مقياس الرياضيات 2 (حل السلسلة 2)
الدوال ذات متغيرين حقيقين

التمرين 01 :

1. $D_f = \{(x,y): (x,y) \in \mathbb{R}^2\} = \mathbb{R}^2$.

2. $f(0,0) = 2(0)^2 + (0)^2 + 7 = 7$

$f(-1,2) = 2(-1)^2 + (2)^2 + 7 = 13$

$f(3,5) = 2(3)^2 + (5)^2 + 7 = 50$

$f(0,-1) = 2(0)^2 + (-1)^2 + 7 = 8$.

التمرين 02 : اوجد ميدان تعريف الدوال التالية

(1

لاحظ أن المقام $x^2 + y^2 + 3 \neq 0$ لأي $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. وعليه فأن

$D_f = \{(x,y): (x,y) \in \mathbb{R}^2\} = \mathbb{R}^2$

(2

$x^2 - y^2 = 0 \Rightarrow y^2 = x^2 \Rightarrow y = \pm x$

فأن منطلق الدالة هو جميع النقاط $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ في المستوي XY ما عدا تلك النقاط الواقعة على المستقيمين $y = \pm x$. لذا

$D_f = \{(x,y): (x,y) \in \mathbb{R}^2, y \neq \pm x\}$

(3

بما أن المقدار $x^2 + y^2$ أكبر أو يساوي صفر لأي $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ، وعليه فأن المنطلق هو $\mathbb{R}^2$. أي أن $D_f = \{(x,y): (x,y) \in \mathbb{R}^2\} = \mathbb{R}^2$.

(4

بما أن $\sin(xy)$ معرفة لجميع $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ وأن $4 + x^2 + y^2 > 0$ لأي $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ فأن

$D_f = \{(x,y): (x,y) \in \mathbb{R}^2\} = \mathbb{R}^2$

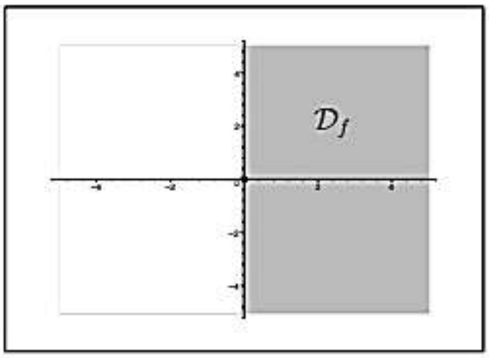
(5

$D_f = \{(x,y): (x,y) \in \mathbb{R}^2\} = \mathbb{R}^2$

<u>التمرين 03 :</u>

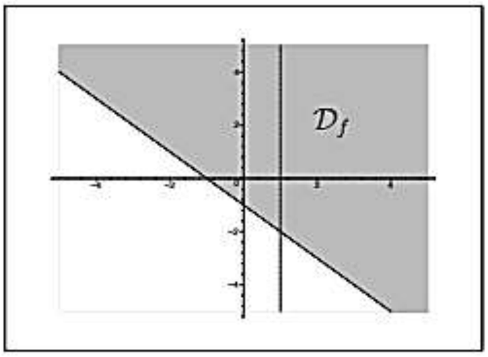
1)

$$\mathcal{D}_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, (x;y) \neq (0;0)\}$$



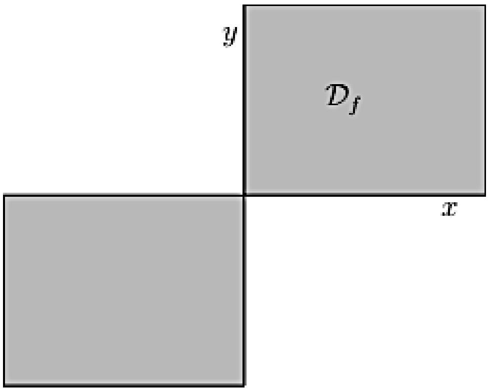
2) ان منطقة تعريف الدالة هي جميع نقاط المستوي الواقعة اعلى المستقيم ذوالمعادلة : y=-x-1 بحيث x يختلف عن 1.

$$\mathcal{D}_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq -x-1, x \neq 1\}.$$



3ان منطقة تعريف الدالة هي جميع نقاط المستوي بحيث x و y لهما نفس الاشارة

$$\mathcal{D}_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy > 0\}$$

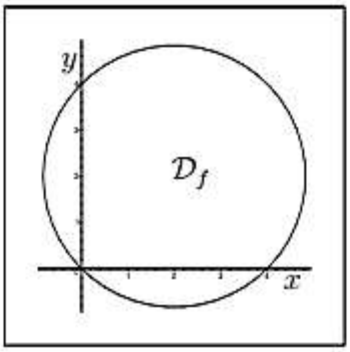


(4

$$\mathcal{D}_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-2)^2 + (y-2)^2 \leq 8\}.$$

و منه فان منطقة تعريف الدالة هي جميع نقاط القرص ذو المركز(2,2) و القطر 8. تذكير معادلة الدائرة هي

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2.$$



التمرين 04 :

(1) $f_x' = 3x^2$ $\quad$ $f_y' = 2y$

(2) $f_x' = 2e^{2x} \cos 3y$ $\quad$ $f_y' = -3e^{2x} \sin 3y$

(3) $f_x' = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}$ $\quad$ $f_y' = \dfrac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}$

التمرين 05

$$f_x' = \frac{1}{1+xy^2} \times y^2 = \frac{y^2}{1+xy^2} \Rightarrow f_x'(1,-1) = \frac{(-1)^2}{1+1\times(-1)^2} = \frac{1}{2}$$

$$f_y' = \frac{x}{1+xy^2} \times 2y = \frac{2yx}{1+xy^2} \Rightarrow f_y'(1,-1) = \frac{2\times(-1)}{1+1\times(-1)^2} = \frac{-2}{2} = -1$$

التمرين 06 : اوجد المشتقات الجزئية من الرتبة الثانية للدوال التالية

1. $f_x' = 2x + y^2 \Rightarrow f_{xx}' = 2$

$f_y' = 2xy \Rightarrow f_{yy}' = 2x$ $\quad$ نلاحظ ان $f_{xy}' = f_{yx}'$

2. $f_x' = \dfrac{3}{3x-5y}$ $\quad$ $f_{xy}' = \dfrac{15}{(3x-5y)^2}$

$f_y' = \dfrac{-5}{3x-5y}$ $\quad$ $f_{yx}' = \dfrac{15}{(3x-5y)^2}$

2. $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - \dfrac{x^3}{y}$.

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x - 3\dfrac{x^2}{y}$.

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y + \dfrac{x^3}{y^2}$.

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2 - 6\dfrac{x}{y}$.

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 4 - 2\dfrac{x^3}{y^3}$.

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \dfrac{3x^2}{y^2}$.

3. $f(x,y) = e^{2x^2+xy+7x+y^2}$.

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (4x+y+7)f(x,y)$.

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (x+2y)f(x,y)$.

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \big(4 + (4x+y+7)^2\big)f(x,y)$.

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \big(2 + (x+2y)^2\big)f(x,y)$.

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \big(1 + (x+2y)(4x+y+7)\big)f(x,y)$.

4. $f(x,y) = \sin(x.y)$.

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\cos(xy)$.

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\cos(xy)$.

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -y^2\sin(xy)$.

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -x^2\sin(xy)$.

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \cos(xy) - xy\sin(xy)$.

<u>التمرين 07</u> : لدينا

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -4e^{-2y}\cos 2x$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4e^{-2y}\cos 2x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -4e^{-2y}\cos 2x + 4e^{-2y}\cos 2x = 0$$

وعليه فان الدالة $f(x,y)$ تحقق معادلة لابلاس