
TD 3 : La loi normale.

Exercice 1. On a donné une table pour servir au calcul des probabilités se rapportant à n'importe quelle variable aléatoire X distribuée normalement. Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale. Soit F la fonction de répartition de X et soit T la variable aléatoire centrée réduite correspondante $T = \frac{X-\mu}{\sigma}$. On a

$$F(x) = P(X \leq x) \quad (1)$$

$$= P(T\sigma + \mu \leq x) \quad (2)$$

$$= P\left(T \leq \frac{x - \mu}{\sigma}\right) \quad (3)$$

$$= \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right). \quad (4)$$

où $\Phi(t)$ est la fonction de répartition de la variable aléatoire centrée réduite T donnée dans la table si t est positif. Utiliser la table pour calculer les valeurs suivantes :

1. $\Phi(0.52)$, $\Phi(1.51)$ et $\Phi(-1.93)$.
2. $P(T \geq 1.23)$ et $P(T \geq -2.34)$.
3. $P(2, 1 \leq T \leq 4.5)$ et $P(-1.25 \leq T \leq -0.36)$.
4. Trouver t_1 pour que $P(T \leq t_1) = 0.2577$.

Exercice 2. (Exemple d'application)

1. Une variable aléatoire X distribuée normalement avec $E(X) = \mu = 400$ et $\sigma(X) = 15.4$. Trouver la valeur de x pour que $P(X > x) = 0.67$.
2. Application
La taille des élèves d'une école suit une loi normale avec $\mu = 150\text{cm}$ et $\sigma = 20\text{cm}$.
 - Quel est le nombre d'élèves ayant une taille comprise entre 140cm et 170cm, si l'effectif total est de 1000 élèves ?
 - Quelle est la taille maximale x_m des 800 élèves les plus petits ?

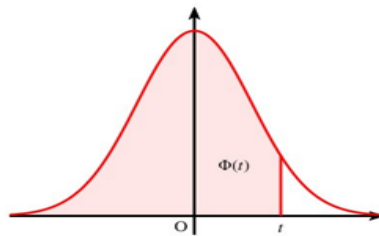
Approximation d'une loi binomiale par une loi normale :

Lorsque n est assez grand ($n > 30$), p est assez petit ($p < 0.1$) et $np > 20$, ou lorsque n est assez grand ($n > 30$), p n'est pas très petit ($0, 2 < p < 0, 8$), la loi normale fournit une meilleure approximation à la loi binomiale.

Exercice 3. Sachant que 53% des nouveau-nés sont des garçons (i.e. la probabilité qu'un nouveau-né soit un garçon est égale à 0,53). La variable aléatoire X est le nombre de garçons parmi 1000 nouveau-nés.

1. Quelle est, en théorie, la loi suivie par X ? Nature de la loi, espérance, variance et écart-type ?
2. Calculer la probabilité d'avoir plus de 350 garçons ?
3. Calculer la probabilité d'avoir de 350 à 550 garçons ?
4. Calculer la probabilité d'avoir au moins 450 garçons ?

Table de la loi normale centrée réduite



$$P(-1,96 < T < 1,96) = 0,95$$

$$P(-2,58 < T < 2,58) = 0,99$$

Rappel :

$$P(T > t) = 1 - P(T < t) = 1 - \Phi(t)$$

$$P(T < -t) = P(T > t) = 1 - \Phi(t)$$

Exemple :

$$P(T < 1,24) = 0,8925$$

$$P(T > 1,24) = 1 - 0,8925 = 0,1075$$

$$P(T < -1,24) = P(T > 1,24) = 0,1075$$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000