RESOLUTION NUMERIQUE DES SYSTEMES D'EQUATIONS LINEAIRES

1. INTRODUCTION

Les technologues et les scientifiques rencontrent fréquemment des problèmes qui nécessitent la résolution des systèmes d'équations linéaires. On rencontre de tels problèmes en élasticité, dans l'analyse des circuits électriques, en transfert de chaleur, en mécanique des vibrations, en mécanique des fluides, en économétrie, en administration, en médecine, ...etc. L'intégration de certains types d'équations différentielles et aux dérivées partielles se ramène à la recherche de solutions des systèmes d'équations linéaires.

L'objet principal de ce chapitre est l'étude de quelques méthodes d'analyse numérique pour la résolution des systèmes d'équations linéaires. Ces méthodes peuvent être rangées en principe en deux classes : *les méthodes directes* et *les méthodes itératives.*

Les méthodes directes sont les méthodes qui aboutissent à la solution exacte du problème au bout d'un nombre fini d'opérations arithmétiques, s'il n'avait pas d'erreurs d'arrondi. Elles ont objectifs la construction de systèmes équivalents au système initial, dont la matrice est triangulaire. Elles sont utilisées particulièrement si la matrice est pleine et son ordre n'est pas trop élevé, généralement inférieur ou égal à 100.

Lorsque un tel système dépasse 100 ou 1000 équations (c'est souvent le cas des systèmes à matrices creuses, qui apparaissent en économétrie, dans la résolution numérique des équations différentielles et aux dérivées partielles); il devient difficile de résoudre ce système par les méthodes directes, car, d'une part le nombre d'opérations - donc d'erreurs possibles - devient considérables, d'autre part le nombre de mémoires nécessaires devient rapidement très grand et risque de dépasser celui de l'ordinateur. Dans ce cas, il existe une autre classe de méthodes souvent meilleures que les méthodes directes selon les critères, temps de calcul et les mémoires utilisées. Ces méthodes sont **les méthodes itératives**. Elles permettent d'obtenir les solutions des systèmes avec la précision imposée à l'aide de la création d'une suite $\left\{X^{(k)}\right\}$ de vecteurs tendant vers la solution exacte.

Dans ce chapitre, nous aborderons cinq méthodes directes et trois méthodes itératives:

1. Méthodes directes :

1. Méthode de Cramer
2. Système à matrices triangulaires
3. Méthode d'inversion matricielle
4.1. Méthode de Décomposition LU
4.2. La méthode de Doolittle
4.3. La méthode de Crout
4.4. La méthode de Cholesky
5.1. Méthode d'élimination de Gauss

2. Méthodes directes

Soit le système de n équations à n inconnues

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{array}\right. \tag{2.1}$$

Le système (2.1) peut être écrit sous la forme d'une équation matricielle

$$AX = b \tag{2.2}$$

où
(2.3)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & & a_{2n} \\ & & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Si la matrice A est **régulière**, l'équation matricielle possède une solution unique décrite formellement sous la forme $X = A^{-1}b$. On suppose dans tout se qui suit que A est régulier.

2.1. **Méthode de Cramer.** Pour résoudre le système (1.2), la première idée qui vient à l'esprit est de se servir des formules de Cramer données par les relations :

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2i-1} & b_2 & a_{2i+1} & \cdots & a_{2n} \\ & & & & & & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\det A} \tag{2.4}$$

L'utilisation de ces relations nécessite tout d'abord de calculer $n+1$ déterminants (n numérateurs différents et un dénominateur commun) puis effectuer n divisions pour calculer x_i, $i = 1, 2, \cdots, n$ pour calculer chaque déterminant, on doit effectuer $n! - 1$ additions, $(n-1)\,n!$ multiplications.

Example 1. *Utilisez la règle de Cramer pour résoudre*

$$\begin{pmatrix} 0.3 & 0.52 & 1 \\ 0.5 & 1 & 1.9 \\ 0.1 & 0.3 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.01 \\ 0.67 \\ -0.44 \end{pmatrix}$$

Le déterminant D peut être évalué comme

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 0.3 & 0.52 & 1 \\ 0.5 & 1 & 1.9 \\ 0.1 & 0.3 & 0.5 \end{vmatrix} \\ &= 0.3 \begin{vmatrix} 1 & 1.9 \\ 0.3 & 0.5 \end{vmatrix} - 0.52 \begin{vmatrix} 0.5 & 1.9 \\ 0.1 & 0.5 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 0.5 & 1 \\ 0.1 & 0.3 \end{vmatrix} = -0.0022 \end{aligned}$$

La solution peut être calculée comme

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} -0.01 & 0.52 & 1 \\ 0.67 & 1 & 1.9 \\ -0.44 & 0.3 & 0.5 \end{vmatrix}}{-0.0022} = \frac{0.03278}{-0.0022} = -14.9,$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 0.3 & -0.01 & 1 \\ 0.5 & 0.67 & 1.9 \\ 0.1 & -0.44 & 0.5 \end{vmatrix}}{-0.0022} = \frac{0.0649}{-0.0022} = -29.5$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 0.3 & 0.52 & -0.01 \\ 0.5 & 1 & 0.67 \\ 0.1 & 0.3 & -0.44 \end{vmatrix}}{-0.0022} = \frac{-0.04356}{-0.0022} = 19.5$$

2.2. **Système à matrices triangulaires.** 1. Si la matrice A est **triangulaire supérieure**, la résolution numérique du système est immédiate, il s'écrit

$$\left\{ \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n-1}x_{n-1} + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{22}x_2 + \cdots + a_{1n-1}x_{n-1} + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{(n-1)(n-1)}x_{n-1} + a_{(n-1)n}x_n &= b_{n-1} \\ a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \right. \tag{2.5}$$

Notons que la solution du système existe et est unique si :

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \cdots \cdot a_{nn} \neq 0.$$

On résout les système en calculant x_n de la dernière équation x_{n-1}, puis de l'avant dernière, etc ...,

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}, \qquad x_{n-1} = \frac{1}{a_{(n-1)(n-1)}} \left[b_{n-1} - a_{(n-1)n}x_n \right]$$

Ce qui donne en générale

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j \right], \qquad i = n-1, n-2, \cdots, 1.$$

Cette méthode est appelée méthode de remontée.

Example 2. *Considérons le système triangulaire supérieure*

$$\left\{\begin{array}{rl} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 & \quad E_1 \\ -\,2x_2 + x_3 = 3 & \quad E_2 \\ \frac{1}{5}x_3 = \frac{1}{5} & \quad E_3 \end{array}\right. \tag{2.6}$$

ou

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 03 \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

Solution 1. *Notons que la solution du système existe et est unique parce que :*

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix} = (1)\,(-2)\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{-2}{5} \neq 0. \tag{2.7}$$

On trouve facilement la solution par ***remontée triangulaire*** *:*

De E_3, on a :

$$x_3 = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{5}} = 1,$$

de E_2, on a :

$$-2x_2 = 3 - x_3 = 3 - 1 = 2,$$

d'où

$$x_2 = \frac{2}{-2} = -1,$$

Et de , on a :

$$x_1 = 0 - 2x_2 - x_3 = -2\,(-1) - 1 = 1.$$

2. Si A est **triangulaire inférieure**, on résout le système en calculant x_1 de la première équation, puis x_2 de la deuxième équation , etc…

En général

(2.8)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & & 0 \\ & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

donc

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}},$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \implies x_2 = \frac{1}{a_{22}}\left[b_2 - a_{21}x_1\right],$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \implies x_3 = \frac{1}{a_{33}}\left[b_3 - (a_{31}x_1 + a_{32}x_2)\right],$$

$$\vdots$$

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j\right], \qquad i = n-1, n-2, \cdots, 1.$$

Cette méthode est appelée méthode de descente.

3. La forme **diagonale d'un système** d'équations linéaires :

(2.9)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & & 0 \\ & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & a_{(n-1)(n-1)} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Coût du calcul

La méthode nécessite

$$\begin{array}{lr} 1+2+\cdots+(n-1) = \dfrac{n(n-1)}{2} & \text{additions,} \\ 1+2+\cdots+(n-1) = \dfrac{n(n-1)}{2} & \text{multiplications,} \\ n & \text{divisions.} \end{array}$$

2.3. **Méthode d'inversion matricielle.** Le système (2.1) peut être écrit sous la forme matricielle comme suit

$$AX = B \tag{2.10}$$

Considérons que la matrice A est une matrice non singulière (inversible), alors A^{-1} existe. Pré-multiplication Eq. (5.5) avec A^{-1}, on obtient

$$\begin{aligned} AX &= B \\ \left(A^{-1}A\right)X &= A^{-1}B \\ (I)\,X &= A^{-1}B \\ X &= A^{-1}B \qquad (2.11) \end{aligned}$$

Example 3. *Résoudre le système d'équations linéaires suivant avec la méthode d'inversion de matrice*

$$\begin{gathered} 3x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 6 \end{gathered}$$

Le système d'équations sous forme matricielle se présente comme suit

$$AX = B,$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

The **matrix inverse** (A^{-1}) of the coefficient matrix A is given by

$$A^{-1} = \frac{1}{35}\begin{pmatrix} 7 & 1 & 4 \\ -7 & 9 & 1 \\ 7 & 6 & -11 \end{pmatrix}.$$

En utilisant l'équation (2.9), nous avons

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{35}\begin{pmatrix} 7 & 1 & 4 \\ -7 & 9 & 1 \\ 7 & 6 & -11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

La solution est donc donnée par

$$x_1 = 1, \qquad x_2 = 1, \qquad x_3 = -1.$$

2.4. **Méthode de Décomposition LU.** Cette méthode est également connue sous le nom de **méthode de décomposition triangulaire** ou **méthode de factorisation** ou **méthode de triangularisation.**

Cette méthode est basée sur le fait que chaque matrice carrée peut être exprimée comme le produit d'une **matrice triangulaire inférieure** et **supérieure** à condition que tous **les principaux mineurs de la matrice carrée donnée** $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ **ne soient pas singuliers**, c'est-à-dire que

$$a_{11} \neq 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0, \quad \cdots, \quad \det A \neq 0.$$

De plus, si **la matrice A peut être factorisée, alors elle est unique.**

Si c'est possible, alors dans cette méthode la matrice des coefficients A du système d'équations $AX = b$ est décomposé en le produit d'une **matrice triangulaire inférieure** L et d'une **matrice triangulaire supérieure** U de sorte que

$$A = LU \tag{3.1}$$

où

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & & 0 \\ & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & & l_{nn} \end{pmatrix}, \qquad \text{et} \qquad U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & & & u_{2n} \\ 0 & 0 & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & u_{nn} \end{pmatrix}$$

Notez que chacun des deux systèmes est triangulaire, donc facile à résoudre. Parce que $LZ = b$ est **un système triangulaire inférieur**, il peut être résolu en utilisant la **substitution directe (déscente)**. Le système $UX = Z$ est **triangulaire supérieur** et se résout par la **remontée**.

Ainsi, le système d'équations $AX = b$ devient

$$LUX = b \tag{3.2}$$

où

(3.3)

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & & 0 \\ & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & & l_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & & & u_{2n} \\ 0 & 0 & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & u_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Prenons

$$UX = Z \tag{3.4}$$

En remplaçant ceci dans l'équation (3.3), nous obtenons

$$LZ = b \tag{3.5}$$

Les inconnues $z_1, z_2, \cdots, z_n$ dans l'Équation (3.4) sont déterminées par la méthode de descente, et, par conséquent, les inconnues $x_1, x_2, \cdots, x_n$ dans l'Équation (3.5) sont déterminées par la méthode de remontée.

Pour déterminer L et U dans la méthode de décomposition LU, nous pouvons appliquer l'une des méthodes suivantes.

2.4.1. *La méthode de Doolittle.* Si nous choisissons tous les éléments de *la diagonale principale de la matrice triangulaire inférieure L comme* 1, c'est-à-dire

$$l_{ii} = 1,\ i = 1,\ 2, \cdots, n,$$

alors la méthode correspondante est appelée méthode de Doolittle.

2.4.2. *La méthode de Crout.* Si nous choisissons tous les éléments de la diagonale principale de *la matrice triangulaire supérieure U comme* 1, c'est-à-dire

$$u_{ii} = 1,\ i = 1,\ 2, \cdots, n,$$

alors la méthode correspondante est appelée méthode de Crout.

On peut montrer que pour un grand n, le nombre opérationnel dans la méthode de décomposition LU est d'environ $n^3/3$.

Exemple: Trouver la solution du système d'équations

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 & E_1 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 6 & E_2 \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 4 & E_3 \end{cases}$$

par la méthode de décomposition LU.

Solution: Nous appliquons **la méthode de Doolittle**. Cependant, **la méthode de Crout** peut également être appliquée. Utilisation de **la méthode de Doolittle**, la matrice de coefficients A peut être décomposée comme suit :

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ l_{21}u_{11} & l_{21}u_{12} + u_{22} & l_{21}u_{13} + u_{23} \\ l_{31}u_{11} & l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} & l_{31}u_{13} + l_{32}u_{22} + u_{33} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Par conséquent, nous avons

$$\begin{aligned} &u_{11} = 1, \quad u_{12} = 1, \quad u_{13} = 1, \\ &l_{21}u_{11} = 4, \quad l_{21}u_{12} + u_{22} = 3, \quad l_{21}u_{13} + u_{23} = -1, \\ &l_{31}u_{11} = 3, \quad l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} = 5 \quad \text{et} \quad l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} = 3. \end{aligned}$$

En résolvant les équations ci-dessus, on obtient

$u_{11} = 1, \quad u_{12} = 1, \quad u_{13} = 1, \quad l_{21} = 4, \quad u_{22} = -1, \quad u_{23} = -5,$
$u_{33} = -10, \quad l_{31} = 3 \quad et \quad l_{32} = -2.$

Par conséquent,

$$A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix}.$$

Maintenant, en utilisant **la méthode de substitution directe** ou la **méthode de descente**, solution du système d'équations $LZ = b$, c'est-à-dire

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

donne $z_1 = 1$, $z_2 = 2$ et $z_3 = 5$.

Encore une fois, en résolvant le système d'équations $UX = Z$, c'est-à-dire

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

par **la méthode de remontée**, on obtient

$$X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}.$$

La solution recherchée est donc

$$x_1 = 1, \ x_2 = 1/2 \text{ et } x_3 = -1/2.$$

Exemple: Trouver la solution du système d'équations

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 12 & E_1 \\ 8x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 20 & E_2 \\ 4x_1 + 11x_2 - x_3 = 33 & E_3 \end{cases}$$

par **la méthode de décomposition Crout**.

Solution: En utilisant **la méthode de Crout**, la matrice des coefficients A peut être décomposée comme suit :

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 8 & -3 & 2 \\ 4 & 11 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} l_{11} & l_{11}u_{12} & l_{11}u_{13} \\ l_{21} & l_{21}u_{12} + l_{22} & l_{21}u_{13} + l_{22}u_{23} \\ l_{31} & l_{31}u_{12} + l_{32} & l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + l_{33} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Par conséquent, nous avons

$l_{11} = 2,\ l_{21} = 8,\ u_{12} = \frac{1}{2},\ u_{13} = 2,\ l_{22} = -7,\ l_{21}u_{12} + u_{22} = -3,$
$l_{21}u_{13} + l_{22}u_{23} = 2,\ l_{31}u_{12} + l_{32} = 11,$ et $l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + l_{33} = -1.$

En résolvant les équations ci-dessus, on obtient

$$l_{11} = 2,\ l_{21} = 8,\ u_{12} = \tfrac{1}{2},\ u_{13} = 2,\ l_{22} = -7,$$
$$u_{23} = 2,\ l_{32} = 9 \text{ et } l_{33} = -27.$$

Par conséquent,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 8 & -7 & 0 \\ 4 & 9 & -27 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Maintenant, en utilisant la méthode de substitution directe, solution du système d'équations $LZ = b$, c'est-à-dire

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 8 & -7 & 0 \\ 4 & 9 & -27 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

donne $z_1 = 6$, $z_2 = 4$ et $z_3 = 1$.

Encore une fois, en résolvant le système d'équations $UX = Z$, c'est-à-dire

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

par **la méthode de remontée**, on obtient

$$x = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

La solution recherchée est donc

$$x_1 = 3,\ x_2 = 2 \text{ et } x_3 = 1.$$

2.5. **Méthode de Cholesky.** Soit A une matrice carrée d'ordre n;

Soit A est dite **symétrique** si elle coincide avec sa transposée i.e :

$$A = A^T.$$

Une matrice $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ est **définie positive** si tous les déterminants suivants sont positifs :

$$a_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0, \quad \cdots, \quad \det|A| > 0.$$

La méthode énonce qu'il existe toujours une matrice triangulaire inférieure L telle que

$$A = LL^T \tag{3.8}$$

où

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & & \\ & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & & 0 \\ & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & \cdots & & l_{n1} \\ 0 & l_{22} & & & l_{n2} \\ 0 & 0 & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & l_{nn} \end{bmatrix}$$

where $L = [l_{ij}]_{n\times n}$ and $l_{ij} = 0$, $i < j$.

Résolution du $AX = b$ donne

$$LL^T X = b \tag{3.9}$$

Prenons

$$L^T X = Z \tag{3.10}$$

alors

$$LZ = b \tag{3.11}$$

Les solutions z_i $(i = 1, \cdots, n)$ sont obtenues à partir de l'Équation (3.11) par **la méthode de substitution directe** puis les solutions x_i $(i = 1, \cdots, n)$ sont déterminées à partir de l'Équation (3.10) par la **méthode de remontée**.

Cette méthode est également connue sous le nom de **méthode de la racine carrée.**

On peut montrer que pour n grand, le nombre opérationnel dans la méthode de Cholesky est d'environ $n^3/6$. Par conséquent, la complexité temporelle de la méthode de Cholesky est $\mathcal{O}\left(n^3\right)$.

Remarque. La méthode de Cholesky permet le calcul du déterminant de A.

En effet:

$$\begin{aligned} A &= LL^T \Rightarrow \det(A) = \det(LL^T) = \det(L)\det(L^T) \\ &= [\det(L)]^2 = \left(\prod_{i=1}^{n} l_{ii}\right)^2. \end{aligned}$$

Exemple: Calculer **la factorisation de Cholesky** pour la matrice symétrique

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 4.25 & 2.75 \\ 1 & 2.75 & 3.5 \end{bmatrix}$$

Solution. La factorisation LL^T n'a pas nécessairement de 1 sur la diagonale de la matrice triangulaire inférieure L, nous devons donc avoir

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} l_{11}^2 & l_{11}l_{21} & l_{11}l_{31} \\ l_{11}l_{21} & l_{21}^2 + l_{22}^2 & l_{21}l_{31} + l_{22}l_{32} \\ l_{11}l_{31} & l_{21}l_{31} + l_{22}l_{32} & l_{31}^2 + l_{32}^2 + l_{33}^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2.12}$$

Donc

$$\begin{gathered} a_{11} : 4 = l_{11}^2 \implies l_{11} = 2, \\ a_{21} : -1 = l_{11}l_{21} \implies l_{21} = -0.5 \\ a_{31} : 1 = l_{11}l_{31} \implies l_{31} = 0.5, \\ a_{22} : 4.25 = l_{21}^2 + l_{22}^2 \implies l_{22} = 2 \\ a_{32} : 2.75 = l_{21}l_{31} + l_{22}l_{32} \implies l_{32} = 1.5, \\ a_{33} : 3.5 = l_{31}^2 + l_{32}^2 + l_{33}^2 \implies l_{33} = 1, \end{gathered}$$

et on a

$$A = LL^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -0.5 & 2 & 0 \\ 0.5 & 1.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -0.5 & 0.5 \\ 0 & 2 & 1.5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exemple: Résoudre le système d'équations suivant par **la méthode de Cholesky :**

$$\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 + 8x_3 = 0 & E_1 \\ 6x_1 + 34x_2 + 52x_3 = -160 & E_2 \\ 8x_1 + 52x_2 + 129x_3 = -452 & E_3 \end{cases}$$

Solution. Le système d'équations donné peut être écrit comme $Ax = b$, où

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 6 & 34 & 52 \\ 8 & 52 & 129 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ -160 \\ -452 \end{bmatrix}$$

Puisque la matrice de coefficients A **est symétrique**, nous pouvons appliquer **la méthode de Cholesky.**

On décompose la matrice A en $A = LL^T$, où L est une matrice triangulaire inférieure 3×3 donnée par

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix}.$$

Sinon, nous pouvons déterminer la valeur de l_{ij} directement en résolvant l'équation suivante $A = LL^T$, c'est-à-dire

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 6 & 34 & 52 \\ 8 & 52 & 129 \end{bmatrix}$$

En utilisant les formules de l'équation (3.12), nous obtenons

$$l_{11} = 2,\ l_{21} = 3,\ l_{22} = 5,\ l_{31} = 4,\ l_{32} = 8,\ l_{33} = 7.$$

Ensuite, on résout le système $LZ = b$, c'est-à-dire

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 4 & 8 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -160 \\ -452 \end{bmatrix}$$

par la **méthode de substitution directe** donnant $z_1 = 0$, $z_2 = -32$ et $z_3 = -28$.

La solution résultante est maintenant obtenue à partir de $L^T X = Z$, c'est-à-dire

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -32 \\ -28 \end{bmatrix}$$

en utilisant **la méthode de remontée**.

La solution recherchée est donc

$$x_1 = 8,\ x_2 = 0 \text{ et } x_3 = -4.$$

2.6. **La méthode de Gauss.** La méthode de Gauss est due au mathématicien, astronome et physicien allemand Carl Friedrich Gauss (1777-1855).

Cette méthode consiste à :

1. **Transformer le système à matrice quelconque** en un système équivalent à **matrice triangulaire supérieure**.
2. Résoudre le système obtenu par **la méthode de remontée** décrite au paragraphe précédent .

Soit le système de n équations à n inconnues

$$\left\{\begin{array}{ll} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1 & E_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b_2 & E_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = b_3 & E_3 \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = b_4 & E_4 \end{array}\right. \tag{2.13}$$

Le système (2.13) peut être écrit sous la forme d'une équation matricielle

$$AX = b \tag{2.14}$$

où

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}. \tag{2.15}$$

ou sous la forme d'une matrice augmentée $[A|b]$:

$$[A|b] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & b_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & b_4 \end{bmatrix}.$$

Remark 1. *Il est important de noter que la matrice augmentée $[A|b]$ représente complètement le système linéaire $Ax = b$, donc toutes les modifications doivent être appliquées à la matrice augmentée et non à la matrice A seule.*

1. La Triangularisation

La première étape : L'élimination de x_1 dans les équations E_2, E_3 et E_4 :

Soit $a_{11} \neq 0$, qui est appelé **premier pivot.**

- On multiplie l'équation E_1 par $\dfrac{a_{i1}}{a_{11}}$ $(i = 2, 3, 4)$.
- On additionne l'équation obtenue avec les équations E_i $(i = 2, 3, 4)$.
- On obtient le système équivalent :

$$\left\{\begin{array}{rl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1 & (E_1) \\ a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + a_{24}^{(1)}x_4 = b_2^{(1)} & \left(E_2^{(1)} = E_2 - \dfrac{a_{21}}{a_{11}}E_1\right) \\ a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 + a_{34}^{(1)}x_4 = b_3^{(1)} & \left(E_3^{(1)} = E_3 - \dfrac{a_{31}}{a_{11}}E_1\right) \\ a_{42}^{(1)}x_2 + a_{43}^{(1)}x_3 + a_{44}^{(1)}x_4 = b_4^{(1)} & \left(E_4^{(1)} = E_4 - \dfrac{a_{41}}{a_{11}}E_1\right) \end{array}\right. \tag{2.16}$$

Les nouveaux coefficients du système sous forme condensée sont

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - \frac{a_{i1}a_{1j}}{a_{11}}, \quad b_i^{(1)} = b_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}}b_1, \quad i = 2, 3, 4, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

■ L'élimination de x_2 dans les équations E_3 et E_4 :

Soit $a_{22} \neq 0$, qui est appelé **deuxième pivot.**

- On multiplie l'équation $E_2^{(1)}$ par $\dfrac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$ $(i = 3, 4)$.
- On additionne l'équation obtenue avec les équations $E_i^{(1)}$ $(i = 3, 4)$.

• On obtient le système équivalent :

(2.17)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1 & (E_1) \\ a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + a_{24}^{(1)}x_4 = b_2^{(1)} & \left(E_2^{(1)}\right) \\ a_{33}^{(2)}x_3 + a_{34}^{(2)}x_4 = b_3^{(2)} & \left(E_3^{(2)} = E_3^{(1)} - \dfrac{a_{32}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}E_2^{(1)}\right) \\ a_{43}^{(2)}x_3 + a_{44}^{(2)}x_4 = b_4^{(2)} & \left(E_4^{(2)} = E_4^{(1)} - \dfrac{a_{42}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}E_2^{(1)}\right) \end{cases}$$

■ L'élimination de x_3 dans les équations E_4 :

Soit $a_{33}^{(1)} \neq 0$, qui est appelé **troisième pivot.**

• On multiplie l'équation $E_3^{(2)}$ par $\dfrac{a_{43}^{(1)}}{a_{33}^{(1)}}$.

• On additionne l'équation obtenue avec les équations $E_4^{(2)}$, on obtient le système:

(2.18)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1 & (E_1) \\ a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + a_{24}^{(1)}x_4 = b_2^{(1)} & \left(E_2^{(1)}\right) \\ a_{33}^{(2)}x_3 + a_{34}^{(2)}x_4 = b_3^{(2)} & \left(E_3^{(2)}\right) \\ a_{44}^{(3)}x_4 = b_4^{(3)} & \left(E_4^{(3)} = E_4^{(2)} - \dfrac{a_{42}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}}E_3^{(2)}\right) \end{cases}$$

2. La remontée

Exercise 1. *Résoudre le système linéaire d'équations suivant par la méthode d'élimination de Gauss :*

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \qquad E_1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 3 \qquad E_2 \\ -x_1 - 3x_2 \qquad &= 2 \qquad E_3 \end{aligned}$$

Solution 2. *Tout d'abord, nous représentons le système d'équations linéaires donné avec la matrice augmentée suivante :*

$$[A \mid b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \\ -1 & -3 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

Maintenant, nous allons appliquer la méthode d'élimination de Gauss dans les étapes suivantes. Puisqu'il y a trois inconnues x_1, x_2, x_3, le nombre d'étapes requises dans cette méthode sera de deux.

Étape 1:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \\ -1 & -3 & 0 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[]{\substack{E_2' \leftarrow E_2 - 2E_1 \\ E_3' \leftarrow E_3 + E_1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Étape 2:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 0 \\ 0 & -2 & 1 & | & 3 \\ 0 & -1 & 1 & | & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_3^{'} \leftarrow E_3 - \frac{1}{2}E_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 0 \\ 0 & -2 & 1 & | & 3 \\ 0 & 0 & 0.5 & | & 0.5 \end{bmatrix}$$

Ainsi, en commençant par la matrice d'augmentation $[A \mid b]$, on arrive à la matrice triangulaire supérieure suivante $[U \mid g]$, à savoir,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 0 \\ 0 & -2 & 1 & | & 3 \\ 0 & 0 & 0.5 & | & 0.5 \end{bmatrix}$$

après réalisation de la méthode d'élimination de Gauss en deux étapes.

Maintenant, le système d'équations équivalent est

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \qquad E_1 \\ -2x_2 + x_3 &= 3 \qquad E_2 \\ 0.5x_3 &= 0.5 \qquad E_3 \end{aligned}$$

Nous résolvons le système d'équations ci-dessus par la **méthode de remontée**.

Par conséquent, la solution requise du système d'équations linéaires est

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 1.$$

Exercise 2. *Utilisez l'élimination de Gauss pour résoudre*

$$\begin{cases} 3x_1 - 0.1x_2 - 0.2x_3 = 7.85 & E1 \\ 0.1x_1 + 7x_2 - 0.3x_3 = -19.3 & E2 \\ 0.3x_1 - 0.2x_2 + 10x_3 = 71.4 & E3 \end{cases}$$

Solution 3. *La première partie de la procédure est l'élimination en avant. Multiplier Eq.* $(E1)$ *de* $0.1/3$ *et soustrayez le résultat de l'équation.* $(E2)$ *pour donner*

$$7,00333x_2 - 0,293333x_3 = -19,5617$$

Puis multipliez Eq. $(E1)$ de $0.3/3$ et soustrayez-le de l'équation. $(E3)$. Après ces opérations, l'ensemble des équations est

$$\begin{array}{llll} 3x_1 - 0.1x_2 - 0.2x_3 & = 7.85 & E4 \\ \quad 7.00333x_2 - 0,293333x_3 & = -19.5617 & E5 \\ \quad -0.190000x_2 + 10.0200x_3 & = 70.6150 & E6 \end{array}$$

Pour terminer l'élimination en avant, x_2 doit être supprimé de l'Eq. $(E6)$. Accomplir ceci, multipliez Eq. $(E5)$ par $-0,190000/7,00333$ et soustrayez le résultat de l'équation $(E6)$. Cela élimine x_2 de la troisième équation et réduit le système à une forme triangulaire supérieure, comme dans

$$\begin{array}{llll} 3x_1 - 0.1x_2 - 0.2x_3 & = 7.85 & E7 \\ \quad 7.00333x_2 - 0,293333x_3 & = -19.5617 & E8 \\ \quad\quad 10.0120x_3 & = 70,0843 & E9 \end{array}$$

Nous pouvons maintenant résoudre ces équations par substitution arrière. Tout d'abord, Eq. $(E9)$ peut être résolu pour

$$x_3 = \frac{70.0843}{10.0120} = 7,00003.$$

Ce résultat peut être substitué en retour dans l'Eq. ($E8$), qui peut alors être résolu pour

$$x_2 = \frac{-19.5617 + 0.293333(7.00003)}{7,00333} = -2,50000.$$

Enfin, $x_3 = 7,00003$ et $x_2 = -2,50000$ peuvent être replacés dans l'équation ($E7$), qui peut être résolu pour

$$x_1 = \frac{7.85 + 0.1(-2.50000) + 0.2(7.00003)}{3} = 3.00000.$$

Bien qu'il y ait une légère erreur d'arrondi, les résultats sont très proches de la solution exacte de $x_1 = 3$, $x_2 = -2.5$ et $x_3 = 7$. Ceci peut être vérifié en remplaçant les résultats dans l'ensemble d'équations d'origine:

$$\begin{cases} 3(3) - 0.1(-2.5) - 0.2(7.00003) = 7.84999 \cong 7.85 \\ 0.1(3) + 7(-2.5) - 0.3(7.00003) = -19.30000 = -19.3 \\ 0.3(3) - 0.2(-2.5) + 10(7.00003) = 71.4003 \cong 71.4 \end{cases}$$

2.7. **Décomposition LU à l'aide de l'élimination de Gauss.** On peut interpréter matriciellement le problème traité.

Soit

$$AX = b \tag{2.19}$$

où

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}. \tag{2.20}$$

Respectivement la matrice et le vecteur du second membre du système (2.1). La matrice

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & a_{24}^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & a_{34}^{(1)} \\ 0 & a_{42}^{(1)} & a_{43}^{(1)} & a_{44}^{(1)} \end{pmatrix}$$

du système (2.6) est obtenue, en multipliant à gauche A par $P^{(1)}$ avec $A^{(1)} = P^{(1)}A$, où

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{a_{31}}{a_{11}} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{a_{41}}{a_{11}} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et le vecteur $b^{(1)}$ est obtenu de la même façon :

$$b^{(1)} = P^{(1)}b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2^{(1)} \\ b_3^{(1)} \\ b_4^{(1)} \end{pmatrix}.$$

De même

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & a_{24}^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & a_{34}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{43}^{(2)} & a_{44}^{(2)} \end{pmatrix}, \qquad b^{(2)} = P^{(2)}b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2^{(1)} \\ b_3^{(2)} \\ b_4^{(2)} \end{pmatrix}, \qquad P^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{a_{32}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} & 1 & 0 \\ 0 & -\dfrac{a_{42}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A^{(2)} = P^{(2)}P^{(1)}A$$

De la même manière, on obtient

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & a_{24}^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & a_{34}^{(2)} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44}^{(3)} \end{pmatrix}, \qquad b^{(3)} = P^{(3)}b^{(2)} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2^{(1)} \\ b_3^{(2)} \\ b_4^{(3)} \end{pmatrix}, \qquad P^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{a_{42}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$A^{(3)} = P^{(3)}A^{(2)} = P^{(3)}P^{(2)}P^{(1)}A.$$

Comme les matrices $P^{(1)}$, $P^{(2)}$, et $P^{(3)}$ sont inversibles car ce sont des matrices triangulaires dont les éléments diagonaux sont différents de 0.

On peut exprimer A en fonction de

$$A = \left(P^{(1)}\right)^{-1}\left(P^{(2)}\right)^{-1}\left(P^{(3)}\right)^{-1}A^{(3)}.$$

or $P^{(1)}$ a pour inverse

$$L^{(1)} = \left(P^{(1)}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{a_{31}}{a_{11}} & 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{a_{41}}{a_{11}} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$P^{(2)}$ a pour inverse

$$L^{(2)} = \left(P^{(2)}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{a_{32}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} & 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{a_{42}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et $P^{(3)}$ ll=a pour inverse

$$L^{(3)} = \left(P^{(3)}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{a_{42}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} & 1 \end{pmatrix}.$$

Remarque : On remarque que ces matrices sont obtenues sans calculs :

Il suffit de transformer les termes figurant sous la diagonale en leur opposée, les autre termes sont inchangés. Alors

$$L^{(1)}L^{(2)}L^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{a_{31}}{a_{11}} & \dfrac{a_{32}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} & 1 & 0 \\ \dfrac{a_{41}}{a_{11}} & \dfrac{a_{42}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} & \dfrac{a_{42}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} & 1 \end{pmatrix}$$

Posons $L^{(1)}L^{(2)}L^{(3)} = L$, et $U = A^{(3)}$ donc on a décomposé A en un produit d'une matrice triangulaire inférieure L (de l'anglais « **Lower** ») ayant des U (de l'anglais « **Upper** ») sur la diagonale par une matrice triangulaire supérieure U : $A = LU$.

Nous somme amenés a résoudre successivement les deux équations :

$$LZ = b \qquad \text{et} \qquad UX = Z.$$

Example 4. *Soit le système linéaire suivant :*

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + x_3 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 7 \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 4 \end{aligned} \tag{2.21}$$

a) Résoudre ce système par la méthode de Gauss.

b) Donner une interprétation matricielle de la méthode.

c) Factoriser la matrice A du système en produit LU où L est une matrice triangulaire inférieure (avec des 1 sur la diagonale principale) et U triangulaire supérieure, puis résoudre ce système.

a) Nous avons la matrice augmentée comme

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 7 \\ 4 & -3 & 2 & 4 \end{array}\right] \quad \begin{array}{c} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{array}$$

Maintenant, nous allons appliquer la méthode d'élimination de Gauss (sans pivotement partiel) dans les étapes suivantes. Puisqu'il y a trois inconnues x_1, x_2, x_3, le nombre d'étapes requises dans cette méthode sera de deux.

Étape 1:

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} E_1 \\ E_2^{(1)} \leftarrow E_2 - \frac{2}{3}E_1 \\ E_3^{(1)} \leftarrow E_3 - \frac{4}{3}E_1 \end{array} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 7/3 & 1/3 \\ 0 & -1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

Étape 2:

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 7/3 & 1/3 \\ 0 & -1/3 & 2/3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} E_1 \\ E_2^{(1)} \\ E_3^{(2)} \leftarrow E_3^{(1)} + \frac{1}{7}E_2^{(1)} \end{array}} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 7/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 5/7 \end{bmatrix}$$

La substitution arrière donne la solution.

b) Posons $A^{(0)} = A$, on calcule $A^{(1)} = P^{(1)}A$, où

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{4}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

d'où

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 7/3 & 1/3 \\ 0 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

on calcule $A^{(2)} = P^{(2)}A^{(1)}$, où

$$P^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/7 & 1 \end{pmatrix},$$

Donc

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 7/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 5/7 \end{pmatrix}$$

La matrice $A^{(1)}$ est ainsi triangulaire supérieure, c'est la matrice U recherchee. D'autre part, on a $A^{(3)} = P^{(2)}A^{(1)} = P^{(2)}P^{(1)}A$,on en déduit donc que

$$A = \underbrace{\left(P^{(2)}\right)^{-1}\left(P^{(1)}\right)^{-1}}_{L}\underbrace{A^{(3)}}_{U}$$

Ainsi, $A = LU$, avec

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{4}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{4}{3} & -1/7 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a ainsi factorise A sous la forme :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{4}{3} & -1/7 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 7/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 5/7 \end{pmatrix}$$

Présantation de la méthode d'identification

c) Résoudre $AX = B$ revient à résoudre $LUX = B$. On pose alors

$$\begin{cases} LZ = B \\ UX = Z \end{cases}$$

$$LZ = B \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{4}{3} & -1/7 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow Z = \begin{pmatrix} 2 \\ 17/3 \\ 15/7 \end{pmatrix}$$

Finalement, on resout:

$$UX = Z \iff \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 7/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 5/7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 17/3 \\ 15/7 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

2.8. **Cas du pivot nul.** On a supposé, dans ce qui précède, qu'aucun des pivots successifs n'était nul. Mais lors de l'élimination, il peut arriver qu'une des pivots soit nulle, ce qui rend impossible l'élimination de la variable correspondante dans les équations qui restent. Il faut chercher dans les équations suivantes et dans la même colonne un coefficient no nul, en le retrouvant il suffit d'intervertir les deux équations du système (et de ne pas oublier d'intervertir les seconds membres correspondants).

Example 5. *Considérons le système :*

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 &= 1, \\ x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 &= 7, \\ x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4 &= -1, \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 + 3x_4 &= 3. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Comme $a_{11} = 1 \neq 0$, la première étape de triangularisation donne

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 &= 1, \\ 0x_2 - 2x_3 + x_4 &= 6, \\ 0x_2 + 0x_3 - 2x_4 &= -2, \\ -3x_2 - 3x_3 + x_4 &= 3. \end{aligned} \tag{2.23}$$

On remarque que $a_{22}^{(1)} = 0$ du système (2.12). Mais $a_{42}^{(1)} = -3 \neq 0$, ce pivot étant trouvé , on permute la $2^{ème}$ équation et la $4^{ème}$ équation , ce qui nous ramène au système équivalent suivant :

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 &= 1, \\ -3x_2 - 3x_3 + x_4 &= 3, \\ 0x_3 - 2x_4 &= -2, \\ -2x_3 + x_4 &= 6. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Comme $a_{33}^{(2)} = 0$ et $a_{43}^{(2)} \neq 0$, on permute la troisième et la quatrième équation du système (2.13) , ce qui nous ramène au système équivalent à matrice A triangulaire supérieure :

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 &= 1, \\ -3x_2 - 3x_3 + x_4 &= 3, \\ -2x_3 + x_4 &= 6, \\ -2x_4 &= -2. \end{aligned} \tag{2.25}$$

En remontant, on obtient facilement la solution du système.

Remarque : Puisque on ne peut avoir $a_{ik}^{(k-1)} = 0$ pour tout $i = k+1, \ldots, n$, que si et seulement si $\det A = 0$. Comme dans la pratique, on ne connaît pas $\det A$, on prévoira dans le programme une sortie pour ce cas.

2.9. **Stratégies de pivotement pour la méthode d'élimination de Gauss.** La méthode précédente s'applique lorsque tous les pivots ne sont pas nuls. Si tel n'est pas le cas, on recherche dans les équations suivantes un coefficient non nul.

Afin de diminuer les risques d'incidents numériques, **le pivot choisi est le plus grand en valeur absolue**. Lorsque ce pivot est trouvé, on effectue les permutations nécessaires pour faire apparaître ce nouveau pivot à la place du pivot nul. Il existe deux stratégies de pivotation (recherche de pivot non nul) : **la pivotation partielle** et **la pivotation totale**.

2.9.1. *Pivot partiel :* A chaque étape (i^{th}), nous rendons l'élément pivot (a_{ii}) le plus important en amplitude par les éléments sous l'élément pivot dans cette colonne, par simple conversion de ligne. Il s'agit de s'assurer que les grandeurs des multiplicateurs sont inférieures à 1 pour chaque ligne. C'est-à-dire qu'à la $i$ème étape, nous voulons simplement

$$|a_{ii}| \geqslant |a_{ji}|, \qquad j = i+1,\ i+2, \dots, n. \tag{2.26}$$

Example 6. *Calculez la solution du système d'équations linéaires suivant à l'aide de* ***la méthode d'élimination de Gauss sans pivotement*** *et* ***avec pivotement partiel****. N'utilisez que l'arithmétique d'arrondi à sept chiffres significatifs pour les calculs*

$$\begin{aligned} 5.42x_1 + 16.78x_2 + 0.78x_3 &= 38.0014 && (E_1)\\ 0.423x_1 + 2.3x_2 + 23.46x_3 &= 53.97833 && (E_2)\\ 26.73x_1 + 1.274x_2 + 2.45x_3 &= 68.74938 && (E_3) \end{aligned}$$

Comparez les résultats avec la solution exacte, $x_1 = 2.310000$*,* $x_2 = 1.420000$*,* $x_3 = 2.120000$.

2.9.2. ***Sans pivotement.*** En procédant de la même manière que dans l'exemple précedent, nous éliminons x_1 du deuxième et troisième équations à l'aide de la première équation en utilisant sept chiffres significatifs arithmétique.

$$\begin{aligned} 5.42x_1 + 16.78x_2 + 0.78x_3 &= 38.0014 && (E_1)\\ 0.990417x_2 + 23.39912x_3 &= 5101254 && \left(E_2^{(1)} = E_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}}E_1\right)\\ -81.4805x_2 - 1.396753 &= 118.663423 && \left(E_3^{(1)} = E_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}}E_1\right) \end{aligned}$$

En éliminant x_2 de la troisième équation, on obtient

$$\begin{aligned} 5.42x_1 + 16.78x_2 + 0.78x_3 &= 38.0014 && (E_1)\\ 0.990417x_2 + 23.39912x_3 &= 5101254 && \left(E_2^{(1)}\right)\\ 1923.622x_3 &= 4078.082 && \left(E_3^{(2)} = E_3^{(1)} - \frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}E_2^{(1)}\right) \end{aligned}$$

La solution est obtenue en utilisant **la méthode de remontée**, et elle est donnée par

$$\begin{aligned} x_3 &= 2.120002\\ x_2 &= 1.419968\\ x_1 &= 2.3101 \end{aligned}$$

En comparant avec le résultat exact, on peut facilement voir que l'erreur est aux septième, sixième et cinquième chiffres significatifs dans les valeurs des variables x_3,

x_2 et x_1, respectivement. Ainsi, nous pouvons utiliser le pivotement pour réduire l'erreur. Ce n'est que pour un système d'ordre trois, et nous utilisons 7 chiffres arithmétique des virgules flottantes. L'erreur augmente significativement dans le cas d'un grand système.

2.9.3. ***Avec pivotement partiel.*** Dans la première colonne [5.44, 0.423, 26.73] du système donné, le plus grand élément en magnitude est 26.73. Par conséquent, nous changeons la position de la dernière rangée à la première rangée, pour rendre l'élément pivot (a_{11}) plus grand

$$\begin{array}{rl} 26.73x_1 + 1.274x_2 + 2.45x_3 = 68.74938 & E_1 \\ 5.42x_1 + 16.78x_2 + 0.78x_3 = 38.0014 & E_2 \\ 0.423x_1 + 2.3x_2 + 23.46x_3 = 53.97833 & E_3 \end{array}$$

En appliquant des opérations élémentaires sur les lignes pour éliminer x_1 des deuxième et troisième lignes, on obtient

$$\begin{array}{rl} 26.73x_1 + 1.274x_2 + 2.45x_3 = 68.74938 & E_1 \\ 16.52167x_2 + 0.28321x_3 = 24.0612 & E_2 \\ 2.279839x_2 + 23.42123x_3 = 52.89038 & E_3 \end{array}$$

Dans la colonne pivot [16.52167, 2.279839], le plus grand élément en magnitude est 16.52167. Il n'est pas nécessaire d'intervertir les lignes. Maintenant, en éliminant x_2 de la troisième rangée, nous obtenons le système triangulaire supérieur suivant

$$\begin{array}{rl} 26.73x_1 + 1.274x_2 + 2.45x_3 = 68.74938 & E_1 \\ 16.52167x_2 + 0.28321x_3 = 24.0612 & E_2 \\ 23.38215x_3 = 49.57016 & E_3 \end{array}$$

Nous pouvons facilement obtenir la solution suivante en utilisant **la méthode de remontée**

$$\begin{aligned} x_3 &= 2.120002 \\ x_2 &= 1.420000 \\ x_1 &= 2.310000 \end{aligned}$$

Le résultat est correct jusqu'à sept chiffres significatifs.

Remarque : Il n'est pas toujours possible d'obtenir le bon résultat avec un pivotement partiel, surtout si la variation de l'amplitude des éléments de la matrice A est importante. Dans ce cas, nous pouvons utiliser **des stratégies de pivotement partiel à échelle** et **de pivotement complet**. Nous discuterons d'abord de ces deux stratégies de pivotement, puis prendrons des exemples pour montrer l'efficacité de ces stratégies.

2.9.4. ***Pivot partiel mis à l'échelle :*** Dans cette stratégie de pivotement, l'élément pivot est l'élément le plus grand en magnitude de sa ligne, mis à l'échelle.

Considérez **les éléments les plus grands en amplitude pour chaque ligne** de la matrice A sont les suivants

$$S_i = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} |a_{ij}| \qquad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Un vecteur $S = [S_1, S_2, \dots, S_n]$ est défini à l'aide de ces valeurs. Nous définissons **le vecteur pivot mis à l'échelle** suivant pour le premier élément pivot.

$$R = \left[\left|\frac{a_{11}}{S_1}\right|, \left|\frac{a_{21}}{S_2}\right|, \dots, \left|\frac{a_{n1}}{S_n}\right|\right] \tag{2.27}$$

Soit **le plus grand élément pivot** mis à l'échelle A, alors **la** i**ème ligne est la ligne pivot**. Nous répétons le processus pour tous les éléments pivots avec le vecteur S.

Pivot complet : à chaque étape (ith), nous sélectionnons **l'élément de pivot qui est absolument le plus grand dans la ligne de pivot** et **les lignes sous l'élément de pivot dans la matrice** A **en utilisant la conversion de ligne et de colonne**. Mathématiquement, nous avons

$$|a_{ii}| \geqslant |a_{jk}|; \qquad j, k = i, i+1, i+2, \dots, n. \tag{2.28}$$

Example 7. *Résoudre le système d'équations linéaires suivant par* la méthode d'élimination de Gauss ***avec pivotement partiel (*** [redacted] ***)***, avec pivotement partiel mis à l'échelle ([redacted]) et ***avec pivotement complet (*** [redacted] ***)*** *en utilisant l'arithmétique d'arrondi à trois chiffres significatifs.*

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 1 && E_1 \\ 2x_1 - x_2 + 100x_3 &= 53 && E_2 \\ 3x_1 - x_2 + 200 &= 102 && E_3 \end{aligned}$$

Comparer les résultats obtenus pour chaque cas avec la solution exacte

$$x_1 = 1,\ x_2 = -1,\ x_3 = 0.5.$$

La matrice augmentée pour le système d'équations linéaires donné est la suivante

$$[A \mid b] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 100 & 53 \\ 3 & -1 & 200 & 102 \end{bmatrix}$$

Maintenant, nous allons utiliser la méthode d'élimination de Gauss pour obtenir la solution du système donné avec les trois stratégies de pivotement comme suit.

Avec pivotement partiel

Puisque l'élément 3 est le plus grand dans la première colonne de la matrice augmentée $[A : b]$, donc en interchangeant les dernières et premières lignes $E_1 \leftrightarrow E_3$, nous avons

$$[A \mid b] = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 200 & 102 \\ 2 & -1 & 100 & 53 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

nous avons

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 200 & 102 \\ 0 & -1.67 & -33.0 & -15.0 \\ 0 & 0.667 & -64.6 & -33.0 \end{bmatrix} \begin{matrix} E_2 \to E_2 - \left(\dfrac{2}{3} = 0.667\right) E_1 \\ E_3 \to E_3 - \left(\dfrac{1}{3} = 0.333\right) E_1 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 200 & 102 & \\ 0 & -1.67 & -33.0 & -15.0 & \\ 0 & 0 & -77.8 & -39.0 & E_3 \to E_3 + \left(\dfrac{0.667}{1.67} = 0.399\right) E_2 \end{bmatrix}$$

En utilisant **la méthode de remontée**, on obtient

$$\begin{aligned} x_3 &= 0.501 \\ x_2 &= -0.898 \\ x_1 &= 0.967 \end{aligned}$$

Le résultat obtenu est fortement erroné. La valeur de la variable x_1 est correcte à deux chiffres significatifs près ; la variable x_3 est correcte à un chiffre significatif près ; tandis que la variable x_2 est incorrecte même pour le premier chiffre significatif.

Avec pivotement partiel mis à l'échelle

Dans la matrice augmentée, les plus grands éléments attachés pour chaque ligne de la matrice A sont les suivants

$$[A \mid b] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & \longrightarrow 2 \\ 2 & -1 & 100 & 53 & \longrightarrow 100 \\ 3 & -1 & 200 & 102 & \longrightarrow 200 \end{bmatrix}$$

Le vecteur $S = [S_1, S_2, S_3]$, des éléments **les plus grands en magnitude pour chaque ligne** de la matrice A est le suivant

$$S = [S_1, S_2, S_3] = [2, 100, 200]$$

Le vecteur pivot mis à l'échelle est donné par

$$E = \left[\left| \frac{a_{11}}{S_1} \right|, \left| \frac{a_{21}}{S_2} \right|, \left| \frac{a_{31}}{S_3} \right| \right] = \left[\frac{1}{2}, \frac{2}{100}, \frac{3}{200} \right] \tag{2.29}$$

Étant donné que le premier élément de ce vecteur est le plus grand en amplitude, la première ligne est donc la ligne pivot et l'échange de lignes n'est pas nécessaire. Appliquer $E_2 \to E_2 - (2)\,E_1$ et $E_3 \to E_3 - (3)\,E_1$, en utilisant l'arithmétique d'arrondi à trois chiffres significatifs pour obtenir le système suivant

$$[A \mid b] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & \longrightarrow 2 \\ 0 & -3.00 & 96.0 & 51.0 & \longrightarrow 100 \\ 0 & -2.00 & 194 & 99.0 & \longrightarrow 200 \end{bmatrix}$$

Sur le calcul du vecteur pivot mis à l'échelle, nous avons

$$E = \left[\left| \frac{a_{22}}{S_2} \right|, \left| \frac{a_{32}}{S_3} \right| \right] = \left[\frac{3}{100}, \frac{2}{200} \right] \tag{2.30}$$

Encore une fois, il n'est pas nécessaire d'interchanger les lignes. En appliquant, $E_3 \to E_3 - \left(\frac{2}{3} = 0.667 \right) E_2$, nous avons

$$[A \mid b] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & \longrightarrow 2 \\ 0 & -3.00 & 96.0 & 51.0 & \longrightarrow 100 \\ 0 & 0 & 130 & 65.0 & \longrightarrow 200 \end{bmatrix}$$

En résolvant ce système, nous avons obtenu la solution suivante en utilisant l'arithmétique à trois chiffres significatifs

$$\begin{aligned} x_3 &= 0.500 \\ x_2 &= -1.419968 \\ x_1 &= 2.3101 \end{aligned}$$

Le résultat obtenu est le résultat exact.

Avec pivotement complet

Les variables x_1, x_2, x_3 sont attachées respectivement aux première, deuxième et troisième colonnes de la matrice augmentée

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \end{array} \\ [A \mid b] = & \left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 100 & 53 \\ 3 & 1 & 200 & 102 \end{array}\right] \end{array}$$

L'élément absolument le plus grand de la matrice A est 200. Cet élément doit donc être l'élément pivot. En intervertissant les première et dernière lignes, puis les première et troisième colonnes ($E_1 \leftrightarrow E_3$ et $C_1 \leftrightarrow C_3$), on a

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} x_3 & x_2 & x_1 & \end{array} \\ [A \mid b] = & \left[\begin{array}{cccc} 200 & 1 & 3 & 102 \\ 100 & -1 & 2 & 53 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

En appliquant les opérations sur les lignes

$$\begin{array}{ccc} & \begin{array}{cccc} x_3 & x_2 & x_1 & \end{array} & \\ [A \mid b] = & \left[\begin{array}{cccc} 200 & 1 & 3 & 102 \\ 0 & -1.5 & 0.5 & 2 \\ 0 & 0.99 & 0.97 & -0.02 \end{array}\right] & \begin{array}{c} \\ E_2 \to E_2 - (0.5)\, E_1 \\ E_3 \to E_3 - (0.01)\, E_1 \end{array} \end{array}$$

Étant donné que l'élément -1.5 est l'élément absolument le plus grand des deuxième et troisième rangées de la matrice A, il n'est donc pas nécessaire d'intervertir les rangées. En appliquant $E_3 \to E_3 - (0.66)\, E_1$, nous avons obtenu la matrice triangulaire supérieure suivante

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} x_3 & x_2 & x_1 & \end{array} \\ [A \mid b] = & \left[\begin{array}{cccc} 200 & 1 & 3 & 102 \\ 0 & -1.5 & 0.5 & 2 \\ 0 & 0 & 1.30 & 1.30 \end{array}\right] \end{array}$$

En résolvant ce système d'équations, on a

$$x_1 = 1.00,\ x_2 = -1.00,\ x_3 = 0.500.$$

Le résultat obtenu est le résultat exact.

Remarque : Dans cet exemple, **les stratégies de pivotement à l'échelle** et complète fournissent des résultats exacts, tandis que **le pivotement partiel produit des résultats erronés**. En général, le pivotement complet est meilleur que **le pivotement partiel** et **échelonné (proportionné)**. En cas de pivotement complet, nous nous occupons de **la matrice complète** A **pour le plus grand élément et par conséquent l'erreur d'arrondi est minimisée.**

2.10. **Méthode Gauss-Jordan.** La méthode est basée sur l'idée de réduire le système d'équations donné $Ax = b$, à un système diagonal d'équations $Ix = d$, où I est la matrice d'identité, en utilisant des opérations élémentaires sur les lignes. Nous savons que les solutions des deux systèmes sont identiques. Ce système réduit donne le vecteur solution x. Cette réduction équivaut à trouver la solution comme $x = A^{-1}b$.

$$(\bigstar) \qquad [A|b] \xrightarrow{\text{Méthode Gauss-Jordan}} [I|X]$$

et la solution est $x_i = d_i$, $i = 1, 2, 3$.

Procédure d'élimination la première étape est la même que dans la méthode d'élimination de Gauss, c'est-à-dire que nous transformons les éléments sous le premier pivot sous forme de zéros, en utilisant les transformations élémentaires de lignes.

À partir de la deuxième étape, nous transformons les éléments au-dessous et au-dessus des pivots sous forme de zéros en utilisant les transformations élémentaires de lignes. Enfin, nous divisons chaque ligne par son pivot pour que la matrice augmentée finale soit de la forme (★). Un pivotement partiel peut également être utilisé dans la solution.

On peut aussi faire les pivots comme 1 avant d'effectuer l'élimination.

Illustrons la méthode.

Exemple : Résoudre le système d'équations suivant

$$\begin{gathered} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 6 \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 4 \end{gathered}$$

en utilisant la méthode de Gauss-Jordan.

Solution: Nous avons la matrice augmentée comme

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & 6 \\ 3 & 5 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Nous effectuons les transformations de lignes élémentaires suivantes et faisons les éliminations.

$$\begin{array}{r} E_2 - 4E_1, \\ E_3 - 3E_1 : \end{array} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{r} E_1 + E_2, \\ E_3 + 2E_2 : \end{array} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & -1 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & -10 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{r} E_1 - (4/10)\, E_3, \\ E_2 - (5/10)\, E_3 : \end{array} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & -10 & 5 \end{bmatrix}$$

Maintenant, en faisant les pivots comme 1, $((-E_2), (E_3/(-10)))$, nous obtenons

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \end{bmatrix}$$

Par conséquent, la solution du système est $x_1 = 0$, $x_2 = 1/2$, $x_3 = -1/2$.

(ii) Nous effectuons les transformations de lignes élémentaires suivantes et procédons à l'élimination.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & 6 \\ 3 & 5 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad E_1 \leftrightarrow E_2 : \quad \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

$$E_1/4: \quad \begin{bmatrix} 1 & 3/4 & -1/4 & 3/2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} E_2 - E_1, \\ E_3 - 3E_1: \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3/4 & -1/4 & 3/2 \\ 0 & 1/4 & 5/4 & -1/2 \\ 0 & 11/4 & 15/4 & -1/2 \end{bmatrix}$$

$$E_2 \leftrightarrow E_3: \quad \begin{bmatrix} 1 & 3/4 & -1/4 & 3/2 \\ 0 & 11/4 & 15/4 & -1/2 \\ 0 & 1/4 & 5/4 & -1/2 \end{bmatrix} \qquad E_2/(11/4): \quad \begin{bmatrix} 1 & 3/4 & -1/4 & 3/2 \\ 0 & 1 & 15/11 & -2/11 \\ 0 & 1/4 & 5/4 & -1/2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} E_1 - (3/4)\, E_2, \\ E_3 - (1/4)\, E_2: \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -14/11 & 18/11 \\ 0 & 1 & 15/11 & -2/11 \\ 0 & 0 & 10/11 & -5/11 \end{bmatrix}.$$

$$E_3/(10/11): \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -14/11 & 18/11 \\ 0 & 1 & 15/11 & -2/11 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

$$E_3/(10/11): \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

Par conséquent, la solution du système est $x_1 = 1$, $x_2 = 1/2$, $x_3 = -1/2$.

Remarque 1: La méthode Gauss-Jordan semble très élégante car la solution est obtenue directement. Cependant, il est plus coûteux en calcul que l'élimination de Gauss. Pour un grand n, le total le nombre de divisions et de multiplications pour la méthode Gauss-Jordan est près de 1.5 fois le nombre total de divisions et de multiplications nécessaires pour l'élimination de Gauss. Par conséquent, nous faisons n'utilisez normalement pas cette méthode pour résoudre le système d'équations. Le plus important l'application de cette méthode est de trouver l'inverse d'une matrice non singulière. Nous présentons ceci méthode dans la section suivante.

2.10.1. *Inverse d'une matrice par la méthode Gauss-Jordan.* Comme indiqué dans la remarque 1, l'application importante de la méthode de Gauss-Jordan est de trouver l'inverse d'une matrice non singulière A. On part de la matrice augmentée de A avec la matrice identité I du même ordre. Lorsque la procédure Gauss-Jordan est terminée, on obtient

$$[A|I] \quad \xrightarrow{\text{Méthode Gauss-Jordan}} \quad [I|A^{-1}]$$

puisque, $AA^{-1} = I$.

Remarque 2. Un pivotement partiel peut également être effectué à l'aide de la matrice augmentée $[A|I]$. Cependant, nous ne pouvons pas d'abord échanger les lignes de A, puis trouver l'inverse. Ensuite, nous trouverions l'inverse d'une matrice différente.

Exemple: Trouvez l'inverse de la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

en utilisant la méthode de Gauss-Jordan .

Solution. Considérez la matrice augmentée

$$[A|I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nous effectuons les transformations de lignes élémentaires suivantes et faisons les éliminations.

$$\Longleftrightarrow \begin{array}{l} E1 \\ E2 - E1 \\ E3 - E1 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{array}{l} E1 \\ E2 \\ E3 - E2 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{array}{l} E1 \\ -E2 \\ E3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{array}{l} E1 + E3 \\ E2 + E3 \\ E3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = [I|A^{-1}]$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$