mais s'il s'agit d'un bloc rocheux, non parfaitement rigide, celui-ci se déforme. Les forces agissant à la surface de ce bloc produisent dans celui-ci des forces internes. On dit que ce bloc rocheux est en *état de contrainte*.

2.1 Notion de force et de contrainte

2.1.1 Notion de force

Les forces agissant sur un bloc rocheux peuvent être séparées en deux types de forces.

Des forces de volume et des forces de surface.

Les forces de volume agissent sur tout le volume rocheux. Exemple : force de pesanteur $F_p = mg$.

Une colonne de roche de section S , de hauteur h et de densité ρ est soumise à une force de pesanteur

$$F_p = \rho * S * h * g$$

g étant l'accélération de la pesanteur.

Cette force F_p est verticale et dirigée vers le bas.

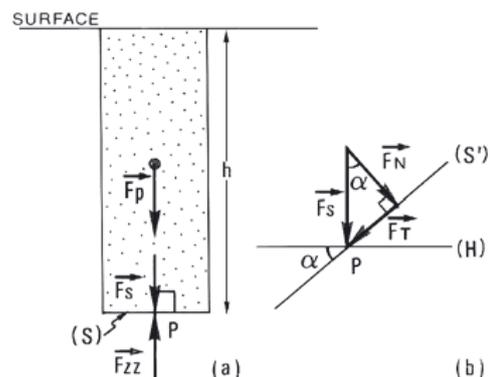


Figure 1 – Force de pesanteur F_p agissant sur une colonne de roche et force de surface F_s agissant sur sa base horizontale (S).

La force d'Archimède est aussi une force de volume qui agit sur les volumes rocheux. Supposons un bloc continental de densité $\rho = 2.7$ reposant en équilibre hydrostatique sur le manteau de densité $\rho_m = 3,3$; ce bloc reçoit une poussée verticale F_a dirigée vers le haut (Fig. 2.2) égale au poids du volume de manteau déplacé : $F_a = S * r * \rho_m * g$ Le bloc étant en équilibre, on peut écrire $F_p = F_a$

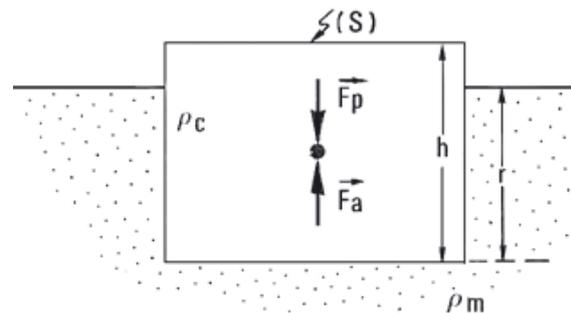


Figure 2- Force d'Archimède F_a et force de pesanteur F_p agissant sur un bloc continental en équilibre hydrostatique sur le manteau.

$$F_p = \rho * S * h * g = F_a = S * r * \rho_m * g \implies r = (\rho * S * h * g) / (S * \rho_m * g)$$

Ainsi, un bloc continental d'épaisseur totale $h = 70$ km, présente une partie basale r de 57 km d'épaisseur immergée dans le manteau de telle sorte que la force de pesanteur F_p soit équilibrée par la poussée d'Archimède F_a . Le problème est ici très simplifié puisqu'on néglige la croûte et la couche d'eau océaniques.

Les forces de surface agissent, elles, sur les surfaces limitant le volume rocheux. Sur la figure 2.1a, la force de surface agissant sur la base horizontale de la colonne de roche à une profondeur h est $F_s = S * h * \rho_c * g$. Elle est normale à cette surface et résulte de la force de volume agissant sur la colonne de roche sus-jacente. La pression $p = F_s / S$, à la base de cette colonne est la pression ou *contrainte lithostatique* (σ_{zz}) agissant sur la surface S au point P . Le système étant en équilibre, F_s est équilibrée par une force F_{zz} de même direction, de sens opposé et d'intensité égale.

Si cette force F_s est appliquée sur une surface S faisant avec l'horizontale un angle α (Fig. 2.1b), F_s se décompose vectoriellement en une force F_N normale à la surface et une force F_T qui lui est tangentielle.

Dans le cas de la subduction d'une lithosphère océanique sous une lithosphère continentale par exemple (Fig. 2.3), l'interface des deux lithosphères est soumise à des forces de surface horizontales F_{xx} résultant de la convergence des deux lithosphères et verticales F_{zz} induites par les forces de volume. Les forces de surface se décomposent en *forces tangentielles* (ou *cisailantes*) et *forces normales* à l'interface.

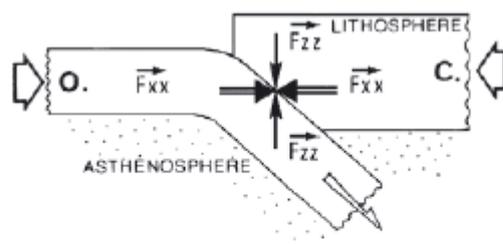


Figure 2.3 - Forces à l'interface entre une lithosphère océanique (O) et une lithosphère continentale (C) dans une zone de subduction.

I 2. Notion de contrainte

1 2.1. Contrainte sur un plan

Maintenant, supposons idéalement un corps macroscopiquement continu (Fig. 2.4), soumis à aucune force, à aucune torsion dont les atomes se trouvent dans une position d'équilibre et soumettons ce corps à des forces externes. Supposons qu'une surface ΔS de normale ν , passant par un point P, sépare ce corps en deux parties. L'ensemble des forces exercées par la partie C1 sur la partie C2 a pour résultante ΔF puisqu'il n'y a pas de torsion.

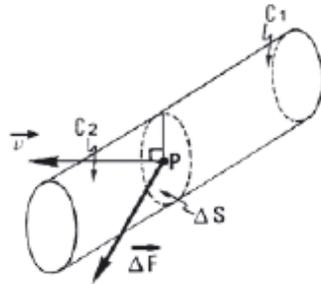


Figure 2.4 - Force résultante ΔF exercée par la partie C1 du solide sur la partie C2, au point P sur la surface ΔS .

Quand ΔS tend vers zéro : $\left(\frac{\Delta F}{\Delta S}\right) \rightarrow \frac{dF}{dS} = \sigma$ (1)

Le vecteur σ est la *contrainte* (en anglais : stress) appliquée à la surface dS au point P, due aux forces externes. La contrainte a les dimensions d'une pression et s'exprime par une équation aux dimensions $= FS^{-1} = ML^{-1}T^{-2}$.

On ne peut donc additionner des vecteurs-contraintes que s'ils s'appliquent à une même surface, ce qui est différent des vecteurs-forces. La contrainte s'exprime en pascal ($kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-2}$) dans le système S.I. et en bar dans le système C.G.S. ($1 \text{ bar} = 10^6 \text{ dynes} \cdot \text{cm}^{-2} = 10^6 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$) ; $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$.

Dans le cas général, le vecteur-contrainte σ est oblique à la surface dS . L'intensité de la contrainte varie avec l'orientation de la surface dS passant par le point P (c'est une *pression anisotrope*). Ceci est très différent de ce qui se passe dans les liquides dans lesquels la pression p est normale à toute surface passant par le point P et de même intensité (*pression isotrope*). Le vecteur-contrainte σ étant oblique à la surface dS , il peut se décomposer (Fig. 2.5) comme le vecteur-force en une *contrainte normale* σ_N et une *contrainte tangentielle* σ_T (notée souvent τ) au plan S.

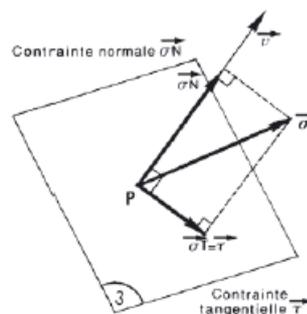
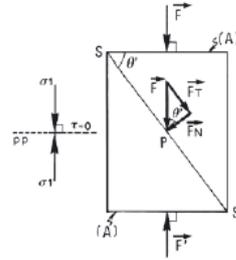


Figure 2.5 - Décomposition vectorielle d'une contrainte s appliquée à un plan S en une contrainte normale σ_N et une contrainte tangentielle τ .

I 2.2. États de contrainte uniaxial et biaxial.

221 - État de contrainte uniaxial

Supposons un solide isotrope soumis à deux forces \mathbf{F} et \mathbf{F}' opposées et égales, appliquées orthogonalement aux faces opposées et parallèles A et A' de ce solide (Fig. 2.6a). Calculons la contrainte appliquée au point P sur une surface SS' faisant avec A un angle θ (θ est aussi l'angle entre la direction de la contrainte et la normale au plan SS') :



Contrainte uniaxiale(σ)

Figure 2.6 - (a) Contrainte uniaxiale appliquée à un plan SS'.

$$\begin{aligned}
 - \text{contrainte normale } \sigma_N &= \frac{F_N}{SS} = \frac{F \cos \theta'}{A / \cos \theta'} = \frac{F}{A} \cdot \cos^2 \theta' = \frac{F}{A} \cdot \frac{1 + \cos 2\theta'}{2} \\
 - \text{contrainte tangentielle } \tau &= \frac{F_T}{SS} = \frac{F \sin \theta'}{A / \cos \theta'} = \frac{F}{A} \cdot \sin \theta' \cdot \cos \theta' = \frac{F}{A} \cdot \frac{\sin 2\theta'}{2}
 \end{aligned}$$

Il existe un plan remarquable pour lequel σ_N est maximum et égal à F/A et sur lequel $\tau = 0$. C'est le plan pour lequel $\cos 2\theta = 1$ et $\sin 2\theta = 0$, c'est-à-dire pour $\theta = 0$. **Ce plan est dit un plan principal** (Fig. 2.6a) et la contrainte normale à ce plan est la *contrainte principale* $\sigma_1 = F/A$. On peut alors écrire :

$$\sigma_N = 1/2 \sigma_1 (1 + \cos 2\theta') \quad \text{et} \quad \tau = 1/2 \sigma_1 \cdot \sin 2\theta'$$

Il existe par ailleurs deux plans sur lesquels la *contrainte* tangentielle (ou *cisailante*) est *maximum* : ce sont les plans pour lesquels $\sin 2\theta = 1$ donc $\theta = 45^\circ$.

222 Etat plan de contrainte (*contraintes biaxiales*) (ou *contrainte plane*)

Pour un échantillon soumis sur ses faces orthogonales A et B à des forces \mathbf{F}_1 et \mathbf{F}_3 orthogonales (avec $F_1 > F_3$, Fig. 2.6b), il existe deux contraintes principales $\sigma_1 = F_1 / A$ et $\sigma_3 = F_3 / B$, puisque les faces A et B sont par définition des plans principaux. La contrainte appliquée au point P sur une surface SS' faisant avec la face A un angle θ , s'exprime aussi en fonction des contraintes principales σ_1 et σ_3 . En faisant la somme des contraintes normales et tangentielles sur le même plan SS' du fait des contraintes σ_1 et σ_3 , on obtient:

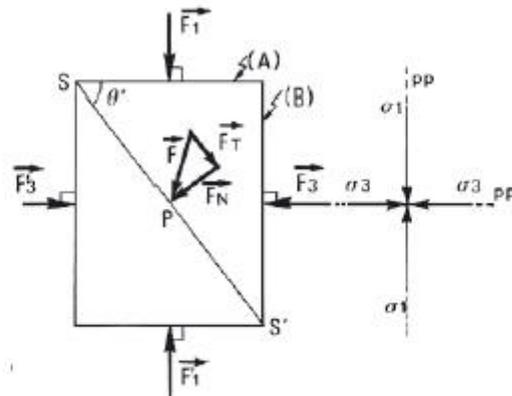


Figure 2.6 (b) Contrainte biaxiale appliquée à un plan SS'.

$$\begin{aligned}\sigma_N &= \sigma_1 \cdot \cos^2 \Theta' + \sigma_3 \cdot \cos^2 (\pi/2 - \Theta') = \sigma_1 \cdot \cos^2 \Theta' + \sigma_3 \cdot \sin^2 \Theta' \\ \tau &= \sigma_1 \cdot \cos \Theta' \cdot \sin \Theta' - \sigma_3 \cdot \cos(\pi/2 - \Theta') \cdot \sin (\pi/2 - \Theta') \\ &= (\sigma_1 - \sigma_3) \sin \Theta' \cdot \cos \Theta'\end{aligned}$$

En écrivant ces valeurs en fonction de l'angle 2θ , on obtient :

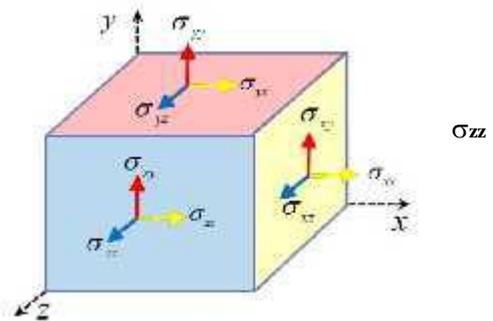
$$\begin{aligned}\sigma_N &= 1/2 (\sigma_1 + \sigma_3) + 1/2 (\sigma_1 - \sigma_3) \cos 2\Theta' \\ \text{et } \tau &= 1/2 (\sigma_1 - \sigma_3) \sin 2\Theta'\end{aligned}$$

Si on appelle θ l'angle que fait la contrainte principale compressive σ_1 et le plan de glissement SS' (ce que nous ferons toujours par la suite) alors le signe entre les deux termes de σ_N devient moins (-) ; l'expression de τ ne change pas. La différence $(\sigma_1 - \sigma_3)$ est appelée la *contrainte différentielle*. Ce cas de la contrainte plane est une simplification, applicable aux problèmes à deux dimensions, du cas de la contrainte triaxiale.

I 2.3. État de contrainte triaxial.

Analysons le cas d'un corps isotrope soumis à un système quelconque de forces. Soit un corps déformable C en état de contrainte, sans torsion du matériau (Fig. 2.7a). L'état de contrainte dans ce corps est déterminé quand en chaque point on connaît les contraintes sur trois plans arbitrairement choisis. Menons par le point O quelconque trois plans parallèles aux plans de coordonnées dans le système d'axes Ox, Oy, Oz et un plan S suffisamment proche de O; ces 4 plans définissent un tétraèdre élémentaire (Fig. 2.7a). L'interaction de ce tétraèdre élémentaire sur le corps C se fait par des contraintes qui dans le cas général sont obliques sur les plans qui le limitent (Fig. 2.4).

Chacune de ces contraintes S_x, S_y, S_z peut se décomposer suivant les trois axes du repère, par exemple (Fig. 2.7b) pour S_z , le vecteur-contrainte sur la face du tétraèdre ayant pour normale Oz , on obtiendra : suivant Oz et σ_{zx}, σ_{zy} dans le plan de normale Oz (le premier indice est alors z) suivant les axes Ox et Oy (le deuxième indice est alors respectivement x et y). Si nous notons les contraintes tangentielles par τ et la contrainte normale par σ , ces trois composantes s'écrivent : σ_{zz}, τ_{zx} et τ_{zy} . On obtient neuf paramètres pour les contraintes S_x, S_y et S_z sur les 3 faces du tétraèdre élémentaire (Fig. 2.7a) soit neuf quantités scalaires qui peuvent s'écrire sous la forme suivante: =====>



$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yz} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

Ces 9 paramètres représentent un opérateur mathématique appelé *tenseur* qui est une matrice carrée 3 x 3 définissant complètement l'état de contrainte au point P.

En fait s'il n'y a pas de torsion dans le solide, nécessairement $\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{xz} = \tau_{zx}$ et $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ (Fig. 2.7a). Ceci nous ramène à 6 paramètres indépendants et le tenseur des contraintes est symétrique

par rapport à sa diagonale (σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz}). De même que pour la contrainte uniaxiale, il existe un plan principal et que pour la contrainte biaxiale, il existe deux plans principaux orthogonaux.

On montre que dans le cas général il existe trois plans principaux orthogonaux sur lesquels la contrainte tangentielle est nulle.

Les normales à ces plans principaux sont les *directions principales de la contrainte*. Suivant deux de ces directions, les *valeurs des principales des contraintes* passant par le point P sont respectivement *maximum* σ_1 et *minimum* σ_3 ; suivant la troisième direction la valeur σ_2 est *intermédiaire* entre σ_1 et σ_3 . Dans le repère particulier (O, X, Y, Z) des contraintes principales σ_1 , σ_2 , σ_3 , on peut donc écrire le tenseur des contraintes sous une forme simplifiée puisque les contraintes tangentielles y sont nulles :

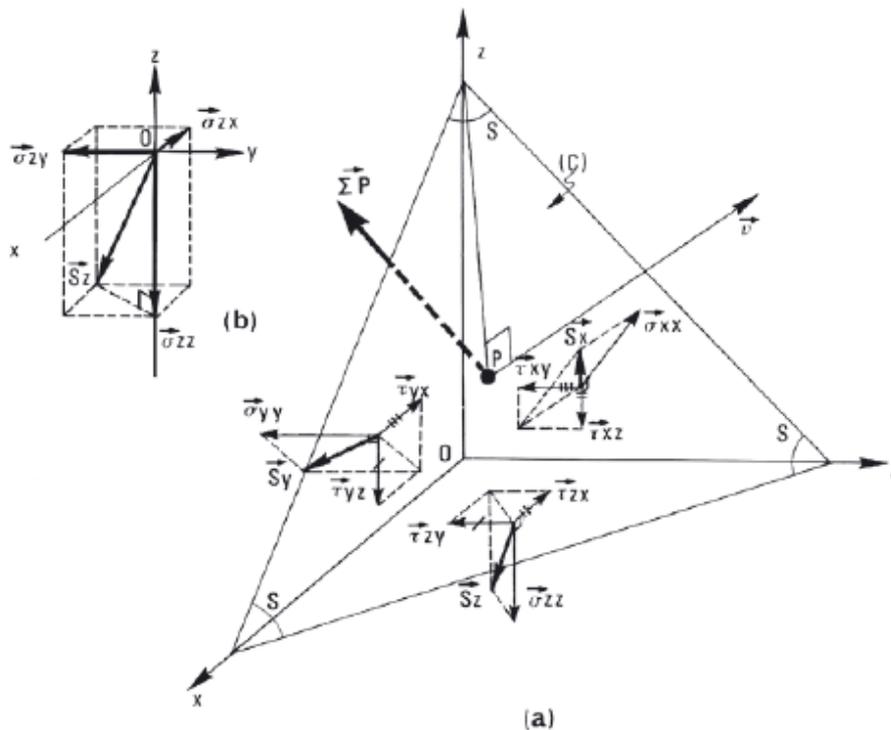


Figure 2.7 - État de contrainte triaxial en un point P d'un corps (C). Les indices simples x, y, z indiquent que les vecteurs-contraintes sont appliqués aux trois faces du tétrahédre, orthogonales respectivement aux directions Ox, Oy, Oz sans être orientées eux-mêmes suivant ces directions.

I 3 L'ellipsoïde des contraintes et le champ de contrainte

Le lieu géométrique des extrémités des vecteurs-contraintes pour toutes les surfaces S passant par P est un ellipsoïde qui a pour axes, les trois axes principaux de la contrainte. En effet, soit une surface A de normale ν (Fig. 2.8), faisant avec la direction principale **OX** un angle θ ; σ_1 et σ_2 sont les contraintes principales. La contrainte σ appliquée en P sur la surface A à pour composantes σ_x et σ_y suivant les directions principales **OX** et **OY**. On peut alors écrire :

$$\sigma_x \cdot A = \sigma_1 \cdot A \sin\theta \text{ et } \sigma_y \cdot A = \sigma_2 \cdot A \cos\theta$$

$$\frac{\sigma_x^2}{\sigma_1^2} = \sin^2\theta \quad \frac{\sigma_y^2}{\sigma_2^2} = \cos^2\theta$$

et

comme $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$, il s'ensuit que :

$$\frac{\sigma_x^2}{\sigma_1^2} + \frac{\sigma_y^2}{\sigma_2^2} = 1 \quad (5)$$

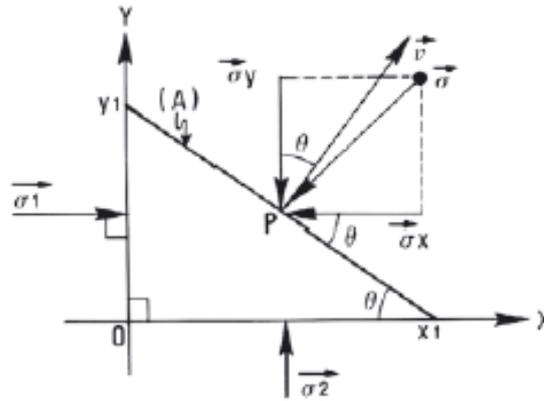


Figure 2.8 - État de contrainte biaxial et vecteur-contrainte en un point P sur une surface A faisant avec la direction de σ_1 un angle θ .

Ceci est l'équation d'une ellipse centrée sur P et ayant pour grand et petit axes σ_1 et σ_2 . Les extrémités des vecteurs-contraintes σ appliqués au point P sont situées sur cette ellipse. On montrerait de la même façon en trois dimensions que :

$$\frac{\sigma_x^2}{\sigma_1^2} + \frac{\sigma_y^2}{\sigma_2^2} + \frac{\sigma_z^2}{\sigma_3^2} = 1$$

Ce qui est l'équation d'un ellipsoïde ayant pour axes σ_1 , σ_2 , σ_3 . L'ellipsoïde des contraintes triaxial est dit *polyaxial* (Fig. 2.9a) dans le cas général où $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$. Si $\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3$ ou $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$ (Fig. 2.9b) il est dit de révolution, ou *axial*, respectivement autour des axes σ_3 et σ_1 . Si $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$, l'ellipsoïde devient une sphère (Fig. 2.9c) et l'état de *contrainte* est de type *hydrostatique*.

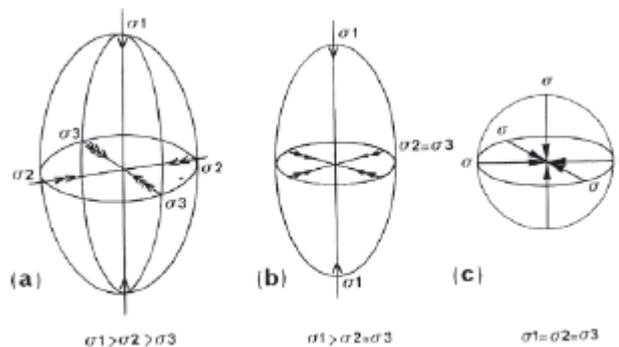


Figure 2.9 - Ellipsoïde de contrainte triaxial ; (a) : polyaxial, (b) : de révolution, (c) : hydrostatique.

Si les ellipsoïdes sont identiques en forme et en orientation en tout point d'un volume considéré on dit que le *champ de contrainte* (*stress field*) dans ce volume est *homogène* ou *uniforme*. C'est ce qui a été supposé dans toutes les démonstrations précédentes. Sinon on dit que le *champ de contrainte* est *hétérogène*.

2.1.4 Contrainte moyenne et contrainte déviatorique

Dans tout état de contrainte on peut définir une *contrainte moyenne* correspondant à la partie hydrostatique du tenseur qui ne produit qu'un changement de volume du matériau :

$$\bar{\sigma} = 1/3(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

La partie $(\sigma_1 - \bar{\sigma})$ restante qui dévie de cette partie hydrostatique est appelée *contrainte déviatorique* ou *déviateur* des contraintes. C'est elle qui produit le changement de forme du matériau. Les trois valeurs principales de la contrainte déviatorique sont :

$$\sigma'_1 = \sigma_1 - \bar{\sigma} = 1/3(2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3)$$

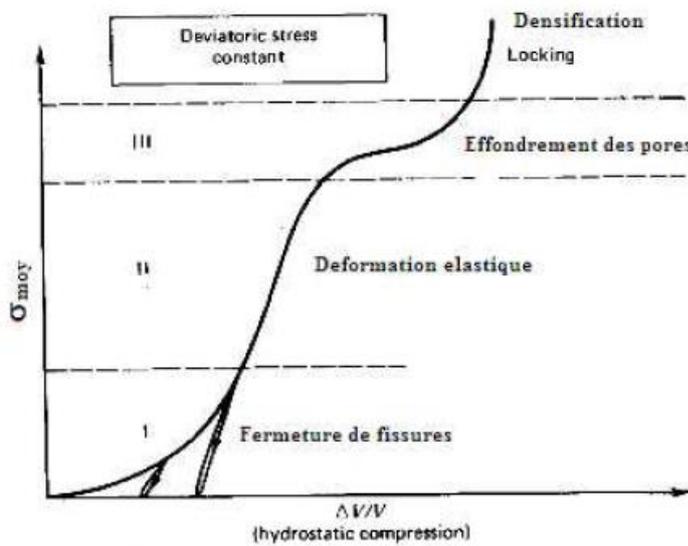
$$\sigma'_2 = \sigma_2 - \bar{\sigma} = 1/3(2\sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_1)$$

$$\sigma'_3 = \sigma_3 - \bar{\sigma} = 1/3(2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2)$$

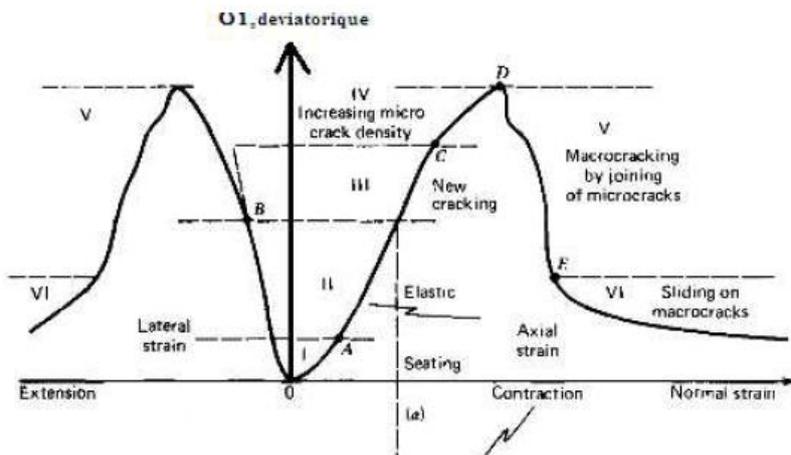
Et comme on considère toujours un état plan de contrainte ($\sigma_2 = \sigma_3$), cela devient égale à :

$$\sigma'_1 = \frac{2}{3}(\sigma_1 - \sigma_3) = \text{ça s'appelle } \sigma_1 \text{ déviatorique}$$

$$\sigma'_3 = \frac{-1}{3}(\sigma_1 - \sigma_3) = \text{ça s'appelle } \sigma_3 \text{ déviatorique}$$



Déformation volumique sous la l'augmentation de la contrainte moyenne. La contrainte déviatorique reste constante



Le tenseur des contraintes déviatoriques a donc une diagonale (ou trace) nulle puisque $\bar{\sigma}_1 + \bar{\sigma}_2 + \bar{\sigma}_3 = 0$.

En géologie structurale, la valeur principale la grande σ_1 , compressive, est notée positivement, la valeur principale la plus petite σ_3 est nécessairement négative, $\bar{\sigma}_2$ est soit positive soit négative. On dit que σ_1 est en compression et σ_3 en traction (ou tension) alors que souvent dans les roches, à une profondeur donnée, les contraintes totales σ_1 et σ_3 sont respectivement la plus grande et plus petite compression.

2.2 NOTION DE DÉFORMATION

Quand un solide est soumis à une contrainte, il se déforme : chacune de ses particules est déplacée et occupe une nouvelle position.

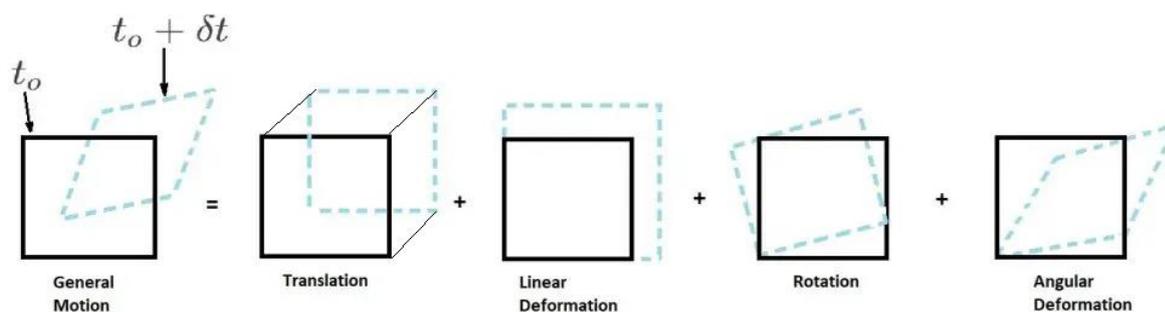
En géologie, “**déformation**” est un terme générique qui décrit les changements de forme, de position ou d’orientation d’un corps soumis à des contraintes. C’est le seul élément que l’on peut décrire à partir d’objets géologiques.

On appelle donc *déformation* d’un corps toute opération qui fait varier la forme, les dimensions et la localisation de ce corps d’un état initial à un état final.

2.2.1 Les composantes élémentaires de la déformation :

La déformation peut être une ou une combinaison de plusieurs composantes à savoir :

a- **La translation**, la rotation, la distorsion (déformation interne ou strain), et le changement de volume



Une déformation est donc définie par un champ de déplacement liant l’état initial à l’état final. C’est la comparaison de conditions à deux instants différents alors que la contrainte, elle, spécifie une condition à un instant donné.

b- **La rotation**

C’est le changement d’orientation

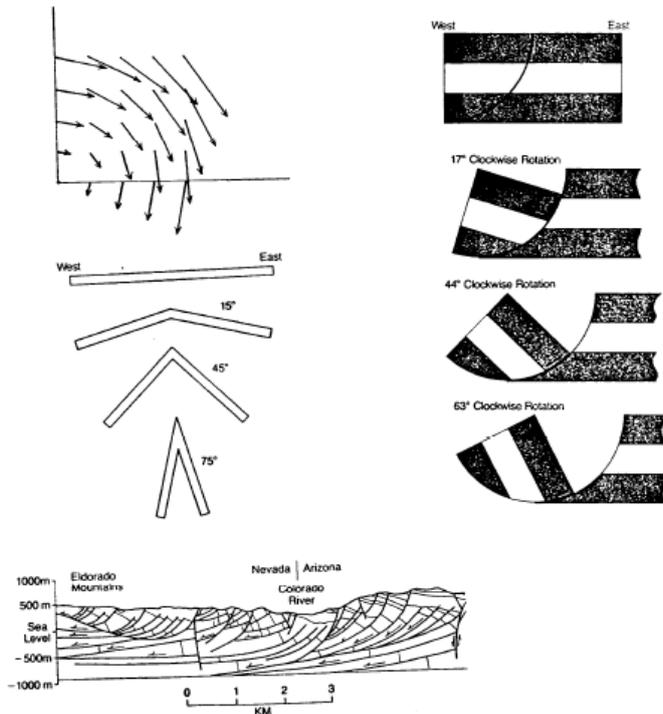


Figure 3. Exemples de rotation, à différentes échelles; surtout en association avec des failles courbes (failles listriques).

c- *Distorsion et déformation interne.*

Elle exprime le changement de forme.

C'est le composant le plus important de la déformation en géologie

- *la déformation linéaire.* Allongement dans un sens, raccourcissement dans l'autre, comme un élastique qu'on étend ou une boule de pâte à modeler qu'on écrase. Plusieurs rapports sont utilisés pour caractériser le changement de longueur d'un état initial L_0 à un état final L_1 (Fig. 2.12a) :

On peut le quantifier de plusieurs façons.

- l'allongement relatif ou extension : $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{l_1 - l_0}{l_0}$

ε est négatif quand il y a raccourcissement et positif quand il y a allongement.

Suivant les problèmes abordés on utilise l'une ou l'autre de ces valeurs.

On utilise également d'autres mesures telles que l'étirement ou stretch :

- L'étirement (stretch) : $s = \frac{l_1}{l_0} = (\varepsilon + 1)$

- la contraction : $\varepsilon = \frac{l_1}{l_0} = (\varepsilon - 1)100$

Et l'élongation quadratique : $\lambda = s^2 = (1 + \varepsilon)^2$

d- *La déformation angulaire ou déformation cisailante.*

Une déformation angulaire peut se mesurer par l'angle que font deux droites initialement orthogonales, le cisaillement angulaire (angular strain) Φ . On utilise aussi la déformation cisailante (shear strain) γ ; ils sont reliés par $\gamma = \tan\Phi$.

Un corps de forme rectangulaire par exemple devient un parallélogramme (Fig. 2.12b).

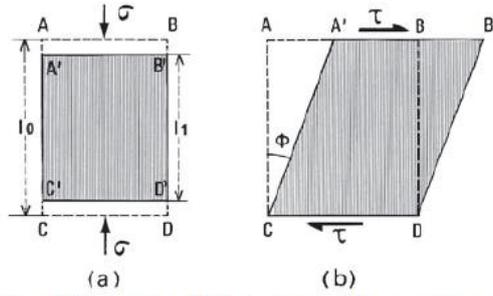


Figure 2.12 - Déformation linéaire (a) et déformation angulaire (b).

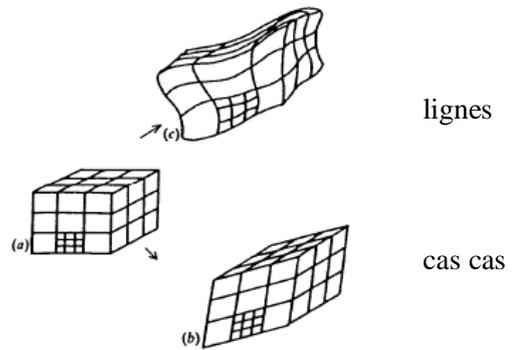
Ce changement de forme est mesuré par la déviation angulaire de deux droites orthogonales dans l'état initial par ce qu'on appelle le *cisaillement angulaire* ϕ et la *déformation cisailante* $\lambda = \tan \phi$.

2.3. Types de déformation

a. Homogène ou hétérogène

La déformation est dite homogène (homogeneous) si des initialement parallèles le restent après la déformation.

On parle sinon de déformation hétérogène (inhomogeneous, heterogeneous), ce qui est d'ailleurs le général dans la nature.



Déformation homogène et hétérogène.

b- Continue ou discontinue :

La déformation est continue si ses propriétés varient progressivement dans l'objet déformé (pli, par exemple) ; elle est discontinue pour le reste (faille).

2.2.2 Ellipse et ellipsoïde de déformation

Si on considère un marqueur rond à l'origine, qui est soumis à une déformation homogène, il se transforme en une ellipse : l'ellipse de déformation. L'orientation et la taille de l'ellipse permet de décrire totalement la distorsion subie par l'objet.

2.1. Déformation plane, ellipse de déformation. Prenons deux exemples particuliers, simples, de déformation plane (dans le plan de la feuille de papier).

Sur la figure 2.13a, un carré de côté égal à 1 est transformé en un rectangle tel que tout point $A(x_0, y_0)$ du carré est transformé en un point A' de coordonnées :

$$x_1 = x_0 (1 + \varepsilon_x) \quad \text{et} \quad y_1 = y_0 (1 + \varepsilon_y).$$

Dans le cas où la transformation se fait sans changement de surface :

$S = (1 + \epsilon_x)(1 + \epsilon_y) - 1 = 0$ d'où $(1 + \epsilon_x) = 1/(1 + \epsilon_y)$. Cette déformation est appelée **cisaillement pur (pure shear)** (fig. 2.13a).

Donc, Toute déformation comme celle-ci, consistant en une déformation biaxiale ou triaxiale sans rotation des axes principaux, et sans translation de la particule initialement à l'origine est appelée un **cisaillement pur**. Les termes cisaillement pure et déformation pure sont évidemment étroitement liés.

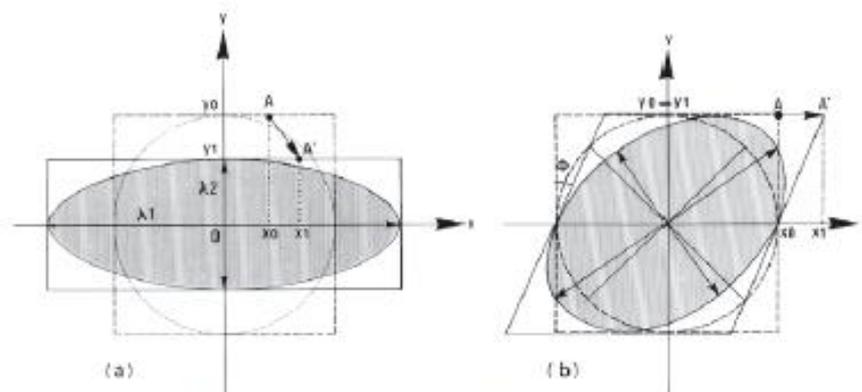


Figure 2.13 - Déformation plane en cisaillement pur (a) et en cisaillement simple (b).

Sur la figure 2.13b, la déformation est d'un type différent : les deux côtés du carré, parallèles à l'axe **Oy**, subissent un cisaillement angulaire sans changement de longueur. Tout point A (x_0, y_0) du carré sera donc transformé en un point A' de coordonnées

$$x_1 = x_0 + y_0 \tan\phi \quad \text{et} \quad y_1 = y_0.$$

Cette déformation est appelée **cisaillement simple (Simple shear)**.

Donc, un exemple de déformation par rotation est le type de déformation homogène connue par **cisaillement pure (pure shear)**. Ce type de déformation est celui observé quand un paquet de carte est déformé par cisaillement.

En déformation homogène, tout cercle inscrit dans son carré sera transformé en une ellipse (Fig. 2.13). On peut le démontrer simplement dans le cas du cisaillement pur (Fig. 2.14). Un raccourcissement suivant **OY** transforme tout point M d'ordonnée y_0 sur le cercle en un point B_y d'ordonnée y_1 tel que (Fig. 2.14a)

$$\frac{SO}{AO} = \frac{MO'}{B_y O'} = \frac{1}{1 + \epsilon_y}$$

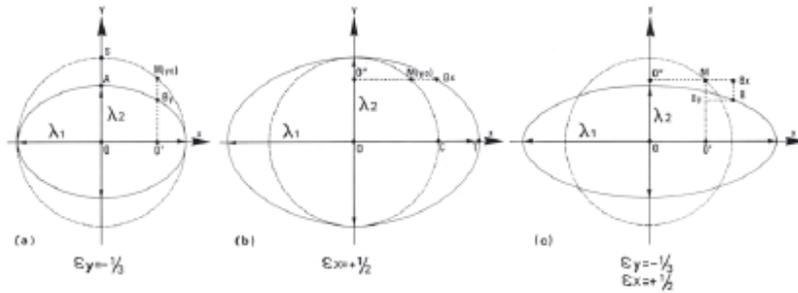


Figure 2.14 - Affinités transformant le cercle en une ellipse de déformation, (a) : avec diminution de surface. (b) : avec augmentation de surface, (c) : avec conservation de surface.

Cette transformation est une affinité qui transforme le cercle en une ellipse mais, dans ce cas, avec diminution de la surface. Une affinité de rapport $1/(1 + \epsilon_x)$ sur l'axe des abscisses (Fig. 2.14b) transforme également le cercle en une ellipse mais, dans ce cas, avec augmentation de la surface. Par contre deux affinités (Fig. 2.14c) telles que $1 + \epsilon_x = 1/(1 + \epsilon_y)$ transforment le cercle en une ellipse en conservant la surface initiale du cercle, ce cas est celui du cisaillement pur. De façon générale quelle que soit la déformation homogène, on montre qu'en coordonnées cartésiennes tout point du cercle dont l'équation est $x^2 + y^2 = 1$ se trouve sur une ellipse dite ellipse de déformation dont l'équation peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{x^2}{\lambda_1^2} + \frac{y^2}{\lambda_2^2} = 1 \quad \text{avec} \quad \lambda_1 = (1 + \epsilon_1)^2 \quad \text{et} \quad \lambda_2 = (1 + \epsilon_2)^2$$

λ_1 et λ_2 sont respectivement le grand et petit axe de l'ellipse.

Les axes principaux de cette ellipse de déformation étaient aussi orthogonaux sur le cercle avant la déformation (Fig. 2.13 et 2.14).

Les rapports des axes de l'ellipse de déformation est connue par rapport de forme.

Exemple :

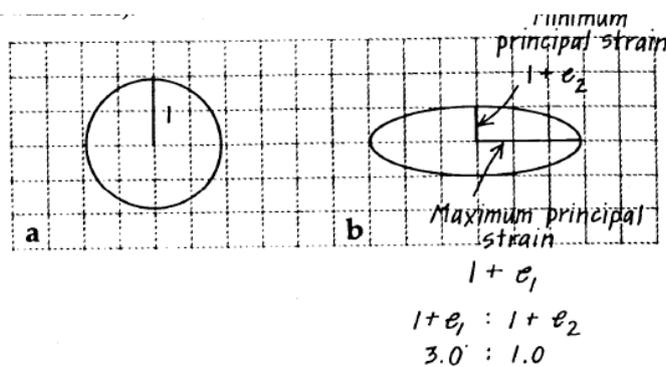


Figure 7. Ellipse de déformation. Ici, le rapport de forme vaut 3, ou 3 : 1

Exercices

- 1- Déterminer la distorsion principale (principal strain) dans le plan de la feuille pour la figure ci-contre. Est-il possible de trouver les traces de la section circulaire de la figure concernée.
- 2- Tracer des cubes affectés par chacune des déformations suivantes. Dans chaque cas suppose que la déformation est non rotationnelle et la particule au centre du cube reste au centre après déformation. Suppose aussi que les directions principales de la déformation sont parallèles aux arêtes du cube.
 - a- Une déformation uniaxiale avec S_1 (stretch) = 1.8, $S_2 = 1.0$, $S_3 = 1.0$.
 - b- Une déformation planaire (biaxiales) avec $S_1 = 1.8$, $S_2 = 1.0$, $S_3 = 0.56$.
 - c- Une déformation triaxiale axisymétrique avec $S_1 = 1.8$, $S_2 = 0.75$, $S_3 = 0.75$.
- 3- Montrer que chaque déformation du type cisaillement simple (figure ci-contre) est équivalente (également peut être vue comme cisaillement pur plus une rotation de corps rigide).

15.5 Show that any simple shear deformation (e.g., Figure 15.5) is equivalent to, and can equally well be viewed as, a pure-shear deformation plus a rigid-body rotation.

PROBLEMS **15.1** Determine the principal strains in the plane of the paper for Figure 15.1. Is it possible to find the traces of the circular sections in Figure 15.1?

Answer

Chapter 15 **15.1** The principal strains can be determined by measuring the principal diameters of the strain ellipsoid in Figure 15.1 and dividing each of these numbers

by the diameter of the original circle. Principal strains obtained this way are 1.20 and 0.83, expressed as stretches, and we can designate them S_1 and S_3 ; respectively, assuming that the intermediate principal strain direction is perpendicular to the plane of the paper.

It is not possible to find the traces of the circular sections from the information given because the principal strain perpendicular to the page is unknown. For each possible value of this principal strain the circular section will make a different angle with the S_1 direction. If the strain is assumed to be plane strain ($S_2 = 1$), then the circular sections will make angles of about 40 degrees with the S_1 direction.