جامعة العربي بن مهيدي – أم البواقي–
كلية العلوم الاقتصادية والعلوم التجارية وعلوم التسيير
قسم الجذع المشترك

السنة الجامعية: 2021 - 2022
المستوى: سنة اولى
التخصص: الجذع المشترك

يوم : 2022/05/16

امتحان الدورة العادية في مقياس الرياضيات 2

التمرين الأول: (06 نقاط)

1) بين ما اذا كانت المجموعات التالية فضاءات شعاعية جزئية من IR^3

$$E_1 = \{(x, y, z) \in IR^3, x + y + z = 0\} ;$$

$$E_2 = \{(x, y, z) \in IR^3, x + 2y + 3z = 1\}.$$

2) هل التطبيق f التالي هو تطبيق خطي

$$f: IR^2 \to IR^2 \quad \text{حيث} \quad f(x, y) = (2x, 2y)$$

التمرين الثاني: (07 نقاط)

لتكن المصفوفتين

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad D = \begin{pmatrix} r & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

حيث r هو عدد حقيقي ثابت.

1) احسب : A^{-1} , $A \times B$, $(A + B)^t$, $\det(B)$, $A + D$, $Tr(A)$, D^t

2) اوجد قيم r التي تكون من اجلها المصفوفة D قابلة للقلب.

3) احسب : $A^2 + I_2$, حيث I_2 هي مصفوفة الوحدة.

4) احسب القيم الذاتية للمصفوفة A.

التمرين الثالث: (07 نقاط)

لتكن الجملة التالية

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 3 \\ -2x - 2y - 2z = -4 \\ 2x + 5y + 10z = -1 \end{cases}$$

1) اكتب الشكل المصفوفي للجملة.

2) اوجد حلول الجملة بثلاث طرق مختلفة (كرامر الاولى و الثانية وطريقة غوص).

اساتذة المقياس

الحل النموذجي

التمرين الأول: (06 نقاط)

1) (ن2) $E_1 = \{(x,y,z) \in IR^3, x+y+z=0\}$ لدينا

- $A \neq \emptyset$ لان الشعاع المعدوم (0,0,0) ينتمي الى E_1
- مهما يكن $X = (x_1, y_1, z_1)$ و $Y = (x_2, y_2, z_2)$ من A و $\forall \alpha, \beta \in IR$ لدينا

$$\alpha X + \beta Y = (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2, \alpha z_1 + \beta z_2)$$

نلاحظ ان $\alpha x_1 + \beta x_2 + \alpha y_1 + \beta y_2 + \alpha z_1 + \beta z_2 = 0$ اذن فان $\alpha X + \beta Y$ ينتمي الى E_1 ومنه فان E_1 هي ف ش ج.

2) (ن2) لدينا E_2 ليست ف ش ج لان الشعاع المعدوم (0=3.0+2.0+0) لا ينتمي اليها.

3) (ن2) $g: IR^2 \to IR^2$ حيث $f(x,y) = (2x, 2y)$

من اجل كل $X = (x,y) \in IR^2$ و $Y = (x', y') \in IR^2$ لدينا

$$f(\alpha X + \beta Y) = f\big(\alpha(x,y) + \beta(x',y')\big) = f(\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y')$$

$$= (2\alpha x + 2\beta x', 2\alpha y + 2\beta y')$$

$$= ((2\alpha x, 2\alpha y) + (2\beta x', 2\beta y')) = \alpha f(X) + \beta f(Y)$$

و منه فان f هو تطبيق خطي.

التمرين الثاني: (07 نقاط)

1)(ن3) $A + D = \begin{pmatrix} 1+r & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $A * B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $D^t = \begin{pmatrix} r & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$,

$$\det(B) = 2, \quad (A+B)^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Tr(A) = 2.$$

(2 (ن1) $\det(A) = 1 \neq 0,$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} C^t, Cij = (-1)^{i+j} \det Wij$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3)(ن1) لكي تكون D قابلة للقلب يجب ان يكون $\det(D) \neq 0 \leftarrow r \neq 2$

4)(ن1) $A^2 + I = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

5) (ن1) القيم الذاتية

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \to det(A - \lambda I) = (1-\lambda)^2 = 0 \to \lambda = 1$$

التمرين الثالث (7ن):

1)(1ن) الشكل المصفوفي هو $AX = B$ حيث $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -2 & -2 & -2 \\ 2 & 5 & 10 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$

لدينا n= m=3 و det(A)=4≠ 0 و منه الجملة قابلة للحل بطريقة كرامر.

.i (2ن) **طريقة كرامر1 :**

$$y = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -2 & -4 & -2 \\ 2 & -1 & 10 \end{vmatrix}}{\det(A)} = 1; \qquad x = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 3 & 4 \\ -4 & -2 & -2 \\ -1 & 5 & 10 \end{vmatrix}}{\det(A)} = 2;$$

$$z = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ -2 & -2 & -4 \\ 2 & 5 & -1 \end{vmatrix}}{\det(A)} = -1;$$

ii (2ن) **طريقة كرامر2 :** $X = A^{-1}B$

حساب A^{-1}

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} C^t, Cij \ = (-1)^{i+j} \det Wij$$

$$C = \begin{pmatrix} -10 & 16 & -6 \\ -10 & 12 & -4 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-5}{2} & \frac{-5}{2} & \frac{1}{2} \\ 4 & 3 & -1 \\ \frac{-3}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

و منه

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-5}{2} & \frac{-5}{2} & \frac{1}{2} \\ 4 & 3 & -1 \\ \frac{-3}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

iii (2ن) **طريقة غوص**

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 3 \\ -2 & -2 & -2 & -4 \\ 2 & 5 & 10 & -1 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 6 & -4 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

و منه حل الجملة مكافئ لحل الجملة

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 3 \\ y + 2z = -1 \\ 2z = -2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = -1 \end{cases}$$